результаті чого сума ймовірностей на гілках одного порядку складає одиницю (рис. 1.1.2).

Далі обчислюють вартість альтернативних схем терапії шляхом послідовного перемноження значень ймовірностей за кожною гілкою (з лівого боку до правого) і наступного множення отриманого значення ймовірності на величину значущості результату, представлену в кінці гілки.

Рисунок 1.1.2 показує приклад простого дерева рішень для двох альтернативних медичних технологій під час лікування артрозу. Як видно з рис. 1.1.2 застосування препарату А гарантує пацієнту як менші затрати, так і більше математичне очікування тривалості життя (LYG = 9.5 років).

Лекція 2

«Якщо ви думаєте, що компетентність коштує
надто дорого, спробуйте необізнаність –
буде коштувати ще дорожче»
Йохан Стаель фон Хольстайн

1. Методи побудови математичних моделей систем і процесів.
2. Класифікація та опис моделей.

1 Методи побудови математичних моделей систем і процесів

1.1. Аналітичне моделювання

Для цього методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

Аналітична математична модель звичайно досліджується такими методами як:

- аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі;
- числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи процес;
- якісним – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості.

Утім, аналітичні рішення вдається отримати лише в обмеженій кількості випадків для відносно простих рівнянь, або їх систем. У більшості реальних досліджень точні аналітичні рішення або неможливі, або пов’язані з величезними ресурсними витратами.

Тоді вдаються до суттєвих спрощень первинної моделі, хоча зрозуміло, що такі спрощені моделі не завжди задовольняють усім потребам дослідників.

Результати аналітичних моделей презентуються у вигляді аналітичних виразів. Наприклад, динаміку популяції риби, яка існує у відносно великому замкненому озері, можна описати диференціальним рівнянням Ферхюльста (Verhulst), відомим також як логістичне рівняння:

$$\frac{dP}{dt} = P(\beta - \delta P), \qquad (1.2.1)$$

де $P(t)$ – популяція риби, яка вимірюється у десятках тисяч особин, а коефіцієнти β, δ відповідно описують частоти народження та загибелі риби. Загальне аналітичне рішення рівняння (1.2.1) є таким:

$$P(t) = \frac{\beta}{\delta + k\exp(-\beta t)}, \qquad (1.2.2)$$

де k – константа інтегрування, значення якої залежить від розміру популяції в початковий момент часу. З рис. 1.2.1 видно, що популяція риби згідно з аналітичною моделлю (1.2.1), (1.2.2) спочатку доволі швидко зростає, але з часом наближається до деякої стаціонарної та рівноважної межі. У розглянутому випадку це приблизно мільйон особин, за умови, що початкове значення складало 500 тисяч, а коефіцієнти народження та смертності прийняті такими: $\beta = 0.1, \delta = 0.001$.

