

авіаційні двигуни спричинювали настільки сильні резонансні коливання елементів літака, що він повністю руйнувався в повітрі.

Складніші коливальні системи часто мають не одну, а декілька резонансних частот (рис. 1.3.9) у різних діапазонах. На рисунку пік на 50 Гц зумовлений частотою змінного струму у промисловій електричній мережі.

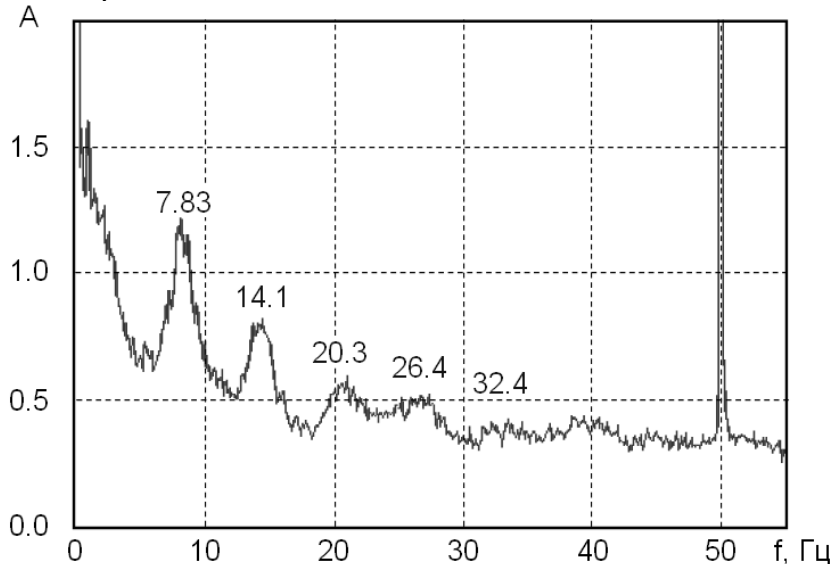


Рис. 1.3.9. Спектр електромагнітних коливань наднизької частоти з резонансами Шумана

Лекція 4

*«Людина схильна помилятися,
і деякі користуються цією властивістю
часто і навіть із задоволенням»
Закон Мерфі*

1. Математичні моделі на основі системи звичайних диференціальних рівнянь.
2. Планарні системи та фазові портрети.

1 Математичні моделі на основі системи звичайних диференціальних рівнянь

Сукупність співвідношень такого вигляду:

$$\left. \begin{aligned}
 &F_1(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \\
 &F_2(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0 \\
 &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
 &F_n(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) = 0
 \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.1)$$

де штрихами позначені перші похідні по незалежній змінній (x) називається системою звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Зверніть увагу, система (1.4.1) містить лише перші похідні від невідомих функцій однієї незалежної змінної.

Якщо, як часто буває, систему (1.4.1) можна вирішити відносно перших похідних невідомих (шуканих) функцій у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} y'_1 &= f_1(x, y_1, \dots, y_n) \\ y'_2 &= f_2(x, y_1, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y'_n &= f_n(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.2)$$

таку систему диференціальних рівнянь називають нормальною. Сукупність чисел $(x_0, y_{10}, \dots, y_{n0})$, де $y_{i0} = y_i(x_0)$, $i = 1, 2, \dots, n$ називають початковими даними (початковими умовами) системи, а впорядковану сукупність функцій $(y_1(x), \dots, y_n(x))$ – розв'язком системи.

Нормальній системі (1.4.2) можна дати просту механічну інтерпретацію. Запишемо (1.4.2) у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \dot{x}_2 &= f_2(t, x_1, \dots, x_n) \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n &= f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.3)$$

де t – час, а (x_1, \dots, x_n) – координати точки у n -вимірному фазовому просторі. Тоді розв'язок системи (1.4.3) у вигляді сукупності $(x_1(t), \dots, x_n(t))$ задає закон руху точки у фазовому просторі, а крива, яка задається у фазовому просторі таким законом руху – траєкторією руху. Ліві частини системи (1.4.3) є компонентами вектору швидкості руху точки в зазначеному фазовому просторі.

