

Для нелінійних явищ, математичні моделі котрих не підпорядковуються принципу суперпозиції, отримані знання стосовно поведінки частини об'єкта ще не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому, а його відгук на зміну умов може якісно і не пропорційно залежати від кількісної величини (обсягів) цих змін. Наголошено, що більшість реальних процесів і відповідних (адекватних) їм математичних моделей є суттєво нелійними. Лінійні ж моделі відповідають досить частковим випадкам і, як правило, слугують лише першим наближенням до реальності.

### Лекція 3

*«Якщо вам здається, що  
ситуація покращується, значить  
ви щось не врахували»  
Другий закон Чізхольма*

1. Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE).
2. Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку.  
Резонанс.

#### **1 Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE)**

Під час досліджень різноманітних фізичних явищ, технологічних процесів, систем у багатьох галузях науки і техніки, а також деяких процесів, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність поміж величинами, що описують певний процес чи явище. Втім у багатьох випадках можна виявити певну функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їх похідні. Такі рівняння називають диференціальними, а знаходження невідомої функції (розв'язку) – інтегруванням диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане під час дослідження деякого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища, процесу. Диференціальні моделі називають ще динамічними математичними моделями. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення тощо [1].

Диференціальне рівняння, яке містить функцію лише однієї незалежної змінної (природно це функція часу для динамічних систем) має назву звичайного диференціального рівняння (**ODE** – ordinary differential equation).

Рівняння, які містять функції двох або декількох незалежних змінних, називаються рівняннями з частинними похідними (**PDEs** – partial differential equation).

Далі розглянуто звичайні диференціальні рівняння – **ODE**.

Оскільки такі рівняння містять невідомі функції залежні лише від часу, отже автоматично незалежні від координат, такі рівняння здатні описувати лише так звані динамічні системи (або процеси) із зосередженими параметрами.

Розглянемо диференціальне рівняння такого вигляду:

$$\frac{dx}{dy} = f(x, t). \quad (1.3.1)$$

Позаяк невідома функція  $x(t)$  залежить лише від однієї змінної – часу, то рівняння (1.3.1) являє собою ODE. Припустимо додатково, що функція в правій частині (1.3.1) може бути факторизована, тобто представлена у вигляді добутку двох функцій (часу та координат):

$$f(x, t) = g(t)h(x). \quad (1.3.2)$$

За умови (1.3.2) рівняння (1.3.1) вирішується методом розділення змінних:

$$\int \frac{dx}{h(x)} = \int g(t)dt. \quad (1.3.3)$$

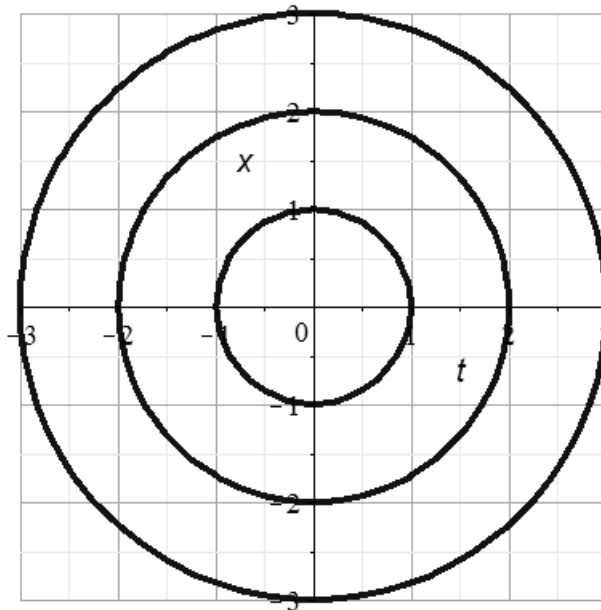
Аналітичне рішення у вигляді (1.3.3) можна отримати, якщо обидва інтеграли можуть бути знайдені. Розглянемо для ілюстрації таке рівняння:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{t}{x}. \quad (1.3.4)$$

Його рішення, з урахуванням константи інтегрування (яку позначимо як  $R^2$ ), можна записати у вигляді:

$$x^2 + t^2 = R^2. \quad (1.3.5)$$

Вираз (1.3.5) представляє безкінечну кількість рішень, які відрізняються лише значеннями константи  $R^2$  (рис. 1.3.1).