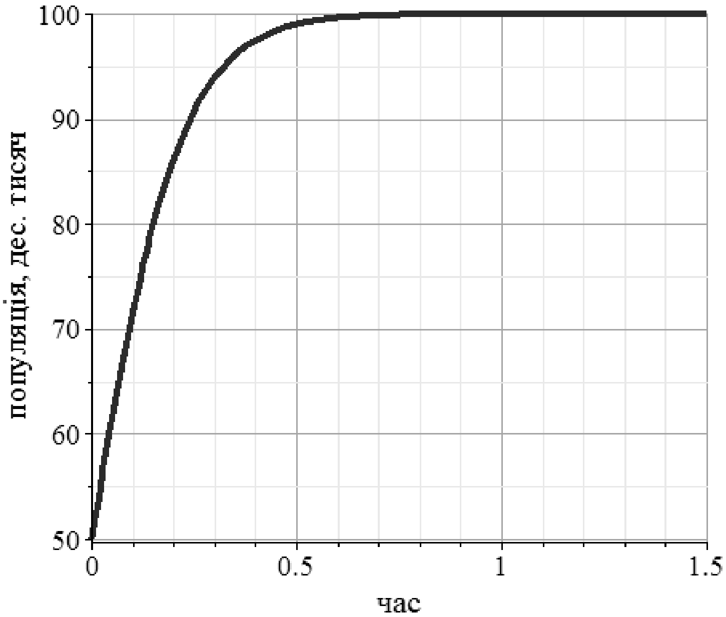

Рис. 1.2.1. Логістична крива популяції риби

Диференціальне рівняння (1.2.1) відносно просте рівняння першого порядку. Аналітичні вирази вдається отримувати також для рівнянь другого-третього порядків, але для більш складних моделей вони найчастіше є надто громіздкими і непридатними для безпосереднього аналізу. У таких випадках корисним є такий різновид аналітичного моделювання як числове моделювання. Поведінка системи в такому методі вивчається на підставі числових рішень, отриманих одним із відповідних числових методів (Ейлера, Рунге-Кутта тощо).

Моделювання нелінійних систем практично завжди використовує саме числові методи. Розглянемо нелінійне рівняння для так званого генератора Ван-дер-Поля, який являє собою звичайний коливальний контур із джерелом живлення та нелінійним елементом з диференціальним від'ємним опором, наприклад, тунельним діодом. У такому колі за відповідного підбору параметрів можливе виникнення так званих автоколивань. Отже, рівняння генератору має наступний вигляд:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \mu(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0. \qquad (1.2.3)$$

Аналітичне рішення цього рівняння отримати не вдається. Втім графік залежності функції $x(t)$ можна побудувати, вирішуючи рівняння (1.2.3) числовими методами (рис. 1.2.2), поклавши параметр згасання від'ємний: $\mu = -0.5$.

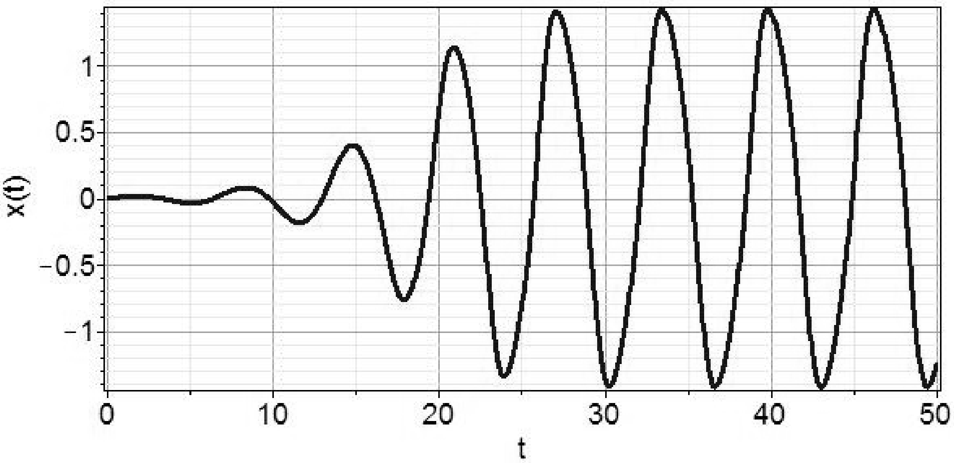

Рис. 1.2.2. Рішення рівняння генератора Ван-дер-Поля (1.2.3) числовим методом

За майже нульових початкових умов, генератор Ва-дер-Поля демонструє зростаючі автоколивання, які спонтанно виникають у системі і досить швидко стають стаціонарними за амплітудою. За своєю формою це явно не гармонічні коливання.

1.2. Імітаційне моделювання

Особливістю цього методу моделювання є те, що алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи, в певному наближенні, зрозуміло. Елементарні явища, які формують процес функціонування системи, імітуються в їх логічній та часовій послідовності.

Головна перевага такого виду моделювання – можливість роботи зі складнішими системами та процесами, аніж це може дозволити аналітичне моделювання. Головним засобом такого моделювання слугують комп'ютери.

Під час імітаційного моделювання комп'ютер відтворює алгоритм – «логіку» системи, яка моделюється, її поведінку в часі за умови різних наборів зовнішніх впливів. Прикладом найпростішої імітаційної моделі можна назвати комп'ютерні моделі різних видів руху матеріальних точок або тіл (рис. 1.2.3). У таких моделях імітується спостереження за позиціями рухомого тіла в різні моменти часу, відтворюється траєкторія руху, варіюються його параметри тощо.

