$$\left.\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega t} y(t)dt \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega t} Y(\omega)d\omega \end{aligned}\right\}. \qquad (1.5.23)$$

Парними ці рівняння називаються за такої причини: якщо в одній із таких рівностей під знаком інтеграла множник ядра інтегрального перетворення вважати невідомим (саме в цьому випадку ці рівності є інтегральними рівняннями), то інша парна до неї рівність є формулою, за якою визначається шуканий розв'язок рівняння. Зокрема до таких парних рівнянь відносяться також згадані вище пряме та зворотне інтегральні перетворення Радона, які складають математичне підґрунтя комп'ютерної томографії взагалі, незалежно від того які фізичні принципи покладено в її основу: рентгенівська томографія, магніто-резонансна томографія, когерентна оптична томографія, імпедансна томографія тощо.

Варто зауважити, що для інтегральних рівнянь, як і для диференціальних, не завжди вдається отримати точне аналітичне рішення. Вибір методу рішення залежить від виду рівняння, як от, наприклад, у методі перетворень Лапласа, методі послідовних наближень, методі резольвент або в методі зведення до алгебраїчних рівнянь тощо.

Лекція 6

«Під будь-якою безоднею
може розкритися ще одна,
більш глибока»
Закон безкінечного падіння Емерсона

1. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Рівняння Нав'є-Стокса, Нав'є та Ейлера.

1 Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних

Диференціальним рівнянням у частинних похідних називається рівняння, яке пов'язує незалежні змінні, їх функцію і частинні похідні від цієї функції. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають порядком рівняння. Багато фізичних явищ моделюються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє відоме рівняння Хопфа-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad (1.6.1)$$

де функція $u = u(x,t)$ описує процес розповсюдження одновимірної ударної хвилі в газовому середовищі (рис. 1.6.1).

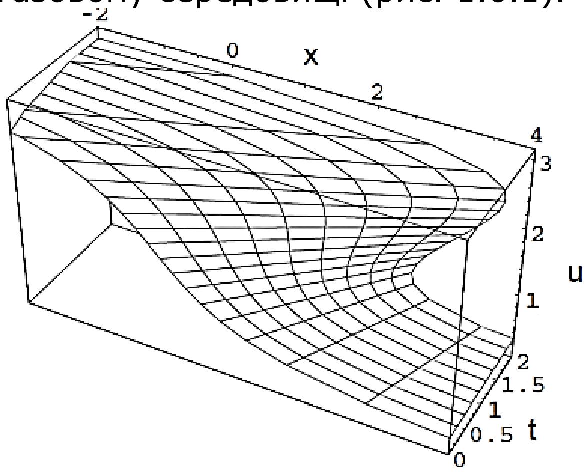

Рис. 1.6.1. Розповсюдження одновимірної ударної хвилі в газовому середовищі

Рівняння (1) є диференціальним рівнянням у частинних похідних першого порядку. Це рівняння є частинним випадком більш загального рівняння Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = \eta\frac{\partial\ u}{\partial x^2}, \qquad (1.6.2)$$

за умови, що в'язким тертям у середовищі можна знехтувати $(\eta \to 0)$.

Якщо $u = u(x,t)$ – розв'язок рівняння (1.6.1), то його графік у просторі змінних називають інтегральною поверхнею рівняння (1.6.1). Неявним рішенням для рівняння (1.6.1) є такий вираз:

$$u(x,t) = f(x - u(x,t)t), \qquad (1.6.3)$$

де $f(z)$ – довільна функція свого аргументу, зокрема $f(x) = u(x,0)$ – початковий профіль нелінійної ударної хвилі. Рис. 1.6.1 демонструє інтегральну поверхню для розв'язку рівняння (1.6.1) за початкової умови $u(x,0) = arctg(x)$. Модель наочно ілюструє явище «перекидання» фронту ударної хвилі.

В оптиці, наприклад, вивчається рівняння, яке описує поширення світлової хвилі в неоднорідному середовищі з показником заломлення $n(x, y, z)$:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = n(x, y, z), \qquad (1.6.4)$$

де $u = u(x, y, z)$.