**Рис. 1.3.1. Графіки функції (1.3.5) на площині  $(t, x)$  для трьох різних значень константи  $R^2$**

Розглянемо таку ілюстративну задачу: припустимо, що деяка хімічна компанія щодня скидає  $v$  літрів розчину, в кожному з яких якому міститься  $m$  грамів деякої хімічної речовини у досить велике озеро загального об'єму  $V$ . Вхідний та вихідний потоки води в озеро є стаціонарними. Користуючись фактом, що результуюча швидкість зміни концентрації речовини в озері дорівнює швидкості,

з якою вона вводиться  $\left(\frac{m}{V}\right)$  мінус та швидкість, з якою вона виводиться з озера  $\left(\frac{v}{V}n\right)$ , де  $n(t)$  – концентрація речовини в озері.

Зміну концентрації можна описати таким диференціальним рівнянням:

Рішення (1.3.6) має такий вигляд:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{m}{V} - \frac{v}{V}n, \quad (1.3.6)$$

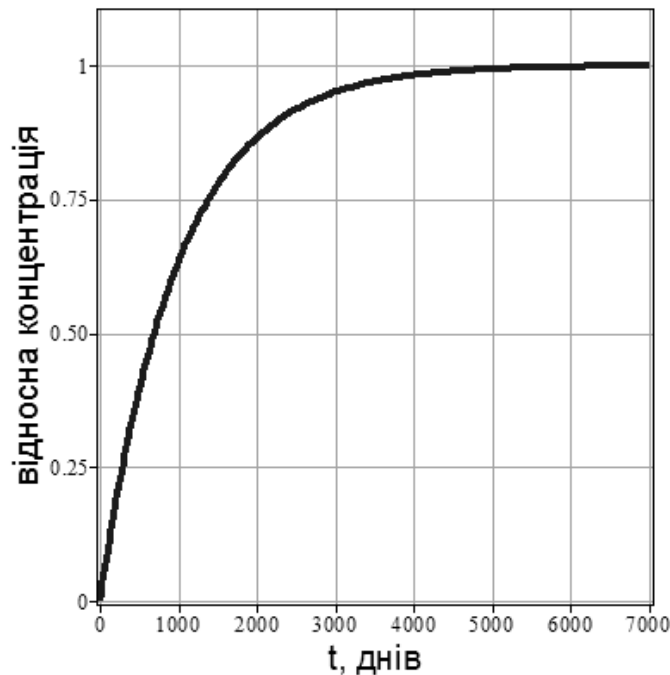
де  $C$  – константа інтегрування. Якщо скористатися очевидною початковою умовою  $n(0) = 0$ , оскільки до початку скидання розчину в озеро воно було чистим, то константа інтегрування вочевидь дорівнює одиниці і з безлічі рішень (1.3.7) виокремлюється єдине рішення такого вигляду:

$$n(t) = \frac{m}{v} - C \exp\left(-\frac{v}{V}t\right), \quad (1.3.7)$$

де  $C$  – константа інтегрування. Якщо скористатися очевидною початковою умовою  $n(0) = 0$ , оскільки до початку скидання розчину в озеро воно було чистим, то константа інтегрування вочевидь дорівнює одиниці і з безлічі рішень (1.3.7) виокремлюється єдине рішення такого вигляду:

$$n(t) = \frac{m}{v} \left(1 - \exp\left(-\frac{v}{V}t\right)\right). \quad (1.3.8)$$

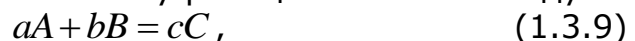
З моделі (8) видно, що концентрація речовини в озері залежить від параметра  $\frac{m}{v}$ , тобто концентрації речовини в тому розчині, який компанія скидає в озеро. З часом (за умови  $(t \rightarrow \infty)$ ) концентрація речовини в озері наблизиться саме до цієї межі (рис. 1.3.2) і озеро фактично перестане відрізнятися від того розчину, який в нього скидають. Швидкість досягнення цієї межі залежить від співвідношення об'ємів розчину, які щоденно скидаються в озеро, до об'єму всього озера (на рис. 1.3.2 таке відношення дорівнює 0.001).



**Рис. 1.3.2. Відносна концентрація речовини в озері**

Ці не тривіальні висновки були зроблені з аналізу моделі (1.3.8), яка, своєю чередою, була отримана з диференціального рівняння (1.3.6).

