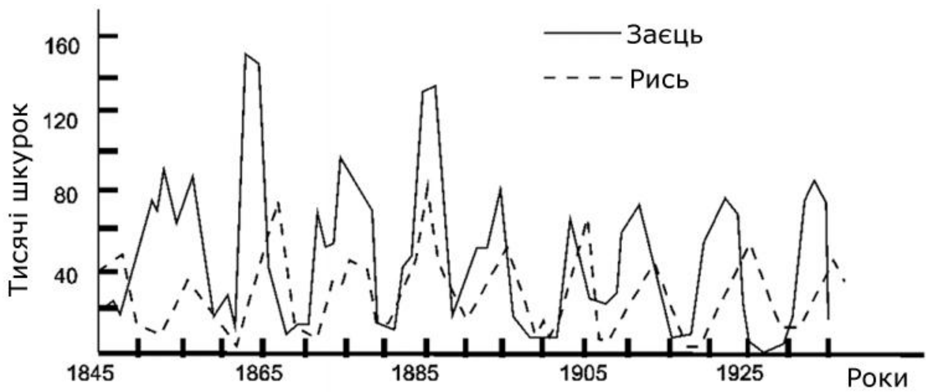

Рис. 1.4.5. Коливання чисельності популяцій рисі та зайців

Лекція 5

«На захист власної теорії
завжди можна навести достатню
кількість досліджень»
Закон наукових розвідок Мерфі

1. Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь.
2. Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення.

1 Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь

Задача Абеля історично була першою задачею, яка привела до розгляду та розв'язання інтегральних рівнянь. Задачу можна сформулювати таким чином: нехай матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається у вертикальній площині (ξ,η) за деякою кривою (рис. 1.5.1). Необхідно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, що почала свій рух без початкової швидкості в точці кривою з ординатою x, досягла осі $O\xi$, тобто свого найнижчого положення, за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція початкового положення точки.

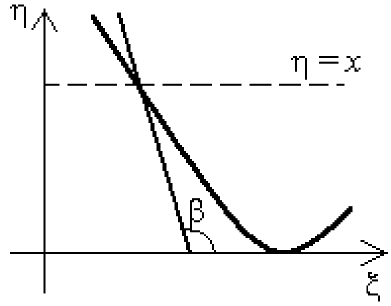

Рис. 1.5.1. Рух матеріальної точки в задачі Абеля

Абсолютна величина швидкості точки, що рухається, обчислюється за формулою:

$$v = \sqrt{2g(x-\eta)}\,. \qquad (1.5.1)$$

Нехай $\beta = \beta(\eta)$ – кут нахилу дотичної до осі $O\xi$ (рис. 1.5.1). Тоді будемо мати для вертикальної компоненти швидкості руху точки:

$$\frac{d\eta}{dt} = -\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta\,. \qquad (1.5.2)$$

Звідси:

$$dt = -\frac{d\eta}{\sqrt{2g(x-\eta)}\sin\beta}\,. \qquad (1.5.3)$$

Проінтегруємо останній вираз від 0 до x і покладемо $\frac{1}{\sin\beta} = \varphi(\eta)$. Тоді з (1.5.3) одержимо такий вираз:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta = -\sqrt{2g}\,f_1(x)\,. \qquad (1.5.4)$$

Нехай $f(x) = -\sqrt{2g}\,f_1(x)$. Тоді (1.5.4) запишеться в такому вигляді:

$$\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}\,d\eta = f(x)\,, \qquad (1.5.5)$$

де $\varphi(\eta)$– невідома, а $f(x)$– відома функції.

Рівняння виду (1.5.5) називають інтегральним рівнянням Абеля. Воно є частинним випадком лінійного інтегрального рівняння Вольтерра 1-го роду.