Якщо у рівнянні (1.6.1) функція (1.6.3) залежить лінійно від частинних похідних шуканої функції (1.6.3), то його називають лінійним. Рівняння (1.6.1) з цієї точки зору є лінійним, а (1.6.2) – нелінійним.

Для того, щоб повністю описати той чи інший процес, необхідно, окрім самого рівняння в частинних похідних, задати початковий стан цього процесу (початкові умови) та режим роботи на границі області, у якій відбувається процес (граничні умови). Математично це пов’язано з нескінченною кількістю розв’язків диференціальних рівнянь. Тому, щоб виділити розв’язок, який описує реальний процес, необхідно задати додаткові умови. Такими додатковими умовами і є крайові умови – початкові та граничні. Відповідна задача називається крайовою задачею або задачею математичної фізики.

Широкий клас фізичних процесів описується лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Наприклад, лінійним диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку є рівняння Шредінгера, яке є основним рівнянням квантової механіки.

Розглянемо окремі характерні фізичні процеси, що зводяться до різних крайових задач для диференціальних рівнянь такого типу.

1. **Натягнена струна**, закріплена на кінцях, координати яких $x=0$ та $x=l$. Моделюючи струну будемо нехтувати її товщиною, вважаючи струну ниткою, а також силами, що виникають при згинанні, та силами ваги. Врахуємо лише сили натягу, які описуються законом Гука: натяг струни пропорційний її видовженню. За основну величину, що характеризує процес коливання струни виберемо функцію $u(x,t)$ зміщення точок струни від положення рівноваги.

   Розглянемо малі відхилення точок струни від положення рівноваги, при яких можна вважати, що рух усіх точок струни відбувається в одній площині і перпендикулярно до осі Ox. Рівняння малих коливань такої струни виглядає так:
   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \qquad (1.6.5)$$
   з крайовими умовами:
   $$u(0,t) = u(l,t) = 0, \qquad (1.6.6)$$
   та початковими умовами:
   $$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (1.6.7)$$
   де $\varphi(x)$ – відома функція, яка описує форму струни в початковий момент часу, a^2 – квадрат швидкості розповсюдження хвилі по струні.
2. **Рівняння теплопровідності** в однорідному стрижні $(0,l)$ полягає в розв’язку рівняння вигляду:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_t - a^2 u_{xx} = f(x,t), \qquad (1.6.8)$$

де $u(x,t)$ – функція, яка описує температуру в певній точці та певний момент часу, a^2 – коефіцієнт температуропровідності стрижня (прямо пропорційний теплопровідності та обернено пропорційний теплоємності та густині), $f(x,t)$ – відома функція, яка описує розподіл потужності джерел тепла.

Початкові умови можна записати у вигляді:

$$u(x,0) = \varphi(x), \qquad (1.6.9)$$

де $\varphi(x)$ – відома функція розподілу температур у початковий момент, а крайові умови можна задати в такому вигляді:

$$\left.\begin{aligned} b_0 u_x(0,t) + c_0 u(0,t) &= \mu(t) \\ b_l u_x(l,t) + c_l u(l,t) &= \nu(t) \end{aligned}\right\}. \qquad (1.6.10)$$

Рис. 1.6.2 представляє розподіл температур в однорідному стрижні залежно від координати та часу за умови розповсюдження тепла з точкового джерела.