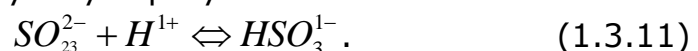
Ще один приклад диференціальних моделей першого порядку дає хімічна кінетика. Розглянемо хімічну реакцію такого вигляду:



де малими латинськими літерами показані коефіцієнти реакції, а великими – хімічні символи реагуючих молекул. Якщо вважати, що  $[A],[B],[C]$  – концентрації реагентів у виразі (1.3.9), то отримаємо відомий у хімії закон масової дії. Швидкість реакції, яка задається виразом (1.3.9), може визначатися наступним чином:

$$r = -\frac{1}{a} \frac{d[A]}{dt} = -\frac{1}{b} \frac{d[B]}{dt} = -\frac{1}{c} \frac{d[C]}{dt}. \quad (1.3.10)$$

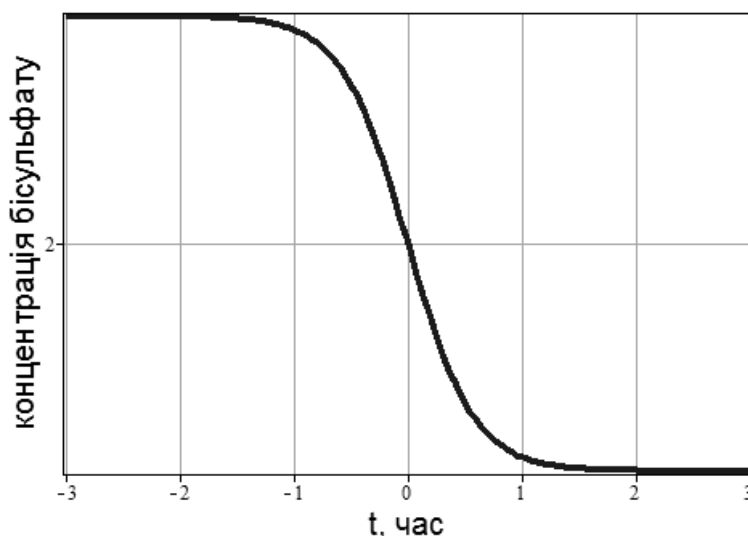
Розглянемо для прикладу реакцію поміж іонами сульфату та гідрогену з утворенням іону бісульфату:



Реакція (1.3.11) можлива в обох напрямках з різними швидкостями ( $r_d, r_i$  відповідно). Оскільки  $a = b = c = 1$ , і позначивши концентрації реагентів відповідно  $x, y, z$ , а їх початкові значення відповідно  $x_0, y_0, z_0$ , можемо записати закон (1.3.10) у вигляді:

$$\frac{dz}{dt} = r_d(x_0 - z)(y_0 - z) - r_i z. \quad (1.3.12)$$

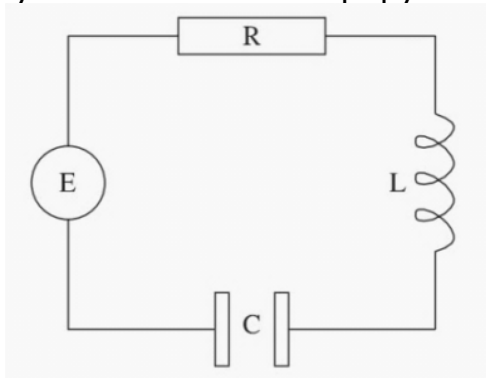
Рішення рівняння (1.3.12) можна отримати в загальному вигляді, хоча воно надто громіздке для наведення в лекції. Втім типовий вигляд зміни концентрації кінцевого продукту бісульфату, за умови, що швидкість зворотної реакції удвічі більша за швидкість прямої ( $r_d = 0.5r_i$ ), показана на рис. 1.3.3.



**Рис. 1.3.3. Графік зміни концентрації кінцевого продукту бісульфату**

## 2 Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку. Резонанс

Розглянемо простий послідовний коливальний контур (рис. 1.3.4), який складається з резистору  $R$ , ємності  $C$  та індуктору (котушки)  $L$ , а також елементу живлення з електрорушійною силою  $E$ .



**Рис. 1.3.4. Простий коливальний контур**

Напруги на елементах контуру визначаються відповідно:

1. Законом Ома (резистор)  $V_R = IR$ .
2. Законом Фарадея (індуктор)  $V_L = L \frac{dI}{dt}$ .
3. Законом Кулона (конденсатор)  $V_C = \frac{q}{C}$ .