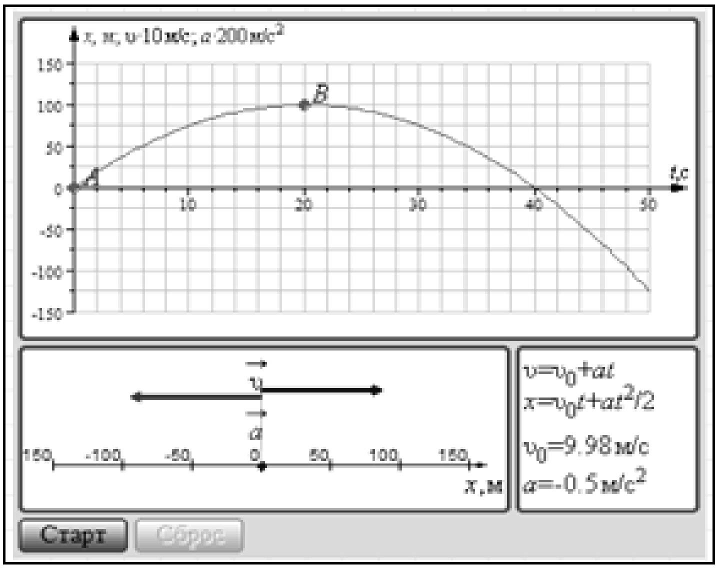

Рис. 1.2.3. Вікно імітаційної моделі руху гарматного снаряду в полі сил тяжіння

Головним недоліком імітаційного моделювання є відносно великі затрати часу на вирішення задачі, особливо якщо вимагається відносно висока точність такого рішення.

1.3. Статистичне моделювання. Метод Монте-Карло

Під час моделювання стохастичних систем, тобто систем із випадковими процесами або впливами, модель повинна відтворювати випадкові фактори, події, величини, поля та процеси, які мають місце в оригіналі.

За результатами статистичного моделювання визначають ймовірнісні оцінки критеріїв якості, які характеризують функціонування та ефективність керованої системи. Звичайно це відбувається на заключному етапі моделювання, етапі статистичної обробки отриманих результатів, коли застосовують параметричне чи непараметричне оцінювання, здійснюють статистичну перевірку гіпотез тощо.

Зокрема, прикладом параметричної статистичної оцінки є вибіркове середнє певного показника ефективності. Серед непараметричних методів оцінювання широке розповсюдження отримав метод побудови гістограм.

Метод Монте-Карло (за назвою міста Монте-Карло, Монако, яке відоме своїми казино) – загальна назва групи числових методів, основаних на одержанні великої кількості реалізацій стохастичного (випадкового) процесу, який формується у той спосіб, щоб його ймовірнісні характеристики збігалися з аналогічними величинами задачі, яку потрібно розв'язати. Використовується для розв'язування задач у фізиці, математиці, економіці, оптимізації, теорії управління тощо.

Метод Монте-Карло – це метод імітації для приблизного відтворення реальних явищ, він є різновидом статистичного моделювання. Метод об'єднує аналіз чутливості (сприйнятливості) і аналіз розподілу ймовірностей вхідних змінних. Цей метод дає змогу побудувати модель, мінімізуючи дані, а також максимізувати значення даних, які використовуються в моделі. Побудова моделі починається з визначення функціональних залежностей у реальній системі. Після чого можна одержати кількісний розв'язок, використовуючи теорію ймовірності й таблиці, або програмні генератори, для випадкових чисел.

Метод Монте-Карло широко використовується у всіх випадках симуляції на комп’ютерах. Ідея методу полягає у підрахунку співвідношення випадковим чином генерованих комп’ютером точок, які потрапили під криву інтегрованої функції до загальної кількості генерованих випадкових точок (рис. 1.2.4). Відповідне співвідношення існує поміж невідомою площею під кривою та відомою загальною площею рисунку.