Якщо праві частини системи (1.4.3) не залежать від часу, така система описує усталений рух і є стаціонарною системою.

Якщо всі праві частини системи (1.4.3) обертаються в нуль у деякій точці фазового простору для всіх моментів часу, то така точка фазового простору (x_1^0, \dots, x_n^0) називається точкою спокою для системи (1.4.3). Система, стан якої зображується вектором (x_1^0, \dots, x_n^0) , перебуває в стані спокою.

Системи диференціальних рівнянь є математичними моделями різноманітних систем та процесів. Розглянемо деякі прості приклади. Визначимо траєкторію руху гарматного снаряду, випущеного під кутом α до горизонту з початковою швидкістю v_0 , якщо вважати опір повітря пропорційним швидкості снаряду. За початок координат візьмемо точку вильоту снаряду (рис. 1.4.1).

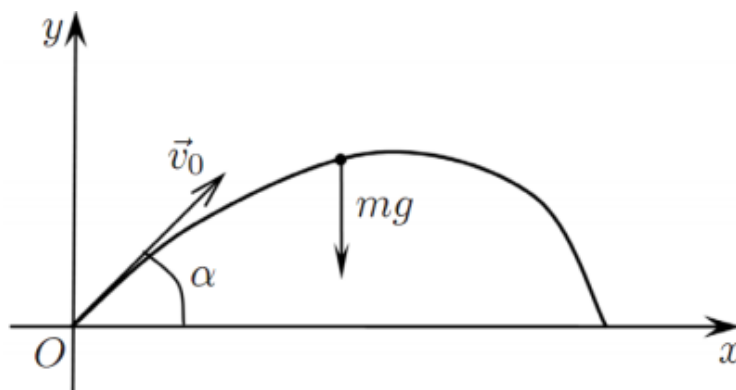


Рис. 1.4.1. Рух гарматного снаряду

Силами, які діють на снаряд є сила ваги $P = mg$ спрямована вертикально вниз (рис. 1.4.1), та сила опору повітря, проекції якої на осі координат можна записати у вигляді $mk\dot{x}$ та $mk\dot{y}$. Рівняння руху снаряду можемо записати системою з двох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= -mk\dot{x} \\ m\ddot{y} &= -mg - mk\dot{y} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.4)$$

Або після скорочення на масу в простішому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x} &= -k\dot{x} \\ \ddot{y} &= -g - k\dot{y} \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.5)$$

Якщо знехтувати силою опору повітря ($k \rightarrow 0$), то розв'язком системи (1.4.5) є така сукупність функцій часу:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha) + C_1, \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\alpha) + C_2. \quad (1.4.6)$$

Враховуючи початкові умови $x(0) = 0, y(0) = 0$, матимемо, що $C_1 = C_2 = 0$. В такому випадку послідовність (1.4.6) спрощується до вигляду:

$$x(t) = v_0 t \cos(\alpha), \quad y(t) = -\frac{gt^2}{2} + v_0 t \sin(\alpha). \quad (1.4.7)$$

Виключаючи час з (1.4.7) отримуємо траєкторію руху снаряду, це парабола:

$$y = -\frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\alpha)} + xt \sin(\alpha). \quad (1.4.8)$$

Диференціальне рівняння n -го порядку:

$$y^{(n)} = f(x, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (1.4.9)$$

завжди можна звести до нормальної системи з n -диференціальних рівнянь першого порядку і навпаки. Для цього позначимо:

$$y = y_1, \quad y' = y_2, \dots, y^{(n-1)} = y_n. \quad (1.4.10)$$

Тоді рівняння (1.4.9) стає еквівалентним такій нормальній системі:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\dots\dots\dots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= f(x, y_1, \dots, y_n) \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.11)$$

Зворотне перетворення здійснюється шляхом $(n-1)$ -кратного диференціювання одного з рівнянь системи, наприклад першого, послідовними замінами в (1.4.10) у зворотному порядку.