Застосовуючи закон Кірхгофа для напруг у контурі, отримуємо рівняння:

$$V_L + V_R + V_C = E(t), \quad (1.3.13)$$

або, враховуючи подані вище закони, а також зв'язок поміж струмом та зарядом  $I = \frac{dq}{dt}$ , представимо (1.3.13) в такій формі:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t). \quad (1.3.14)$$

Рівняння (1.3.14) є лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Воно є лінійним, тому що похідні входять у нього лише в першому ступеню, і воно є другого порядку, бо найстарша похідна рівняння є другого порядку. Перепишемо отримане рівняння в такому вигляді:

$$\ddot{q} + p\dot{q} + \omega_0^2 q = f(t), \quad (1.3.15)$$

де точками над символами вказані похідні по часу  $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ ,  $p = \frac{R}{L}$ ,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}, \quad f(t) = \frac{E(t)}{L}.$$

Розглянемо далі абсолютно іншу, на перший погляд, систему. Припустимо, що матеріальна точка маси  $m$  рухається уздовж осі координат  $Ox$  від точки рівноваги  $x = 0$  під впливом трьох таких сил (рис. 1.3.5):

1. Сили  $F_1 = -kx$ , яка повертає точку до початку координат, і яка пропорційна зміщенню точки від точки рівноваги.
2. Сили опору середовища  $F_2 = -b\dot{x}$ , яка пропорційна швидкості руху точки.
3. Зовнішньої сили  $F_3(t)$ , яка діє уздовж осі  $Ox$  на точку з боку зовнішніх тіл.

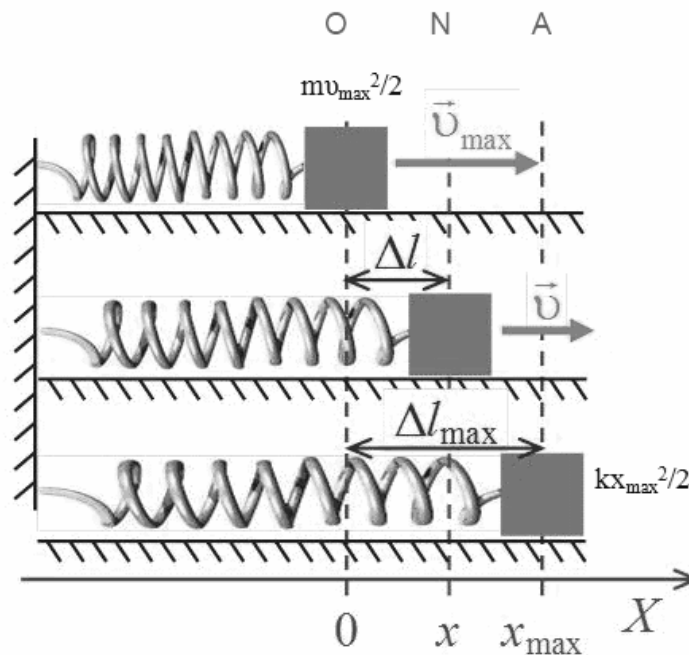


Рис. 1.3.5. Коливання матеріальної точки

Тоді рівняння руху матеріальної точки можна записати на підставі другого закону Ньютона в такому вигляді:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F_3(t). \quad (1.3.16)$$

Останнє рівняння можна переписати в такому вигляді:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t), \quad (1.3.17)$$

де  $p = \frac{b}{m}$ ,  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ,  $f(t) = \frac{F_3(t)}{m}$ .

Порівняймо рівняння (1.3.17) та (1.3.15), як видно, вони практично ідентичні, хоча моделюють дві різні з фізичної точки зору системи: коливання заряду на обкладинках конденсатора в коливальному контурі та коливання матеріальної точки навколо положення рівноваги.

Диференціальне рівняння (1.3.17) – лінійне неоднорідне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами. Якщо його інтегрувати, знайдемо закон руху матеріальної точки.