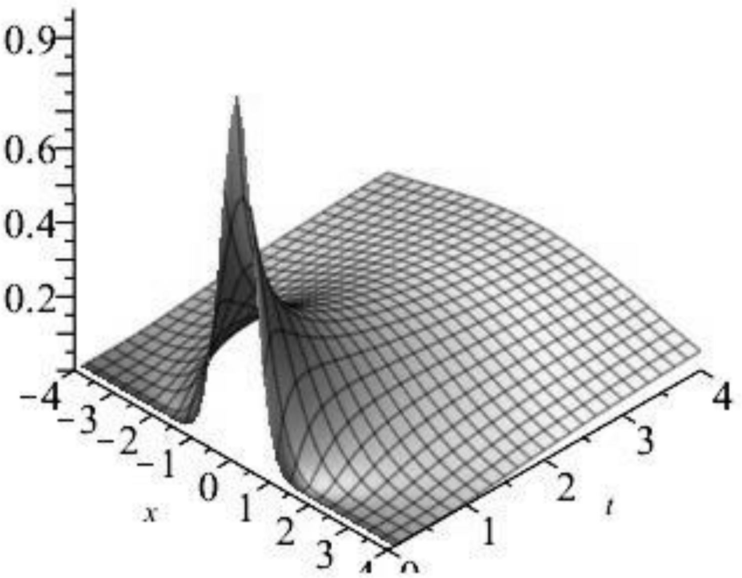

Рис. 1.6.2. Розподіл температур в однорідному стрижні

3. **Хвильове рівняння**, яке описує процес розповсюдження плоскої хвилі в одному напрямі, припустимо, уздовж осі Ox. Якщо v^2 – квадрат фазової швидкості хвилі, а $u(x,t)$ – функція зміщення точки з певною координатою у певний момент часу, то процес її поширення описується такою моделлю:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \qquad (1.6.11)$$

2 Рівняння Нав'є-Стокса, Нав'є та Ейлера

Гідродинаміка – розділ фізики суцільних середовищ, що вивчає рух ідеальних і реальних рідини і газу. Як і в інших розділах фізики суцільних середовищ передусім здійснюється перехід від реального середовища, що складається з великого числа окремих атомів або молекул (або дрібних частинок, як, наприклад, пісок), до моделі абстрактного суцільного середовища, для якого і записуються всі рівняння руху.

Ізотермічним, або адіабатичним коефіцієнтом стискання рідини, або газу, називають відносну зміну їх об'ємів, які зумовлені підвищенням тиску при відповідній умові (постійній температурі, або відсутності теплообміну):

$$\chi_{T,ad} = \frac{1}{V(P,T)}\left(\frac{\partial V(P,T)}{\partial P}\right).$$

Для газів ці коефіцієнти мають помітні значення, іншими словами гази помітно і легко змінюють свій об'єм під дією зовнішнього тиску, коротше кажучи – вони легко стискаються.

Для звичних рідин, однак, величини цих коефіцієнтів надзвичайно малі, що дозволяє застосовувати модель рідини, яка не стискається, тобто має нульовий коефіцієнт стискання (1.6.11). Звичайна рідина може вважатися такою, що практично не стискається, тобто за практично всіх зовнішніх тисках її густина (об'єм) залишаються майже незмінними.

Ідеальна рідина – уявна рідина, позбавлена в'язкості і теплопровідності та процесів, пов'язаних із ними. У ідеальній рідині відсутнє внутрішнє тертя, тобто немає дотичних напружень між двома сусідніми шарами, вона неперервна і не має структури. Для такої рідини нульовими є як коефіцієнт стискання (1.6.10) так і коефіцієнт в'язкості. Цим вимогам задовільно відповідають чимала кількість реальних рідин і навіть газів, утім тільки за умов що швидкості їх руху значно менші від швидкості розповсюдження звуку в цих рідинах, і якщо під час течії у потоках не виникає великих градієнтів швидкості.

Найбільш загальним рівнянням гідродинаміки є диференціальне рівняння Нав'є-Стокса, яке у векторному вигляді можна записати в такій формі:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}\right) - \eta\nabla^2\mathbf{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla,\mathbf{v}) + \nabla P = 0\,. \qquad (1.6.12)$$

Тут $\mathbf{v}(\mathbf{r},t)$ – векторне поле швидкостей рідини в кожній точці простору і кожний момент часу, ρ – густина рідини (маса елементарного об'єму), $P(\mathbf{r},t)$ – поле тисків тиск, η – коефіцієнт динамічної в'язкості, ξ – інший коефіцієнт в'язкості рідини, ∇ – оператор набла (Гамільтона).