2 Планарні системи та фазові портрети

Розглянемо автономну двовимірну систему диференціальних рівнянь у наступній формі (точками згори традиційно позначені похідні по часу від шуканих функцій):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= a_{11}x + a_{12}y \\ \dot{y} &= a_{21}x + a_{22}y \end{aligned} \right\}', \quad (1.4.12)$$

або те саме в матрично-векторній формі:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (1.4.13)$$

де $\mathbf{x} = (x, y)$, $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Визначення 1. Будь-яке рішення систем (1.4.12), (1.4.13), припустимо, у вигляді $\varphi(t) = (x(t), y(t))$, можна представити як криву лінію на фазовій площині (x, y) . Такі криві мають назву траєкторії або орбіти.

Теорема існування та унікальності рішень гарантує, що траєкторії не перетинаються між собою, інакше у точці перетинання траєкторій існувало б одночасно мінімум два рішення системи. Позаяк система (1.4.12), або (1.4.13), має безліч рішень, існує відповідно також безліч можливих траєкторій, які суцільно заповнюють фазову площину. Однак якісна поведінка системи може бути зрозумілою з аналізу лише декількох траєкторій, кожна з яких відповідає своїм початковим умовам.

Визначення 2. Фазовим портретом системи диференціальних рівнянь (1.4.12) і (1.4.13) є двовимірна фігура, яка показує якісну поведінку системи і визначає як функції x та y залежать від часу t . За допомогою належної кількості зображених траєкторій фазовий портрет повинен показати як виглядає і де закінчується кожна траєкторія для будь-яких початкових умов.

Визначення 3. Поле напрямів, або векторне поле, задає градієнти $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ і вектори напрямків траєкторій на фазовій площині.

Нахил траєкторій визначається за «правилом ланцюга»: $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$.

Отже, напрям векторного поля задається відношенням похідних від невідомих функцій в кожній точці фазової площини.

Визначення 4. Контурні лінії, уздовж яких виконується умова $\frac{dy}{dx} = const$ називають ізоклінами системи (1.4.12), (1.4.13).

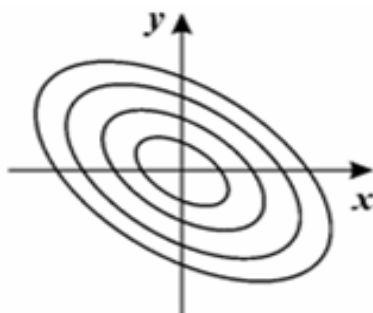
Ізокліни допомагають орієнтуватися в поведінці функції: зокрема ізокліна $\dot{x} = 0$ показує напрям, у якому функція $x(t)$ лишається незмінною.

Система (1.4.13) є простою канонічною, якщо її матриця не вироджена: $\det \mathbf{A} \neq 0$. Така система має єдину критичну точку спокою (точку рівноваги) і вона розташована на початку координат: $x = y = 0$. Тип фазового портрету системи визначається власними числами матриці \mathbf{A} . Вони знаходяться як корні характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0. \quad (1.4.14)$$

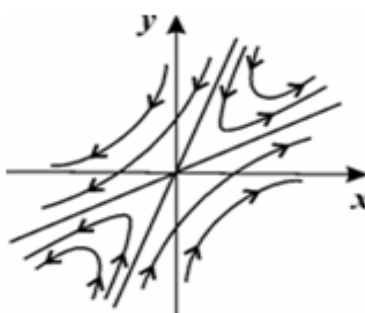
Обидва кореня квадратного рівняння (1.4.14) можуть бути дійсними (з різними, або однаковими знаками, або навіть співпадати), або комплексними спряженими (з різними знаками дійсних частин). Типи фазових портретів та умови їх спостереження для різних можливих випадків представлено на рис. 1.4.2.