Рівняння (1.3.17) з ненульовою правою частиною називають рівнянням вимушених коливань. Розглянемо спочатку простіший випадок, коли зовнішня сила відсутня, іншими словами:  $f(t) = 0$ . Тоді рівняння (1.3.17) спрощується до так званого рівняння вільних коливань:

$$\ddot{x} + p\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3.18)$$

Розглянемо рівняння (1.3.18) і з'ясуємо як впливають на його рішення коефіцієнти цього рівняння ( $p, \omega_0$ ). Розглянемо спочатку рух у середовищу без опору, тобто коефіцієнт  $p = 0$ , рівняння такого руху виглядатиме так:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (1.3.19)$$

Загальним розв'язком цього рівняння є лінійна комбінація гармонічних функцій:

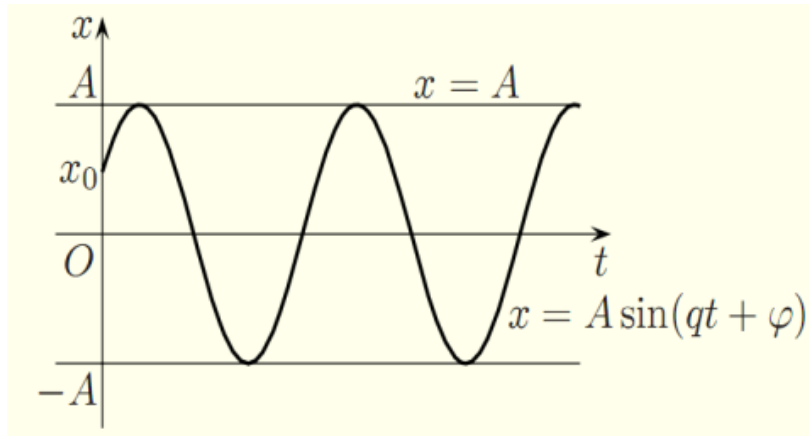
$$x(t) = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t) = A \sin(\omega_0 t + \varphi), \quad (1.3.20)$$

де  $A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}$ ,  $\varphi = \arctg\left(\frac{C_1}{C_2}\right)$ . Рух, який описується рішенням

(1.3.20), зветься гармонічним коливанням з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ .

Величина  $A$  має назву амплітуди коливань (максимальне відхилення точки від положення рівноваги), а величину  $\Phi(t) = \omega_0 t + \varphi$  називають фазою коливань, причому  $\varphi = \Phi(0)$  – так звана початкова фаза.

З виразу (1.3.20) випливає, що всі рухи такого типу обмежені, оскільки при  $t \rightarrow \pm\infty$  маємо  $|x(t)| \leq A$  (рис. 1.3.6).



**Рис. 1.3.6. Гармонічні коливання**

Перейдемо до аналізу руху в середовищах з опором. Загальне рішення рівняння (1.3.18) має такий вигляд:

1. За умови, що  $\omega^2 = \omega_0^2 - p^2 > 0$ :

$$x(t) = A_0 \exp(-pt) \sin(\omega t). \quad (1.3.21)$$

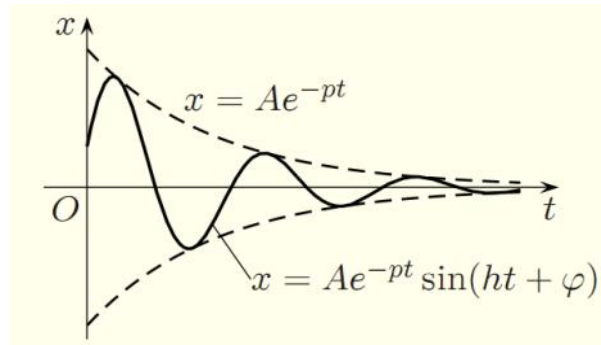
Такий рух називають згасаючим гармонічним коливанням (рис. 1.3.7) з періодом  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - p^2}}$ , частотою

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - p^2}$  та згасаючою з часом амплітудою  $A(t) = A_0 \exp(-pt)$ .

2. За умови  $\omega_0^2 - p^2 < 0$  рішенням є аперіодичний згасаючий рух:

$$x(t) = \exp(-pt)(C_1 + C_2 t). \quad (1.3.22)$$





**Рис. 1.3.7. Згасаючі гармонічні коливання**

Такий рух не є коливальним, оскільки матеріальна точка із зростанням часу асимптотично прямує до положення рівноваги:  $t \rightarrow \infty, x \rightarrow 0$  (рис. 1.3.7).