Якщо рівняння Абеля (1.5.5) може бути вирішено відносно невідомої функції $\varphi(\eta)$, то далі, виходячи з того, що $\frac{1}{\sin\beta} = \varphi(\eta)$ маємо, що $\eta = \Phi(\beta)$. Користуючись зв'язком між тангенсом кута β та похідною, маємо:

$$d\xi = \frac{d\eta}{\mathrm{tg}\beta} = \frac{\Phi'(\beta)d\beta}{\mathrm{tg}\beta},\ \ \xi = \int \frac{\Phi'(\beta)}{\mathrm{tg}\beta}\,d\beta = \Phi_1(\beta)\,, \qquad (1.5.6)$$

де штрихами позначено відповідні похідні від функції $\Phi(\beta)$ по куту β. Рівняння (1.5.6) є фактично параметричним завданням шуканої кривої:

$$\xi = \Phi_1(\beta),\ \ \eta = \Phi(\beta)\,. \qquad (1.5.7)$$

Зокрема, якщо функція $f(x) = \tau = \mathrm{const}$, тобто матеріальна точка повинна досягти свого найнижчого положення за один і той самий час, незалежно від початкового положення, то такою кривою є циклоїда (рис. 1.5.2, суцільна крива). Такі задачі ще називаються задачами про таутохрону, або, як варіант, задачами про брахістохрону, тобто таку криву, спуск матеріальної точки уздовж якої потребує мінімального часу. Цю задачу вперше поставив і вирішив Бернуллі.

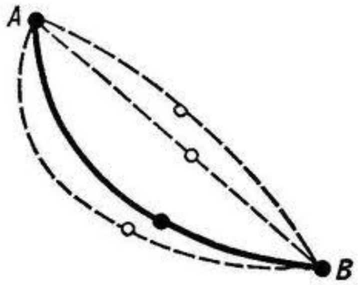

Рис. 1.5.2. Циклоїда

Рівняння Абеля є одним з інтегральних рівнянь, до яких зводиться постановка конкретної задачі механіки чи фізики, якщо при цьому не використовувати диференціальні рівняння.

Моделювання розподілу яскравості світла. Розглянемо центровану оптичну систему P, яка проектує на екран (вісь Os у просторі зображень) зображення деякого відрізку (вісь Ot у просторі предметів рис. 1.5.3).

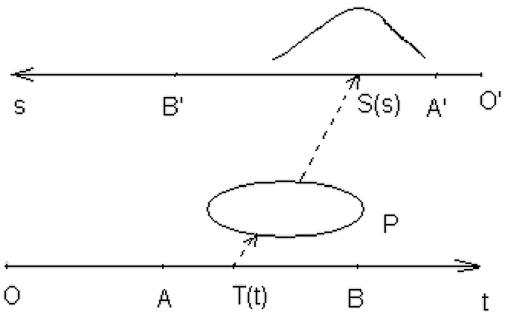

Рис. 1.5.3. Схема проектування центрованою оптичною системою зображення відрізку

Згідно із законами геометричної оптики, зображення об'єкта подібно до самого об'єкта, таким чином відрізок AB відображується у відрізок $A'B'$, при цьому довжина цих двох відрізків (оригіналу та зображення) в загальному випадку різна.

У заданій системі лінз центрованого оптичного приладу P оберемо масштаби на вісях $Ot, O's$ так, щоб для двох взаємно відповідних точок $T(t)$ і $S(s)$ оригіналу та зображення мала місце рівність $s = t$ (рис. 1.5.3).

Точка $T(t)$ об'єкта AB, що світиться, впливає на освітлення всього зображення $A'B'$, причому найбільша яскравість освітлення в точці $S(s)$. Отже, інтенсивність освітлення J є функцією від s та t, тобто $J = J(s,t)$.

Нехай $\eta(t)$ – лінійна густина яскравості об'єкта. Тоді величина добутку $(\eta(t) \cdot J(s,t) \cdot \Delta t)$ визначає наближене значення яскравості зображення в точці $S(s)$, яке породжується елементом об'єкта Δt, який світиться. Величина $J(s,t)$ визначається властивостями оптичного приладу P.

Лінійну густину яскравості зображення в точці $S(s)$, згідно з принципом суперпозиції, можна наближено представити у вигляді такого інтегральної суми:

$$\varphi(s) \approx \sum_k \eta(t_k) J(s,t_k)\Delta t_k. \qquad (1.5.8)$$

Якщо довжина відрізка AB дорівнює l, то, переходячи від суми до інтеграла, отримаємо для функції яскравості зображення відрізка такий результат:

$$\varphi(s) = \int_0^l J(s,t)\eta(t)dt. \qquad (1.5.9)$$

Звичайно, функція $J(s,t)$ є відомою функцією, яка визначається властивостями оптичного приладу. Якщо густина яскравості зображення $\varphi(s)$ відома, а потрібно знайти розподіл яскравості об'єкта $\eta(t)$, яке надає задану яскравість зображення, тоді $\varphi(s)$ – задана функція, $\eta(t)$ – шукана. Отже (1.5.9) – інтегральне рівняння Фредгольма першого роду.