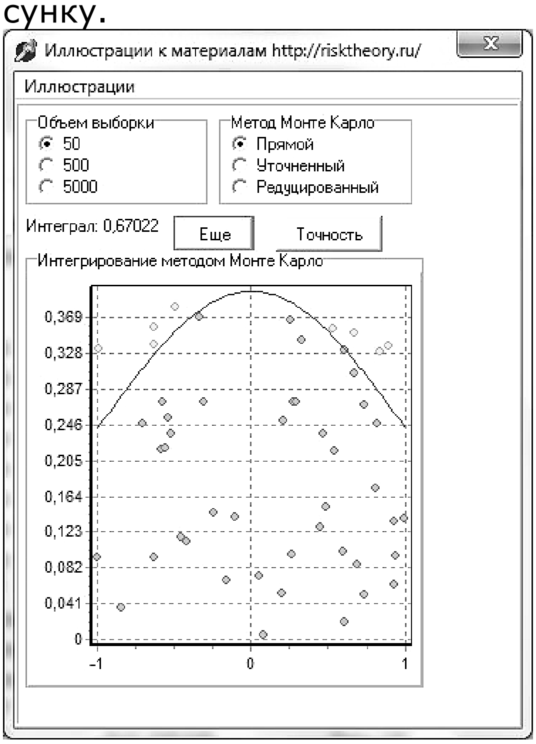

Рис. 1.2.4. Візуалізація програми площі під кривою методом Монте-Карло

Загальною тенденцією основних методів моделювання є скорочення часу моделювання, а також проведення досліджень у масштабі реального часу.

2 Класифікація та опис моделей

Під час створення математичних моделей можна вирізнити три основні стадії підготовки такої моделі:

1. Створення уявної моделі.
2. Створення концептуальної моделі.
3. Створення формальної моделі.

Уявна модель формується в голові дослідника під час спостережень за об’єктом моделювання як його мислений образ. Формуючи таку ідеальну модель розробник звичайно намагається отримати відповіді на певні питання, зокрема, чим саме можна знехтувати в реальному і складному об’єкті, а які властивості, навпаки, варто утримати в його образі. Представлення такої уявної моделі звичайною мовою (так званий вербальний образ) називають змістовною моделлю. Такі моделі поділяють на описові, пояснюючі та прогностичні відповідно до їх функції.

Концептуальна модель є абстрактною моделлю, яка визначає структуру об’єкта моделювання, властивості його елементів, причинно-наслідкові зв’язки, які притаманні об’єкту і важливі для побудови його моделі. Розглядають три типи концептуальних моделей:

- логіко-семантичні;
- структурно-функціональні;
- причинно-наслідкові.

Перший із цих типів, логіко-семантична модель, є описом об’єкта в термінах предметної галузі знань, до якої він належить. Аналіз відбувається засобами логіки. Другий тип розглядає об’єкт як цілісну систему, яку можна розділити на певні підсистеми, або елементи. Частини системи пов’язані між собою деякими структурними співвідношеннями, які описують підлеглість одна одній, а також логічну та часову послідовність вирішення задачі. Третій тип – причинно-наслідкові моделі, слугує для пояснень та прогнозу поведінки об’єкта.

Побудова концептуальної моделі звичайно передбачає три етапи:

1. Визначення типу системи (об’єкта моделювання).
2. Опис зовнішніх впливів на об’єкт.
3. Декомпозиція об’єкта (його аналіз, розкладання на простіші частини).

Формальна модель є презентацією концептуальної моделі за допомогою деякої формальної мови: зокрема це може бути мова математики, алгоритмічна мова, мова програмування тощо.

Іншою класифікаційною ознакою об’єкта моделювання є множина можливих станів. Якщо об’єкт може перебувати лише в одному стані, то він відноситься до статичних систем.

Якщо кількість можливих станів системи більше одного та/або ці стани можуть змінюватися з часом, то об’єкт належить до динамічних систем. Процес зміни станів називають рухом динамічної системи. Розрізняють динамічні системи:

- з дискретними станами (кількість станів можна перенумерувати цілими числами);
- з безперервною множиною станів.