λ_1, λ_2 – комплексні
і $\text{Re}(\lambda_i) = 0$



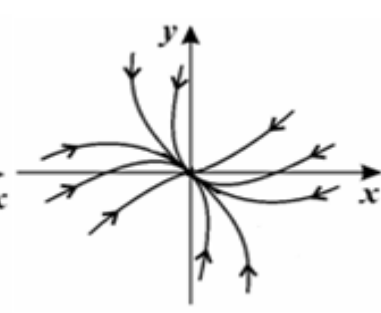
Центр

λ_1, λ_2 – дійсні і
різного знаку



Сідло

λ_1, λ_2 – дійсні і
різного негативні



Стійкий вузол

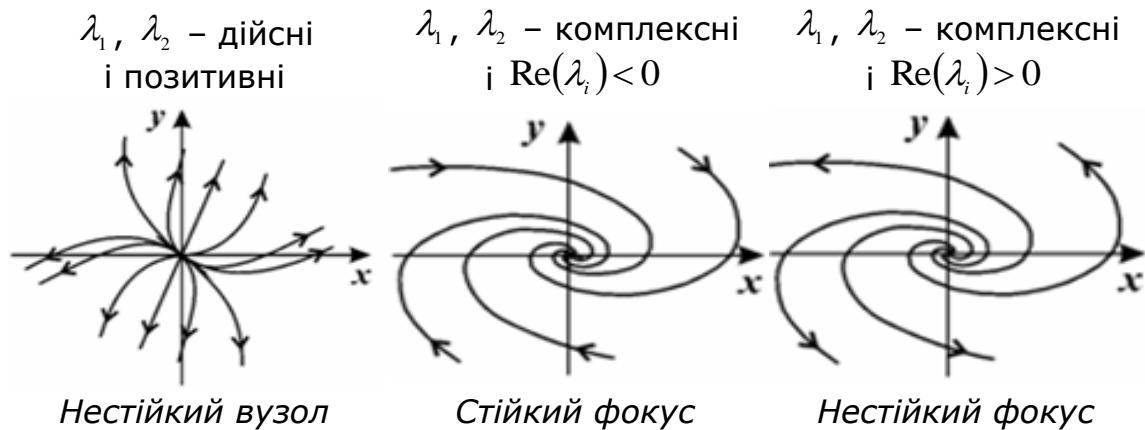
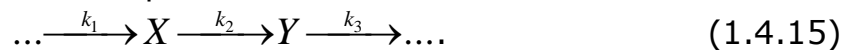


Рис. 1.4.2. Типи фазових портретів та умови їх спостереження

Розглянемо приклад фазового портрету системи, яка описує процес лінійних хімічних реакцій. Припустимо, що хімічна речовина X поступає ззовні з незмінною швидкістю і перетворюється в речовину Y зі швидкістю пропорційною концентрації речовини X , а далі зі швидкістю пропорційною концентрації речовини Y виводиться з реактора. Схема реакції має такий вигляд:



Її можна описати такою простою канонічною системою диференціальних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= k_1 - k_2x \\ \dot{y} &= k_2x - k_3y \end{aligned} \right\} \quad (1.4.16)$$

Розглянемо фазовий портрет системи. Поділимо друге рівняння системи (1.4.16) на перше, тож матимемо:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k_2x - k_3y}{k_1 - k_2x} \quad (1.4.17)$$

Побудуємо вертикальну ізокліну, виходячи з умов $\frac{dy}{dx} = \infty \rightarrow x = \frac{k_1}{k_2}$. Горизонтальну ізокліну отримаємо з умов $\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow y = \frac{k_2}{k_3}x$.

Особлива точка, тобто стаціонарний стан, лежить на перетині двох цих ізоклін. Вочевидь, це точка з координатами $x_0 = \frac{k_1}{k_2}, y_0 = \frac{k_1}{k_3}$. Характер стабільності особливої точки з'ясуємо з аналізу характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 + (k_2 + k_3)\lambda + k_2k_3 = 0 \quad (1.4.18)$$

Корені рівняння (1.4.18) мають такий вигляд:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(k_2 + k_3) \pm \sqrt{(k_2 + k_3)^2 - 4k_2k_3}}{2}. \quad (1.4.19)$$

Оскільки дискримінант квадратичного рівняння (1.4.18) $D = (k_2 + k_3)^2 - 4k_2k_3 = (k_2 - k_3)^2 > 0$ позитивний завжди, то обидва корені рівняння (1.4.19) є дійсними, причому вони є від'ємними, як це видно з (1.4.19). Отже, фазовий портрет системи (1.4.16) має такий вигляд як показано на рис. 1.4.3 і являє собою стійкий вузол. На рисунку показані також обидві знайдені вище ізокліни: горизонтальна та вертикальна.