Це рівняння виникає при застосуванні другого закону Ньютона до руху рідини, отже, як і цей закон, є диференціальними рівняннями в частинних похідних другого порядку. Рівняння (1.6.12) звичайно розглядається в системі з так званим рівнянням безперервності, яке відображає закон збереження енергії під час руху рідини:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+div(\rho\mathbf{v})=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\nabla,(\rho\mathbf{v}))=0. \qquad (1.6.13)$$

Для рідин, які не стискаються (тобто $\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$), з рівняння (1.6.13) виникає:

$$(\nabla,\rho\mathbf{v})=\rho(\nabla,\mathbf{v})=0, \qquad (1.6.14)$$

і тоді доданок:

$$\left(\zeta+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla,\mathbf{v})=0 \qquad (1.6.15)$$

обертається в нуль.

Внаслідок цього рівняння Нав'є-Стокса (1.6.12) спрощується до вигляду рівняння Нав'є, яке описує течію рідини, котра практично не стискається, але все ж має помітні сили в'язкого тертя:

$$\rho\left(\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v}\right)-\eta\nabla^2\mathbf{v}+\nabla P=0. \qquad (1.6.18)$$

З рівняння (1.6.18) можна зробити корисний попередній висновок, застосовуючи лише міркування теорії розмірностей. Стаціонарний рух рідини по каналу, припустимо по кровоносній судині, визначається фактично лише її кінематичною в'язкістю $\mu=\frac{\eta}{\rho}$ з розмірністю $\left(\frac{L^2}{T}\right)$, швидкістю елементу рідини v з розмірністю $\left(\frac{L}{T}\right)$, та характерними розміром каналу $d\sim\sqrt{S}$ з розмірністю (L). З цих величин можна скласти лише один безрозмірний параметр, який має назву числа Рейнольдса і грає важливу роль в оцінці режимів руху рідини:

$$\mathrm{Re}=\frac{\rho v d}{\eta}. \qquad (1.6.19)$$

Можна показати, що число Рейнольдса характеризує відношення сили, яка виникає за рахунок конвективного прискорення – нелінійний доданок $(\rho(\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v})$ у рівняннях (1.6.12) та (1.6.13), до сили в'язкого тертя – доданку $(\eta\nabla^2\mathbf{v})$. Конвективним називається прискорення, що виникає за рахунок зміни площі перерізу каналу: у вужчих місцях (дифузорах) швидкість потоку збільшується, у ширших (конфузорах), навпаки, зменшується. Тиск рідини поводиться навпаки. Цей ефект отримав назву ефекту Бернуллі (рис. 1.6.3). Так, наприклад, для стаціонарного руху крові по артерії число Рейнольдса сягає 1500.

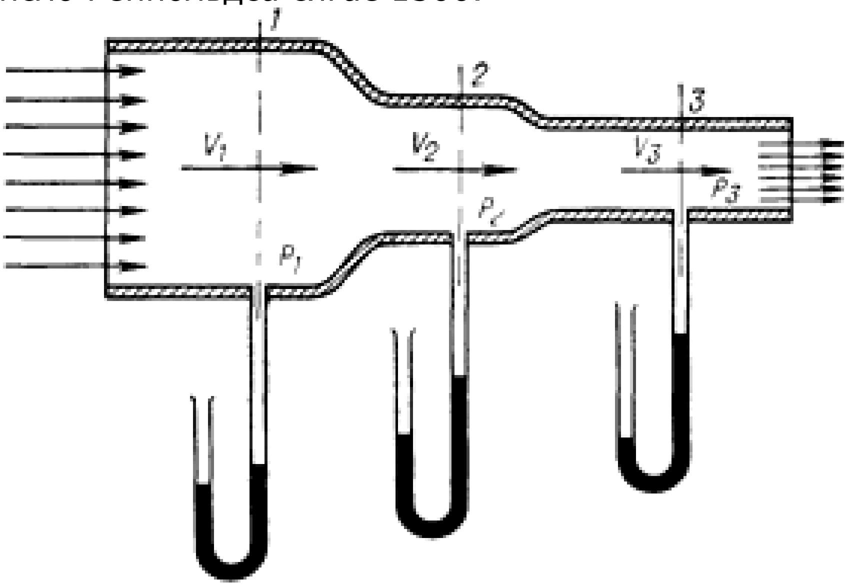

Рис. 1.6.3. Ефект Бернуллі

Отже, за великих чисел Рейнольдса $(\mathrm{Re} >> 1)$ для потоків рідин можна нехтувати силами в'язкого тертя порівняно з силами, зумовленими конвективним прискоренням. Це дозволяє вважати рідину ідеальною, а рівняння Нав'є спростити до рівняння Ейлера для ідеальної рідини без тертя:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}\right) + \nabla P = 0. \qquad (1.6.20)$$

Нелінійність навіть цього, найпростішого з рівнянь, розглянутих вище, викликана фактором, який описує сили за рахунок конвективного прискорення і дається виразом:

$$(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v} = \frac{\nabla(\mathbf{v}, \mathbf{v})}{2} - [v \times rot(\mathbf{v})], \qquad (1.6.21)$$

який є вочевидь квадратичним за швидкістю.

Для випадку стаціонарного, одновимірного потоку рідини чи газу рівняння Ейлера набуває такого вигляду:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x}. \qquad (1.6.22)$$

Якщо проінтегрувати обидві частини рівняння (1.6.22), то отримуємо відоме рівняння Бернуллі (закон Бернуллі) для течії ідеальної рідини, яка не стискається:

$$\frac{\rho v^2}{2} + P = const. \qquad (1.6.23)$$

Ефект Бернуллі (рис. 1.6.3) легко пояснюється, виходячи з рівняння (1.6.22).

Лекція 7

«Якщо з якихось причин певний негативний елемент середовища відсутній або не впливає суттєво на ситуацію, він буде замінений іншою, не менш паскудною гидотою»
Принцип Лє-Шательє

1. Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів.
2. Поняття про солітони, їх типи і властивості.

1 Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів

Із нелінійними рівняннями математичного моделювання уперше в цьому курсі ми познайомилися під час розгляду рівнянь Ван-дер-Поля (лекція 2, п. 1), Хопфа-Рімана (лекція 6, п. 1) та Нав'є-Стокса (лекція 6, п. 2).

Утім, нелінійні диференціальні рівняння в математичній фізиці з’являються вже під час вивчення коливань простого математичного маятнику. Якщо не обмежуватися малими коливання, коли виконується умова $\sin(\phi) \approx \phi$, то диференціальне рівняння коливань для звичайного математичного маятнику є істотно нелінійним:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin(\phi) = 0. \qquad (1.7.1)$$

Рівняння (1.7.1) суттєво нелінійне: якщо ми навіть знайдемо якісь два його окремі рішення, припустимо $\phi_1(t), \phi_2(t)$, то жодна їх лінійна комбінація не буде рішенням рівняння (1.7.1), як це повинно бути для лінійного рівняння:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0. \qquad (1.7.2)$$

Хоча б через те, що синус – це нелінійна функція і тому:

$$\sin(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \neq c_1 \sin(\phi_1) + c_2 \sin(\phi_2). \qquad (1.7.3)$$

Як було вже зазначено вище, зазвичай нелінійне рівняння (1.7.1), у якості першого наближення, апроксимують лінійним рівнянням (1.7.2) для малих коливань, заміняючи синус його аргументом $\sin(\phi) \approx \phi$. Така ситуація є доволі типовою: більшість реальних систем та процесів описуються саме нелінійними моделями, тоді як лінійні моделі є найчастіше лише наближеннями до складніших нелінійних.

Рішенням нелінійного рівняння (1.7.1) є функція:

$$\phi(t) = \arcsin\left[\sin\left(\frac{\phi_0}{2}\right) \cdot sn(\omega t)\right], \qquad (1.7.4)$$