Зміна станів також може відбуватися або у дискретні фіксовані моменти часу (так звані системи з дискретним часом переходів), або ж системи з безперервним часом переходів, тобто такі, які «живуть» у реальному часі (рис. 1.2.5).

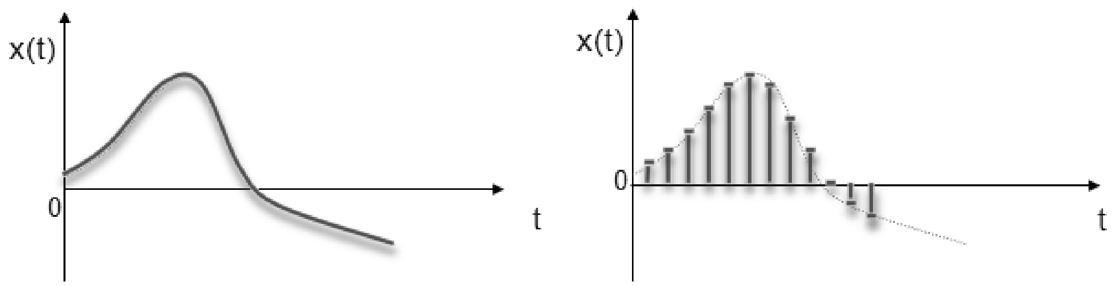

Рис. 1.2.5. Приклад безперервного та дискретного сигналів

Умови переходів між станами поділяють системи на:

- детерміновані, в яких новий стан залежить лише від поточного стану та часу;
- стохастичні, в яких можна казати лише про ймовірність переходу з поточного стану до інших можливих станів системи.

Безперервні системи поділяють на системи з:

- Зосередженими параметрами. В таких системах параметри залежать лише від часу, але не залежать від координат. Описуються звичайно за допомогою звичайних диференціальних рівнянь.
- Розподіленими параметрами, в яких параметри системи залежать як від часу, так і від координат. Описуються за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних.

Дискретні системи поділяють на:

- синхронні;
- асинхронні.

Поділ залежить від того чи прив’язані моменти переходів поміж можливими станами системи до конкретних часових моментів: якщо відповідь позитивна – маємо справу з синхронною системою, інакше – система є асинхронною. Існують альтернативні класифікації математичних моделей. Одна з таких представлена в табл. 2.1.

Таблиця 1.2.1

Класифікаційна ознака моделі	Складові класифікаційної категорії
Характер віддзеркалюваних властивостей	1. функціональні; 2. структурні.
Належність до ієрархічного рівня	1. макрорівень; 2. макрорівень; 3. мегарівень.
Ступінь деталізації в межах одного рівня	1. повні, 2. макромоделі.
Спосіб презентації властивостей об'єкта	1. аналітичні; 2. імітаційні; 3. алгоритмічні.
Спосіб побудови моделі	1. теоретичні; 2. емпіричні.

Власна класифікація існує також у галузі економіко-математичних моделей, що видно з такої ілюстрації (рис. 1.2.6).