Розглянемо далі так звані вимушені коливання, диференціальна модель яких дається рівнянням (1.3.17) з ненульовою правою частиною. Припустимо, що вимушуюча сила є гармонічно залежною від часу, тобто  $f(t) = f_0 \sin(\omega t)$ . Загальне рішення рівняння (1.3.17) за умови гармонічної вимушуючої сили має такий вигляд:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{f_0(p^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin(\omega t) - \\
 & - \frac{2p\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos(\omega t) - \\
 & - \frac{2p\omega f_0}{(p^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \exp(-pt) \sin(t\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2} + \varphi)
 \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

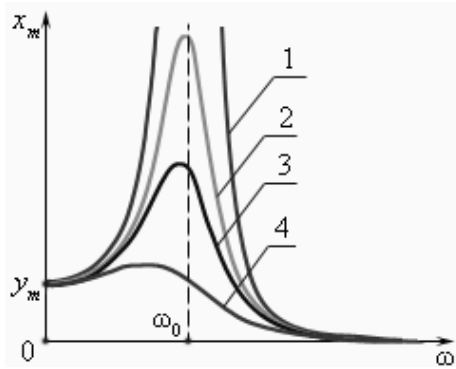
За умови  $t \rightarrow \infty$  останній доданок виразу (1.3.23) прямує до нуля (цей доданок описує так звані перехідні процеси в коливальній системі), тому стаціонарні вимушені коливання описуються першими двома доданками цього виразу.

$$\begin{aligned}
 x(t) = & \frac{f_0(p^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \sin(\omega t) - \\
 & - \frac{2p\omega f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2} \cos(\omega t)
 \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

Насамперед варто зауважити, що вимушені коливання відбуваються з частотою вимушуючої сили –  $\omega$ . Амплітуда вимушених коливань залежить від частоти і задається формулою:

$$A(\omega) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4p^2\omega^2}} \quad (1.3.25)$$

Типові залежності амплітуди вимушених коливань від частоти вимушуючої сили показані на рис. 1.3.8. Опір середовища, тобто параметр  $p$ , збільшується з номером кривої.



**Рис. 1.3.8. Вимушені коливання**

З рисунку видно, що амплітуда коливань може сягати доволі значної величини за умови так званого резонансу. Резонанс є досягненням максимуму амплітуди вимушених коливань, він має місце за умови, що частота вимушуючої сили наближається до резонансної частоти, яка задається виразом:

$$\omega \rightarrow \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 - 2p^2} . \quad (1.3.26)$$

Для середовища без опору ( $p \rightarrow 0, \omega_{res} \rightarrow \omega_0, A(\omega) \rightarrow \infty$ ) резонансна амплітуда теоретично може прямувати до нескінченно великих значень. Отже, чим меншим є опір середовища тим більших значень сягає резонансна амплітуда вимушених коливань.

Збільшення амплітуди є лише наслідком резонансу, а причина – збіг резонансної частоти коливальної системи з частотою зовнішнього впливу на систему. За допомогою явища резонансу можна виділити або посилити навіть дуже слабкі періодичні коливання. Резонанс – це явище, яке полягає на тому, що коливальна система особливо чутливо реагує на деякі частоти вимушуючої зовнішньої сили (впливу).

Резонанс зустрічається не лише в механіці, а практично всюди: в електроніці, оптиці, акустиці, астрофізиці. Явище резонансу лежить в основі проектування музичних інструментів: рояля, скрипки, флейти тощо.

Використовується явище резонансу і в електроніці. Коливальний контур, диференціальна модель якого представлена виразом (1.3.14), використовується в елементах налаштування та електричних фільтрах. Утім резонанс може бути й шкідливим, зокрема якщо він спричинює спотворення сигналу або паразитні шуми у приладах.

Один із найвідоміших прикладів шкідливості явища резонансу стався 12 квітня 1831 року, коли зруйнувався Бротонський підвісний міст через ріку Ірвелл в Англії, коли по ньому йшов військовий загін. Частота кроків воїнів, що крокували в ногу, збіглася з частотою резонансних коливань мосту, через що їх амплітуда стрімко зроста, ланцюги обірвалися, і міст зруйнувався, потрапивши в ріку.

Із резонансом можна стикнутися не тільки на суші, але й на морі та в повітрі. Так, за деяких частот обертання гребного вала у резонанс входили навіть кораблі. А на зорі розвитку авіації деякі