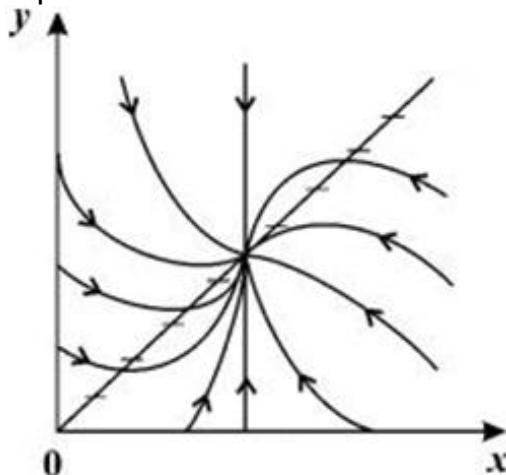


Рис. 1.4.3. Фазовий портрет системи (1.4.16), яка описує процес лінійних хімічних реакцій

При цьому концентрація речовини X прямує до стаціонарного значення $\left(x = \frac{k_1}{k_2} = const \right)$ причому монотонно, тоді як концентрація речовини Y може проходити через екстремум. Коливальні режими в такій системі неможливі, про що свідчить не замкненість фазових траєкторій.

Розглянемо ще просту систему, яка складається з двох компонентів: хижаків та об'єкта їх полювання: наприклад, акули та сардини, леви та антилопи тощо. Дуже просту модель такої системи запропонував свого часу Вольтерра, і вона відома як модель Лотка-Вольтерра.

Розглянемо диференціальну модель такої системи у вигляді системи з двох рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= x(\alpha - \beta y) \\ \dot{y} &= y(\gamma x - \delta) \end{aligned} \right\}, \quad (1.4.20)$$

де x, y – чисельність популяцій жертви та хижака відповідно, а коефіцієнти $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – всі є позитивними константами. Зокрема, величина αx описує зростання популяції жертв за рахунок народження та за відсутності хижаків, величини $(-\beta xy)$, (γxy) описують

зміни популяцій за рахунок взаємодії (тобто зустрічей поміж хижаками та жертвами), величина $(-\delta y)$ описує зміну популяції хижаків за рахунок смертності внаслідок відсутності жертв.

Критичні точки фазової діаграми знайдемо з рішення рівнянь $\dot{y} = \dot{x} = 0$. З правих частин (1.4.20) легко знаходимо їх координати на фазовій площині:

$$\left. \begin{aligned} x_{01} &= \frac{\alpha}{\beta}, y_{01} = \frac{\delta}{\gamma} \\ x_{02} &= 0, y_{02} = 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.4.21)$$

Отже, система (1.4.20) має дві критичні точки. Фазовий портрет системи показаний на рис. 1.4.4 за такого набору коефіцієнтів: $\alpha = \beta = 1, \delta = \gamma = 0.3$.

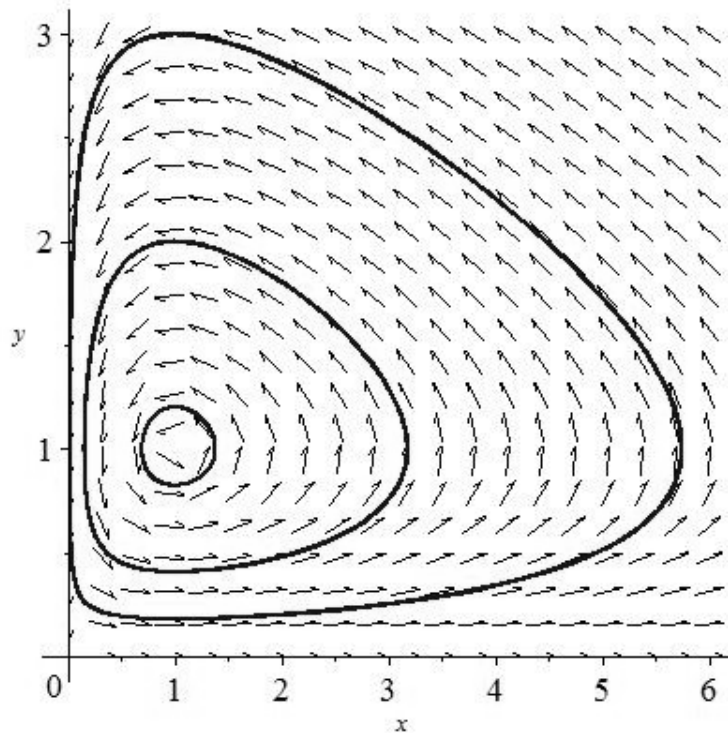


Рис. 1.4.4. Фазовий портрет системи (1.4.20), яка описує процес взаємодії хижаків та об'єктів їх полювання

Перша критична точка вочевидь є центром, навколо якого формуються замкнені траєкторії, які вказують на регулярні коливання чисельності обох популяцій навколо першої критичної точки (1.4.21). Відмінність форми траєкторії від еліптичної вказує на суттєву негармонічність таких коливань. Зроблені вище висновки засвідчуються як рішенням системи (1.4.20), так і спостереженнями за взаємодіючими парами популяцій у природі. Зокрема на рис. 1.4.5 показано коливання чисельності популяцій рисі та зайців на півночі Канади за даними багаторічних спостережень хуторових кампаній.

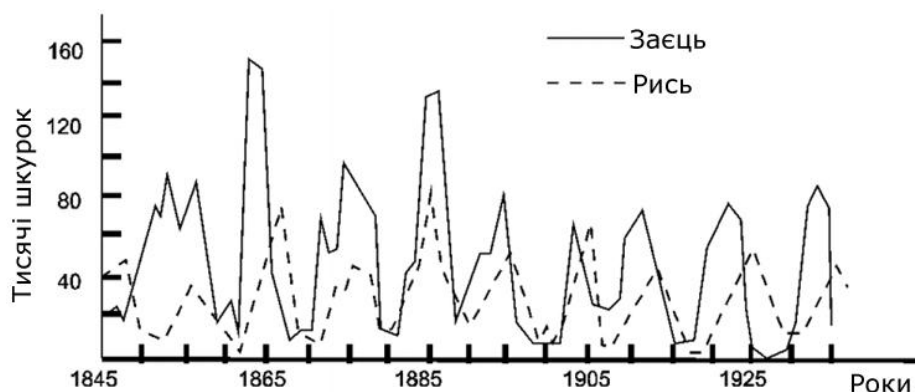


Рис. 1.4.5. Коливання чисельності популяцій рисі та зайців

Лекція 5

*«На захист власної теорії
завжди можна навести достатню
кількість досліджень»
Закон наукових розвідок Мерфі*

1. Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь.
2. Класифікація інтегральних рівнянь. Методи рішення.

1 Математичні моделі на основі інтегральних та інтегрально-диференціальних рівнянь

Задача Абеля історично була першою задачею, яка привела до розгляду та розв'язання інтегральних рівнянь. Задачу можна сформулювати таким чином: нехай матеріальна точка, на яку діє сила тяжіння, рухається у вертикальній площині (ξ, η) за деякою кривою (рис. 1.5.1). Необхідно визначити цю криву так, щоб матеріальна точка, що почала свій рух без початкової швидкості в точці кривою з ординатою x , досягла осі $O\xi$, тобто свого найнижчого положення, за час $t = f_1(x)$, де $f_1(x)$ – задана функція початкового положення точки.

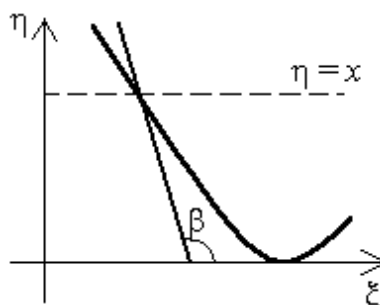


Рис. 1.5.1. Рух матеріальної точки в задачі Абеля