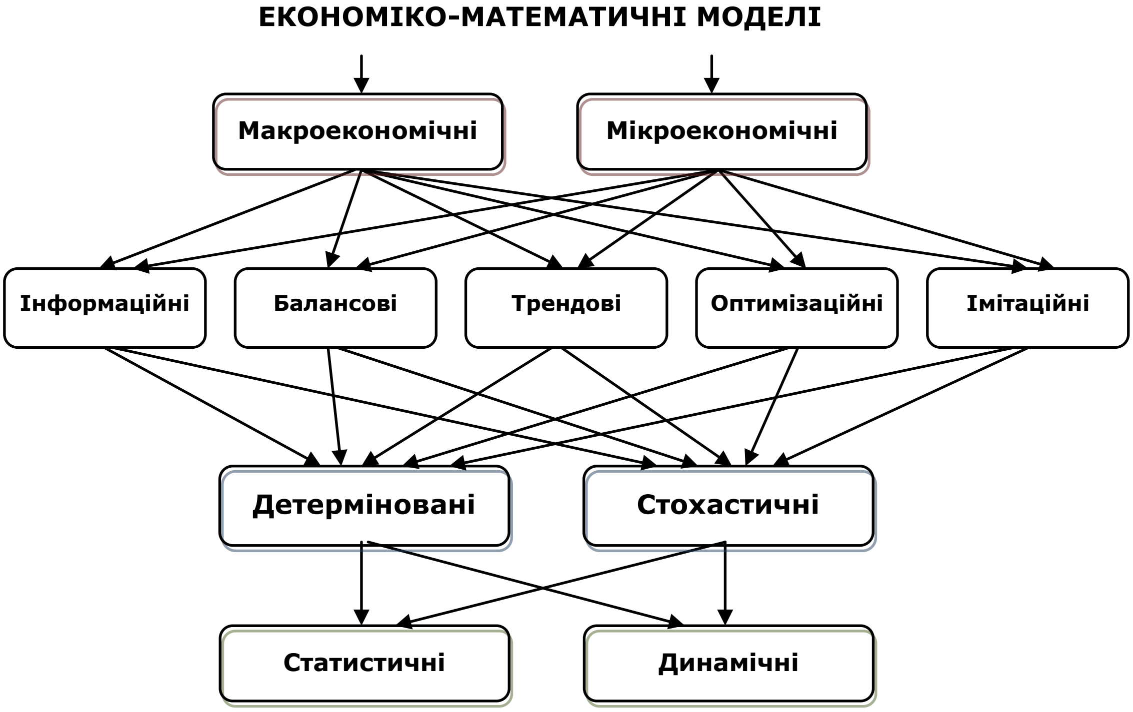

Рис. 1.2.6. Класифікація економіко-математичних моделей

У математичному аспекті важливим є також поняття лінійності моделі, котре означає, що справедливим є принцип суперпозиції, тобто, що будь-яка лінійна композиція розв'язків рівнянь моделі, наприклад їх сума, є також розв'язком задачі. Використовуючи принцип суперпозиції, неважко відшукавши рішення в будь-якому частковому випадку, побудувати рішення для більш загальної ситуації. Тому про якісні властивості загального випадку можна судити виходячи з властивостей часткового – різниця між двома розв'язками має лише кількісний характер. Отже, у випадку лінійних моделей відгук (реакція) об'єкта на зміну умов є пропорційним величині цих змін.

Для нелінійних явищ, математичні моделі котрих не підпорядковуються принципу суперпозиції, отримані знання стосовно поведінки частини об'єкта ще не гарантують знань про поведінку об'єкта в цілому, а його відгук на зміну умов може якісно і не пропорційно залежати від кількісної величини (обсягів) цих змін. Наголосимо, що більшість реальних процесів і відповідних (адекватних) їм математичних моделей є суттєво нелінійними. Лінійні ж моделі відповідають досить частковим випадкам і, як правило, слугують лише першим наближенням до реальності.

Лекція 3

«Якщо вам здається, що
ситуація покращується, значить
ви щось не врахували»
Другий закон Чізхольма

1. Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE).
2. Типи рішень диференціальних рівнянь другого порядку. Резонанс.

1 Математичні моделі на основі звичайних диференціальних рівнянь (ODE)

Під час досліджень різноманітних фізичних явищ, технологічних процесів, систем у багатьох галузях науки і техніки, а також деяких процесів, які виникають в економіці, екології та інших соціальних науках, не завжди вдається безпосередньо простежити залежність поміж величинами, що описують певний процес чи явище. Втім у багатьох випадках можна виявити певну функціональну залежність між визначальними характеристиками процесу (функціями), швидкостями їх зміни й часом, тобто знайти рівняння, які містять шукані функції та/або їх похідні. Такі рівняння називають диференціальними, а знаходження невідомої функції (розв’язку) – інтегруванням диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, одержане під час дослідження деякого реального явища або процесу, називають диференціальною моделлю цього явища, процесу. Диференціальні моделі називають ще динамічними математичним моделями. У таких моделях, крім шуканих залежних величин, містяться також похідні шуканих залежностей, наприклад, швидкості, прискорення тощо [1].