Задача Коші для звичайного лінійного диференційного рівняння n-го порядку з неперервними коефіцієнтами може бути зведена до інтегрального рівняння Вольтерра 2-го роду. Покажемо це на прикладі диференційного рівняння 2-го порядку:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1(t)\frac{dx}{dt} + a_2(t)x(t) = F(t), \qquad (1.5.10)$$

$$x(0) = C_0, \quad x'(0) = C_1. \qquad (1.5.11)$$

Нехай:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi(t). \qquad (1.5.12)$$

Враховуючи початкові умови та формулу:

$$\underbrace{\int_0^t dt \int_0^t dt \ldots \int_0^t}_{n} f(t)dt = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} f(s)ds, \qquad (1.5.13)$$

послідовно знаходимо:

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \varphi(s)ds + C_1, \qquad (1.5.14)$$

$$x(t) = \int_0^t (t-s)\varphi(s)ds + C_1 t + C_0. \qquad (1.5.15)$$

На підставі (1.5.14), (1.5.15) рівняння (1.5.10) можна записати у такому вигляді:

$$\begin{gathered}\varphi(t)+\int_0^t[a_1(t)+a_2(t)(t-s)]\varphi(s)ds= \\ =F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t)\end{gathered}. \quad (1.5.16)$$

Покладемо:

$$\begin{gathered}\mathrm{K}(t,s)=-[a_1(t)+a_2(t)(t-s)],\ f(t)= \\ =F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t)\end{gathered}. \quad (1.5.17)$$

Тоді (1.5.15) набуває такого вигляду:

$$\varphi(t)=\int_0^t \mathrm{K}(t,s)\varphi(s)ds+f(t). \quad (1.5.18)$$

Таким чином задача Коші (1.5.10), (1.5.11) звелась до розв'язання інтегрального рівняння (1.5.18). Знайдену функцію $\varphi(t)$ підставимо в співвідношення (1.5.15) і отримаємо розв'язок $x(t)$ задачі (1.5.10), (1.5.11).

Існування єдиного розв'язку рівняння (1.5.18) випливає з існування єдиного розв'язку задачі Коші (1.5.10), (1.5.11) для лінійного диференційного рівняння з неперервними коефіцієнтами в околі точки $t=0$.

Однією з найбільш комп'ютеризованих галузей медичної діагностики нині є комп'ютерна томографія, яка історично виникла саме з рентгенівської томографії. Вона застосовує математичний апарат так званих інтегральних перетворень Радона. При цьому комп'ютерна розшифровка томограм із математичної точки зору зводиться саме до вирішення деякого інтегрального рівняння (рис. 1.5.4).

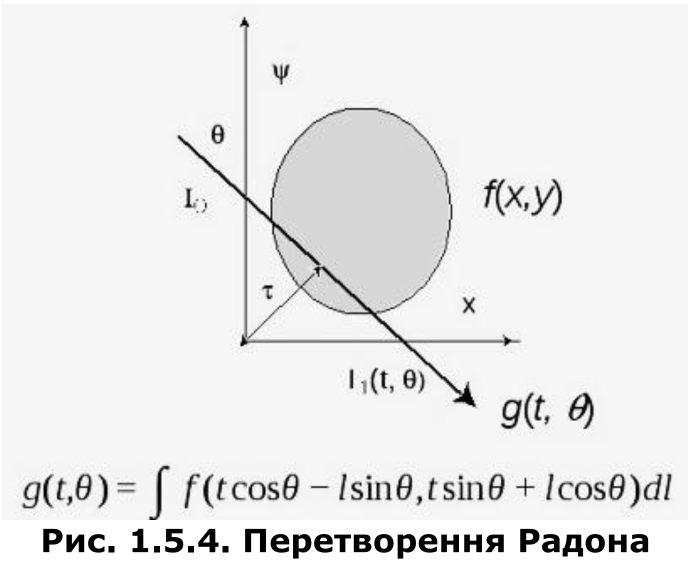

Рис. 1.5.4. Перетворення Радона

Більш складними є моделі процесів, які використовують інтегрально-диференціальні рівняння, наприклад моделі кінетичних процесів з урахуванням розсіяння частинок. Рішення таких рівнянь отримають або за рахунок суттєвих спрощень отриманих рівнянь, або суто числовими методами.

