

# РОЗДІЛ 1

## ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА

### Лекція 1

*«Навіть якщо ваше пояснення таке прозоре, що виключає всі помилкові інтерпретації, завжди знайдуться люди, які зрозуміють вас неправильно»*  
Закон Мерфі

1. Поняття про математичне й комп'ютерне моделювання для задач приладобудування.
2. Методологія моделювання систем і процесів.

#### **1 Поняття про математичне й комп'ютерне моделювання для задач приладобудування**

Моделювання на цифрових обчислювальних машинах є одним із найпотужніших засобів дослідження, зокрема, складних динамічних систем.

Воно дає можливість здійснювати обчислювальні експерименти із системами на стадії проектування, а також вивчати системи, натурні експерименти з якими через небезпечність або високу вартість, недоцільні. У той же час, завдяки близькості за формою до фізичного моделювання, цей метод дослідження доступний широкому загалу користувачів.

Отже, комп'ютерне моделювання в медицині отримало самостійні функції і дедалі стає все більш необхідним у процесі проведення досліджень. Моделювання в медицині є тим засобом, який дозволяє встановлювати глибокі і складні взаємозв'язки між теорією та експериментом. Останні сто років експериментальні методи медицини почали наštовхуватися на низку обмежень і виявилось, що проведення деяких досліджень просто неможливе без моделювання. Це викликано такими факторами:

- втручання в біологічні системи може призводити до неможливості встановлення причин змін, що виникають при цьому;
- деякі теоретично обґрунтовані експерименти неможливо здійснити внаслідок недостатнього рівня розвитку експериментальної техніки;
- ряд експериментів, які необхідно проводити на людях, слід відхиляти з морально-етичних та правових питань.

Нині, коли комп'ютерна промисловість пропонує різноманітні засоби моделювання, будь-який кваліфікований інженер, технолог або лікар повинні вміти не просто моделювати складні об'єкти, але й досліджувати їх за допомогою сучасних технологій, реалізованих у формі комп'ютерних графічних середовищ або пакетів візуального моделювання. Створені в останні роки комп'ютерні програмні засоби реалізації числових методів не тільки забезпечують задані вимоги до похибки розв'язку, але й дозволяють визначення типу (обчислювальної складності) розв'язуваної задачі.

Усі процеси, явища та систем, з яким доводиться мати справу, у тій чи іншій мірі змінюються в часі. Саме швидкість зміни значень параметрів, які описують систему або процес, і є найбільш важливою їх ознакою і нерідко визначає їх базові характеристики. Швидкість зміни деякої величини завжди є її похідною по часу, тому моделі всіх природних або технологічних процесів неминуче міститимуть похідні або інтеграли по часу. У цьому сенсі, ми називаємо такі системи динамічними системами.

Під найпростішою динамічною системою зазвичай розуміють систему, поведінка якої задається сукупністю звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші з досить гладкими правими частинами, що забезпечують існування та унікальність розв'язку. Прикладом простого об'єкта, поведінку якого можна описати диференціальними рівняннями, може бути тіло, кинуте під кутом до горизонту, або добре відомий зі шкільного підручника басейн із двома трубами, через які вливається й виливається вода.

Деякі складнішими є моделі, зображені системою звичайних диференціальних рівнянь у формі Коші й нелінійними алгебраїчними рівняннями, що супроводжуються набором допоміжних формул. Задача числової побудови фазової траєкторії таких систем помітно складніша. Втім, якщо сукупність нелінійних рівнянь однозначно розв'язна в кожній точці, а праві частини диференціальних рівнянь досить гладкі, то вони в основному також успішно розв'язуються.

Диференціальні рівняння традиційно поділяють на звичайні диференціальні рівняння (так звані ODE – ordinary differential equations), в яких шукається невідома функція, що залежить лише від однієї незалежної змінної. Якщо ж невідома функція залежить від двох, або більшої кількості незалежних змінних, то рівняння для неї називають диференціальним рівнянням у частинних похідних (так звані PDE – partial differential equations).

Під час досліджень процесів у фізиці, зокрема в гідромеханіці, більш поширеним математичним апаратом є рівняння з частинними похідними. Їх з успіхом використовують при моделюванні динаміки розподілу тепла, руху рідини й газів, коливанні пластин та оболонок. При дослідженні процесів в економіці, біології, медицині останнім часом почали використовувати також функціонально-

диференціальні рівняння. Найпростішими з них є рівняння з одним сталим запізнюванням і рівняння нейтрального типу.

У математичному моделюванні систем виділяють три такі основні частини:

- Емпірична частина, яка містить фактичні дані, отримані в експериментах і/або спостереженнях, а також інформацію з первинної систематизації.
- Теоретична частина, котра розвиває основні концепції, які дозволяють об'єднати й пояснити з єдиних позицій емпіричні закономірності та явища.
- Математична частина, яка конструює моделі для перевірки основних теоретичних концепцій, а також методи обробки експериментальних даних, планування нових експериментів і спостережень.

Важлива перевага методів математичного моделювання систем і процесів полягає в тому, що вони дозволяють різко скоротити обсяг і масштаби натурних експериментів. Математичне моделювання незамінне саме там, де натурний експеримент може стати небезпечним і навіть катастрофічним – у ядерній техніці, екології, епідеміології, при розробці економічних реформ тощо.

Моделювання також різко скорочує час і витрати на проектування за рахунок можливості аналізу великої кількості варіантів, збільшує ефективність роботи проектованої системи, пристрою або приладу, а також дозволяє вивчити їх дизайн та поведінку в різних умовах з різними комбінаціями впливу зовнішніх факторів, що не завжди можливо здійснити під час натурних випробувань.

Саме моделювання часто є тим єдиним засобом, що дає змогу полегшити проектування та експлуатацію великих систем. Однаковою мірою це стосується і технологічних систем. Технологічна система – це сукупність функціонально взаємозв'язаних засобів технологічного оснащення предметів виробництва і виконавців для здійснення в регламентованих умовах виробництва заданих технологічних процесів або операцій.

Технологічна система як об'єкт моделювання – це складна динамічна система, у якій в єдиний комплекс об'єднані обладнання, засоби контролю і керування, допоміжні й транспортні пристрої, обробляючий інструмент або середовище, об'єкти виробництва (заготовки, напівфабрикати, готові вироби), а також люди, які здійснюють виробничий процес і керують ним.

Технологічний процес – це частина виробничого процесу, що містить цілеспрямовані дії, пов'язані зі зміною і (або) визначенням стану предмета виробництва. Технологічні процеси будують за окремими методами їх виконання (процеси механічного і термічного оброблення, покриття, складання, монтажу, контролю тощо) і розділяють на операції. Технологічна операція – це закінчена частина технологічного процесу, що виконується на одному робочому місці.

Моделювання технологічних систем полягає в імітації виконання на елементах виробництва (обладнанні, дільницях) операцій над продуктами (напівфабрикатами, заготовками, сировиною тощо) зміною відповідних параметрів елементів чи продуктів. Елементи виробництва характеризуються, крім цього, станами (елемент зайнятий, елемент справний тощо). Передача продукту від одного елемента до іншого моделюється передачею інформації про його параметри і зміну станів елементів.

## 2 Методологія моделювання систем і процесів

Моделювання (англ. scientific modelling, simulation) – це метод дослідження систем, явищ і процесів, що ґрунтується на заміні конкретного об'єкта досліджень (оригіналу) іншим, подібним до нього (моделлю). Під моделлю розуміється об'єкт будь-якої природи (уявна або матеріально реалізована система), котрий частково відображає чи відтворює в певному сенсі об'єкт дослідження і здатний замінити його так, що вивчення моделі дає нову інформацію про об'єкт (рис. 1.1.1).

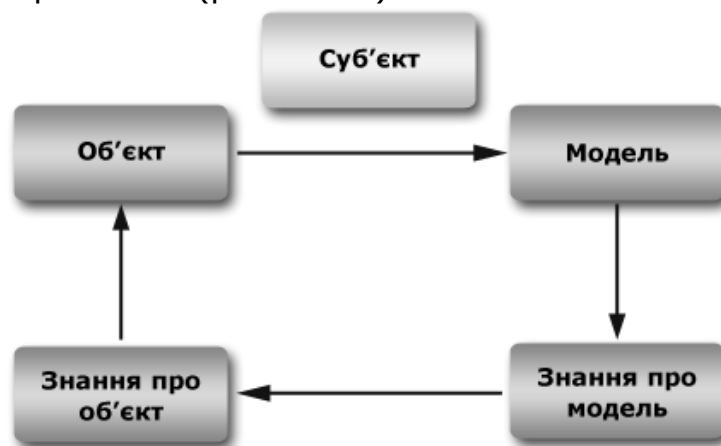


Рис. 1.1.1. Узагальнений алгоритм створення моделі

Схему рис. 1.1.1 можна пояснити такою послідовністю дій (алгоритмом):

- 1 – вивчення реального об'єкта та побудова на його основі моделі;
- 2 – дослідження моделі;
- 3 – поширення вивчених властивостей моделі на оригінал.

Треба при цьому мати на увазі, що при певній схожості моделі з оригіналом вони мають також істотні відмінності властивостей. Модель завжди певним чином спрощує оригінал. Основна мета при побудові моделі – забезпечити дослідження та аналіз функціонування реального об'єкта. Об'єкт реального світу має величезну кількість властивостей і характеристик, однак дослідників цікавить лише невелика та скінченна їх частина. Тому під час моделювання

завжди постає задача виділити ці основні властивості й перенести їх на модель.

Усі моделі можна поділити на дві категорії:

- експериментальні;
- теоретичні моделі.

Теоретичні моделі формулюються мовою тієї чи іншої предметної галузі. Розрізняють фізичні, біологічні, економічні моделі тощо. Із цього ряду виділимо математичні моделі.

Математичне моделювання (англ. mathematical simulation) – метод дослідження процесів або явищ шляхом створення їхніх математичних моделей і дослідження цих моделей. В основу методу покладено ідентичність форми рівнянь і однозначність співвідношень між змінними в рівняннях оригіналу (прототипу) та моделі, тобто, їхню аналогію. Математичні моделі досліджуються, як правило, за допомогою цифрових обчислювальних машин, комп'ютерів.

Математична модель (англ. mathematic model) – система математичних співвідношень, які описують досліджуваний процес, явище, або систему. Математична модель має важливе значення для таких наук, як: економіка, екологія, соціологія, фізика, хімія, механіка, інформатика, біологія, та ін.

Унаслідок різних підходів до створення математичних моделей розрізняють:

- структурні моделі;
- функціональні моделі.

Структурна модель із деякою точністю імітує внутрішню будову об'єкта. При її побудові структуру об'єкта спрощують. У результаті модель повторює поведінку об'єкта на деякій множині вхідних впливів.

Для побудови функціональної моделі використовують результати спостережень за об'єктом, що моделюється в різних ситуаціях за різних впливів. Структуру об'єкта при цьому не аналізують. Така математична модель повторює поведінку об'єкта (зміну характеристик, що моделюються) у випадках, для яких є результати спостережень. Виродженим випадком такого підходу є модель типу «чорної скриньки».

Процес математичного моделювання можна розділити на низку характерних етапів, зокрема:

### ***1. Аналіз предметної області.***

Математичне моделювання починають з аналізу предметної області. На цьому етапі визначають об'єкт дослідження, виділяють усі компоненти середовища, у якому перебуває об'єкт, аналізують вплив середовища й можливі стани об'єкта.

### ***2. Побудова моделі предметної області.***

На наступному етапі формулюють модель предметної області. Вже в цей момент об'єкт дослідження замінюють його образом – моделлю. У моделі описують, які властивості об'єкта важливі з погляду дослідника. Якщо будують структурну математичну

модель, то в моделі предметної області описують структурні компоненти об'єкта, їх взаємозв'язки, типи вхідних впливів і вихідні сигнали.

### **3. Математичне формулювання задачі.**

На основі аналізу предметної області будують математичну модель. Математична модель існує у формі записів із використанням прийнятих математичних символів і відображає властивості об'єкта – закони, яким він підпорядковується, зв'язки, які властиві його складовим частинам тощо.

### **4. Вибір методу досліджень. Теоретичне дослідження.**

Для дослідження записаної математичної моделі дослідник підбирає відповідний математичний апарат. Використовуючи вибрані теоретичні методи, можна отримати нові знання про об'єкт.

### **5. Математична модель. Числовий експеримент.**

Математичну модель можна будувати як на основі створеного формального опису процесу, так і прямо використовуючи модель предметної області. Математичні моделі, призначені для безпосереднього використання, називають імітаційними. Математичну модель треба адаптувати для застосування числових методів. Наприклад, для неперервної моделі будують дискретний аналог.

### **6. Тестування моделі.**

Як для математичної, так і для кібернетичної моделі треба визначити ступінь адекватності, тобто відповідність моделі до модельованого об'єкта. Під адекватністю розуміють, з одного боку, правильний якісний опис реального об'єкта. Наприклад, стійкість динаміки моделі має підтверджуватися стійкістю оригіналу, і навпаки. З іншого боку, у випадках, коли це можливо, модель повинна правильно описувати об'єкт із кількісного погляду за заданими характеристиками з достатньою точністю.

Не для всіх моделей розумно вимагати кількісної адекватності. Наприклад, для соціологічних чи деяких економічних моделей важливим є адекватний опис принципів поведінки соціальних груп або економічних агентів, відповідно, а не їх кількісні характеристики.

Крім того, для моделі мають виконуватися закони предметної області, про які відомо заздалегідь. Це можуть бути феноменологічні або напівемпіричні закони (закон Ньютона у фізиці) або результати, отримані з використанням інших методів дослідження.

### **7. Аналіз та інтерпретація результатів.**

На підставі результатів теоретичного дослідження й числових експериментів у термінах предметної області треба сформулювати певні закономірності. Це можуть бути, наприклад, прогнози на майбутнє, умови ефективності тих чи інших управлінських рішень, визначення найкращих (оптимальних) параметрів функціонування об'єкта (системи) тощо. Особливо цінним є неочікуваний результат, який пощастило отримати за рахунок застосування математичного моделювання й використання методів математичного дослідження, тобто деяка нова якість моделі.

Для того, щоб бути корисною, математична модель повинна задовольняти деяким вимогам, що мають рекомендаційний і суб'єктивний характер. Розглянемо вимоги, які зазвичай задовольняє якісна математична модель.

- Вимога адекватності. Модель повинна задовольняти умову адекватності відносно вибраної системи характеристик. Під адекватністю моделі розуміють:

а) Правильний якісний опис об'єкта за вибраними характеристиками. Наприклад, стійкість руху моделі свідчить про стійкість реального об'єкта.

б) Правильний якісний опис за вибраними характеристиками з деякою розумною мірою точності.

Отже, адекватність визначається не тільки об'єктом і моделлю, а також заданою множиною характеристик, що моделюються. Іноді кажуть про міру адекватності моделі, розуміючи під цим частку істинності моделі відносно вибраної множини характеристик.

- Невраховані фактори. Формулюючи математичну модель, дослідник завжди нехтує низкою факторів, які вважає неістотними. Інші характеристики об'єкта дослідження ідеалізуються. Існує поняття стійкості (грубості) моделі, що означає здатність моделі зберігати якісні властивості при застосуванні в реальному середовищі. Звісно, існує деякий інтервал параметрів, на якому не можна чітко визначити, яка модель адекватніша – стійка чи нестійка.

- Простота та оптимальність моделі. Вимогу простоти та оптимальності складно формалізувати. Під простотою варто розуміти обсяг зусиль, що повинен докласти дослідник для вивчення моделі. У цілому простота й адекватність – суперечливі властивості. Для поліпшення адекватності може виникнути потреба у громіздкій системі з великою кількістю рівнянь, які складно досліджувати. Модель достатньо проста, якщо сучасні методи дослідження дають можливість із розумними витратами й задовільною точністю робити якісний і кількісний аналіз вибраних характеристик та розуміти результати

- Ієрархія змінних. Значущість змінних і параметрів може бути різною. Змінні, що з'являються в головних залежностях, називають основними, а інші – другорядними. Особливо важливою є класифікація змінних за темпом зміни в часі. При постановці задачі визначають деякі характерні значення – основні масштаби шкали часу та шкали простору. Виходячи із заданої часової шкали розрізняють нормальні, повільні та швидкі змінні. Повільні змінні можна брати в моделі за параметри.

Швидкі змінні поділяють на короткочасні й тривалі. Перші легко замінити середніми значеннями. Другі відіграють

важливу роль при аналізі перехідних процесів, що пов'язують один усталений режим з іншим.

За аналогією змінні класифікують також за просторовим впливом: близькі, далекі, дуже далекі. Таким чином установлюють деяку ієрархію змінних. Часто ефективним методом розв'язання задач може бути перехід від складної моделі з великою кількістю мікрозмінних до простішої з невеликою кількістю макрозмінних. Прикладом такого підходу є перехід від рівнянь, що описують траєкторію руху молекул, до рівнянь із частинними похідними, що використовують поняття температури й щільності.

- Інші вимоги. Різні дослідники зазначають також інші фактори, що впливають на властивості й розвиток моделі – феноменологічні й напівемпіричні закони. Ці закони існують у предметній області і від того, чи виконуються вони, залежить адекватність моделі. У класичній механіці це, наприклад, закони Ньютона й закон Гука.

Залежно від характеру процесів типи математичного моделювання поділяють на:

1. Детерміноване моделювання відображає детерміновані процеси, тобто процеси, в яких припускають повну відсутність випадкових впливів.
2. Стохастичне моделювання відображає ймовірнісні події та процеси. При моделюванні аналізують низку реалізацій випадкового процесу та оцінюють його характеристики, тобто набір однорідних реалізацій.
3. Статичне моделювання передбачає незмінність досліджуваного явища в часі. Будують математичну модель, що відображає поведінку об'єкта в цілому.
4. Динамічне моделювання служить для опису поведінки об'єкта в будь-який довільний змінний момент часу.
5. Дискретні, дискретно-неперервні й неперервні математичні моделі є конкретизацією динамічних моделей. Частіше за все використовують системи звичайних диференціальних рівнянь, рівнянь із частинними похідними, різниці рівняння, рівняння з післядією та інтегральні рівняння.

Математичне моделювання можна поділити на такі:

- Аналітичне моделювання, під яким зазвичай розуміють власне розробку математичного апарату, тобто запис функціональних співвідношень. Отримані співвідношення вивчають формальними методами математичних досліджень.
- Імітаційне моделювання, при якому на підставі вибраної математичної моделі та алгоритму її реалізації проводять обчислювальні експерименти, що дає змогу кількісно оцінювати адекватність вибраної моделі та прогнозувати поведінку реального об'єкта.



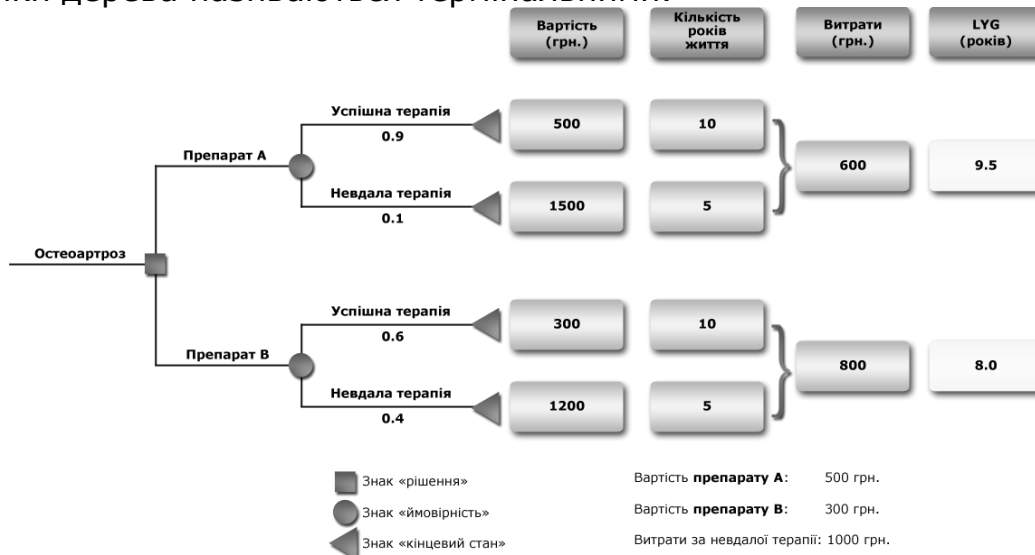
У якості прикладу застосування методів математичного моделювання в галузі охорони здоров'я можна вказати на так звані фармако-економічні дослідження, які використовують методи моделювання. Фармако-економічні дослідження найчастіше використовують такі методи моделювання як-от: «дерево» дискретних подій (рис. 1.1.2), метод Монте-Карло, математичні та статистичної моделі.

Зокрема, «дерево рішень» – це метод математичного моделювання процесу лікування у вигляді діаграми, яка ілюструє ймовірність кожного результату, а також його вартість для конкретної ситуації, якщо не брати до уваги фактор часу. Побудова моделі у формі «дерева рішень» можлива за умов:

- аналізу внутрішніх складових системи;
- у підсумку аналізів кількох медичних технологій, які мають різні ймовірності досягнення різних результатів;
- за умов аналогічності вимірюваних показників та кількісних оцінок кожного результату;
- якщо відома ймовірність кожного досяжного результату під час вивчення альтернативних медичних технологій.

Діаграма «дерева рішень» є розгалуженою структурою (рис. 1.1.2). Гілки дерева, які самі по собі презентують вибір конкретної технології, або ж появи побічних ефектів препарату, можуть бути першого, другого, третього і наступних порядків.

Кожна гілка дерева рішень закінчується клінічно значущим, на думку дослідника, результатом: наприклад, одужання або покращення клінічних індикаторів, чи, навпаки, смерть пацієнта. Останні гілки дерева називаються термінальними.



**Рис. 1.1.2. «Дерево рішень» фармако-економічного дослідження**

Розгалуження називаються вузлами, вони є точками, де відбуваються різні події. Ймовірність кожного клінічного результату розраховується як десятинний дріб (в інтервалі від 0 до 1), в

результаті чого сума ймовірностей на гілках одного порядку складає одиницю (рис. 1.1.2).

Далі обчислюють вартість альтернативних схем терапії шляхом послідовного перемноження значень ймовірностей за кожною гілкою (з лівого боку до правого) і наступного множення отриманого значення ймовірності на величину значущості результату, представлену в кінці гілки.

Рисунок 1.1.2 показує приклад простого дерева рішень для двох альтернативних медичних технологій під час лікування артрозу. Як видно з рис. 1.1.2 застосування препарату А гарантує пацієнту як менші затрати, так і більше математичне очікування тривалості життя ( $LYG = 9.5$  років).

## Лекція 2

*«Якщо ви думаєте, що компетентність коштує надто дорого, спробуйте необізнаність – буде коштувати ще дорожче»*  
Йохан Стаель фон Хольстайн

1. Методи побудови математичних моделей систем і процесів.
2. Класифікація та опис моделей.

### 1 Методи побудови математичних моделей систем і процесів

#### 1.1. Аналітичне моделювання

Для цього методу моделювання характерним є запис процесів (або функцій системи) у вигляді деяких функціональних математичних співвідношень: алгебраїчних, диференціальних, інтегральних рівнянь, або ж їх комбінацій.

Аналітична математична модель звичайно досліджується такими методами як:

- аналітичний – коли намагаються отримати явні аналітичні вирази для характеристик моделі;
- числовий – якщо не вдається знайти загальні аналітичні вирази або рішення рівнянь, які описують систему, чи процес;
- якісним – коли за відсутності точних рішень знаходять та аналізують деякі їх властивості.

Утім, аналітичні рішення вдається отримати лише в обмеженій кількості випадків для відносно простих рівнянь, або їх систем. У більшості реальних досліджень точні аналітичні рішення або неможливі, або пов'язані з величезними ресурсними витратами.