2 Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад:

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt + f(x),\ \ x\in[a,b], \tag{1.5.19}$$

або

$$\varphi(x) = \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x), \tag{1.5.20}$$

де $K(x,t),\ f(x)$ – задані функції, λ – комплексний параметр, $\varphi(x)$ – шуканий розв'язок. Функції $K(x,t)$ та $f(x)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння відповідно:

Інтегральні рівняння класифікуються таким чином:

1. Якщо шукана функція $\varphi(t)$ міститься тільки під знаком інтеграла, то рівняння називається інтегральним рівнянням *першого роду*. Такими є рівняння вигляду:

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \tag{1.5.21}$$

або

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x). \tag{1.5.22}$$

Рівняння (1.5.21) і (1.5.22), в яких шукана функція міститься також і поза інтегралом, називаються інтегральними рівняннями *другого роду*.

2. Якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається рівнянням *Фредгольма*, як у випадку (1.5.21) і (1.5.22). Якщо ж межі інтегрування змінні, як у (1.5.16) і (1.5.18), то інтегральне рівняння називається рівнянням *Вольтерра*.

Формально рівняння Вольтерра можна розглядати як частинний випадок рівняння Фредгольма, поклавши, наприклад, у (1.5.22) $K(x,t)=0$ при $t>x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерра і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь, істотно різні. Тому рівняння Вольтерра виділяють в особливий тип рівнянь;

3. Рівняння (1.5.21), (1.5.22) називаються однорідними, якщо $f(x)\equiv 0$. У супротивному випадку ці рівняння називаються неоднорідними. Розв'язком інтегрального рівняння називається функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння перетворює його в тотожність по x.

Одними з перших відомих інтегральних рівнянь були так звані парні інтегральні рівняння. Це пари рівнянь-рівностей, що визначають відповідні типи нескінчених інтегральних перетворень, як наприклад, відоме інтегральне перетворення Фур'є:

$$\left.\begin{aligned} Y(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\omega t} y(t)dt \\ y(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\omega t} Y(\omega)d\omega \end{aligned}\right\}. \qquad (1.5.23)$$

Парними ці рівняння називаються за такої причини: якщо в одній із таких рівностей під знаком інтеграла множник ядра інтегрального перетворення вважати невідомим (саме в цьому випадку ці рівності є інтегральними рівняннями), то інша парна до неї рівність є формулою, за якою визначається шуканий розв’язок рівняння. Зокрема до таких парних рівнянь відносяться також згадані вище пряме та зворотне інтегральні перетворення Радона, які складають математичне підґрунтя комп’ютерної томографії взагалі, незалежно від того які фізичні принципи покладено в її основу: рентгенівська томографія, магніто-резонансна томографія, когерентна оптична томографія, імпедансна томографія тощо.

Варто зауважити, що для інтегральних рівнянь, як і для диференціальних, не завжди вдається отримати точне аналітичне рішення. Вибір методу рішення залежить від виду рівняння, як от, наприклад, у методі перетворень Лапласа, методі послідовних наближень, методі резольвент або в методі зведення до алгебраїчних рівнянь тощо.

Лекція 6

«Під будь-якою безоднею
може розкритися ще одна,
більш глибока»
Закон безкінечного падіння Емерсона

1. Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних.
2. Рівняння Нав’є-Стокса, Нав’є та Ейлера.

1 Математичні моделі на основі диференціальних рівнянь у частинних похідних

Диференціальним рівнянням у частинних похідних називається рівняння, яке пов’язує незалежні змінні, їх функцію і частинні похідні від цієї функції. Порядок старшої частинної похідної, яка входить у рівняння, називають порядком рівняння. Багато фізичних явищ моделюються рівняннями з частинними похідними першого порядку. Наприклад, у газовій динаміці важливу роль відіграє відоме рівняння Хопфа-Рімана: