

Рис. 3.4.6. Хвиля поперечних коливань струни у початковий момент часу $t = 0$

Лабораторна робота 5

Рівняння Нав'є-Стокса: течія Пуазейля

1. Засоби програмного підпаketу Physics[Vectors].
2. Рівняння Нав'є-Стокса та Нав'є в моделях гемодинаміки.
3. Течія Пуазейля та закон Хагена-Пуазейля.
 - 3.1. Течія Пуазейля.
 - 3.2. Закон Хагена-Пуазейля.

1 Засоби програмного підпаketу Physics[Vectors]

Підпаket програм **Physics[Vectors]** є частиною більш об'ємного паketу **Physics**, призначеного для роботи фахівців із фізики. Підпаket програм базується на алгебраїчному представленні абстрактних векторів та векторних функцій, як «не прив'язаних» до певної системи координат, так і заданих у декартовій, циліндричній або сферичній системах координат. Отже, програми підпаketу дозволяють працювати як з абстрактними векторами, так і з векторами в межах однієї з трьох систем координат.

Для трьох зазначених вище систем координат прийняті наступні позначення.

Для одиничних векторів-ортів:

- $(_i, _j, _k)$ – декартові одиничні вектори (орти);
- $(_r, _φ, _k)$ – циліндричні орти;
- $(_r, _θ, _φ)$ – сферичні орти.

Для координат точки:

- (x, y, z) – декартові координати точки;
- $(ρ, φ, z)$ – циліндричні координати;
- $(r, θ, φ)$ – сферичні координати.

Якщо підпакет завантажений у стандартному графічному інтерфейсі уведенням команди **Physics[Setup](mathematicalnotation=true)**, вектори та орти відображаються в рядках виводу результатів відповідно зі стрілками та капелюшками над символами, як це прийнято у фізичних обчисленнях. Диференціально-векторні оператори, такі як (Nabla, Laplacian, etc.) також мають традиційне символічне позначення – трикутник вістрям донизу, як у фізичних джерелах. Підпакет містить такі команди:

- &x;
- +;
- . (команда у вигляді крапки);
- ChangeBasis;
- Component;
- Curl;
- DirectionalDiff;
- Divergence;
- Gradient;
- Identify;
- Laplacian;
- Nabla;
- Norm;
- Setup;
- diff.

Перші три команди дозволяють отримувати векторний добуток векторів, суму та різницю, а також скалярний добуток відповідно. Сутність решти команд зрозуміла з їх імен.

```
| > restart;
```

```
| > with(Physics[Vectors]);
```

[&x, `+`, `.` , ChangeBasis, Component, Curl, DirectionalDiff, Divergence, Gradient, Identify, Laplacian, ∇, Norm, Setup, diff] , (3.5.1)

```
| > Setup(mathematicalnotation=true);
```

[mathematicalnotation = true] . (3.5.2)

Задамо вектори у двох різних системах координат:

```
| > A_:=f1(x,y,z)*_i+y^2*_j+f3(x,y)*_k;
```

$$\vec{A} := f1(x, y, z) \hat{i} + y^2 \hat{j} + f3(x, y) \hat{k} . \quad (3.5.3)$$

```
| > Identify(A_); # Цей вектор належить до першої
```

(декартової системи координат)

1 . (3.5.4)

```
| > B_:=3*_rho+rho^2*_phi+sin(z)*_k;
```

Identify(B_); # Вектор ідентифіковано як належний до
циліндричної системи

$$\vec{B} := \rho^2 \hat{\phi} + 3 \hat{\rho} + \sin(z) \hat{k} , \quad (3.5.5)$$

2 .

```
| > Curl(B_);
```

$$\begin{aligned}
 & \text{Divergence (B_)} ; \\
 & \text{Divergence (A_)} ; \\
 & \text{Identify (Divergence (A_))} ; \# \text{ Скаляр} \\
 & \qquad 3 \rho \widehat{k} , \\
 & \qquad \frac{3}{\rho} + \cos(z) , \\
 & \qquad \frac{\partial}{\partial x} fI(x, y, z) + 2 y , \\
 & \qquad 0 .
 \end{aligned} \tag{3.5.6}$$

$$\begin{aligned}
 & > \% \text{Laplacian (B_)} ; \# \text{ Пасивна форма команди -} \\
 & \text{записується, але не виконується} \\
 & \text{Laplacian (B_)} ; \# \text{ Активна (виконувана) форма команди} \\
 & \qquad \nabla^2 (\rho^2 \widehat{\phi} + 3 \widehat{\rho} + \sin(z) \widehat{k}) , \\
 & \qquad - \frac{3 \widehat{\rho}}{\rho^2} + 3 \widehat{\phi} - \sin(z) \widehat{k} .
 \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

$$\begin{aligned}
 & > \text{Norm (A_)} ; \\
 & \text{Norm (B_)} ; \\
 & \qquad \sqrt{fI(x, y, z)^2 + y^4 + f3(x, y)^2} , \\
 & \qquad \sqrt{9 + \rho^4 + \sin(z)^2} .
 \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

2 Рівняння Нав'є-Стокса та Нав'є в моделях гемодинаміки

Рівняння Нав'є-Стокса, названі на честь Клода-Луї Нав'є (Франція) та Габріеля Стокса (Англія), описують течію в'язкої, стискуваної рідини або газу. Ці рівняння виникають при застосуванні другого закону Ньютона до руху рідини, і у векторному, не проєктованому в певну систему координат вигляді, можуть бути записані так:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} \right) - \eta \nabla^2 \vec{v} + \left(\zeta + \frac{\eta}{3} \right) \cdot \nabla (\nabla, \vec{v}) + \nabla P = 0, \tag{3.5.9}$$

де $\vec{v}(\vec{r}, t)$ – поле швидкостей потоку; ρ – густина рідини; η, ζ – коефіцієнти, які характеризують в'язкість рідини; $P(\vec{r}, t)$ – поле тисків у рідині; $\nabla, \nabla^2 = \Delta$ – диференціальні оператори набла та Лапласа відповідно.

Рівняння (3.5.9) містять 5 невідомих: три компоненти вектора швидкості $\vec{v}(\vec{r}, t)$, тиск $P(\vec{r}, t)$ та густина рідини ρ . Теж саме векторне рівняння (3.5.9) містить лише три скалярні рівняння, якщо записати його в тій, чи іншій системі координат. Тому рівняння (3.5.9) звичайно розглядають в системі з рівнянням безперервності у формі:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}). \quad (3.5.10)$$

Система рівнянь (3.5.9)-(3.5.10) є теоретичною основою гемодинаміки – прикладного розділу гідродинаміки, який вивчає течію крові в живих організмах. Більшість гемодинамічних моделей розглядають кров як рідину, яка практично не стискається [30], тобто

$\rho = \text{const}$, звідки виникає, що $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, отже, й наступне:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \rho \cdot \operatorname{div}(\vec{v}) = (\nabla, \vec{v}) = 0. \quad (3.5.11)$$

Умова (3.5.11) спрощує рівняння (3.5.9) для рідини, що не стискається, до такого виразу:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} \right) - \eta \nabla^2 \vec{v} + \nabla P = 0, \quad (3.5.12)$$

який отримав назву **рівняння Нав'є**. Рішення системи рівнянь (3.5.9)-(3.5.10) або (3.5.12), які описують течії в'язкої рідини аналітичними методами, знайти в загальному випадку неможливо. Лише у разі деяких найпростіших видів течій ці рівняння мають відомі аналітичні розв'язки. Задачі, котрі мають практичне значення, звичайно розв'язуються за допомогою наближених чисельних методів на комп'ютерах.

Складнощі аналітичного рішення цих рівнянь переважно зумовлені нелінійним фактором $(\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v}$ у рівняннях Нав'є-Стокса та Нав'є, який часто називається конвективним прискоренням потоку.

Конвективне прискорення потоку рідини, яке також називають ефектом Бернуллі, не пов'язане з явною залежністю вектора швидкості течії від часу. Конвективне прискорення виникає за рахунок суто геометричних причин у місцях, де потік звужується (так звані конфузори), або розширюється (дифузори). Звужуючись у конфузорах, тобто зменшуючи площу свого перетину, потік прискорюється, і при цьому тиск зменшується. У дифузорах потік, навпаки, уповільнюється, а тиск в ньому зростає.

Конвективне прискорення можна переписати в такому вигляді:

$$(\vec{v}, \nabla) \cdot \vec{v} = \frac{\nabla(\vec{v}, \vec{v})}{2} + [\operatorname{curl}(\vec{v}) \times \vec{v}]. \quad (3.5.13)$$

3 Течія Пуазейля та закон Хагена-Пуазейля

Ініціювати рух в'язкої рідини можна такими двома способами:

1. За рахунок зовнішніх сил (об'ємних сил або сил тиску), наприклад, створивши перепад тиску на кінцях горизонтальної трубки або виводячи трубку з горизонтального положення у вертикальне і використовуючи сили тяжіння.
2. За рахунок зміщення стінки судини, яка обмежує рідину.

3.1. Течія Пуазейля

Стаціонарна течія, викликана зовнішніми силами тиску, називається течією Пуазейля, а течія, викликана переміщенням стінок провідного каналу, – течією Куетта. Течію Пуазейля можна розглядати як просту модель для стаціонарної течії крові по кровоносних судинах, якщо нехтувати зміною їх перетинів (так званими пульсаціями) під час пропускання потоків крові [30]. Розглянемо кровоносну судину у вигляді циліндричного каналу постійного перерізу, як це показано на рис. 3.5.1. Необхідні позначення також показані на рисунку.

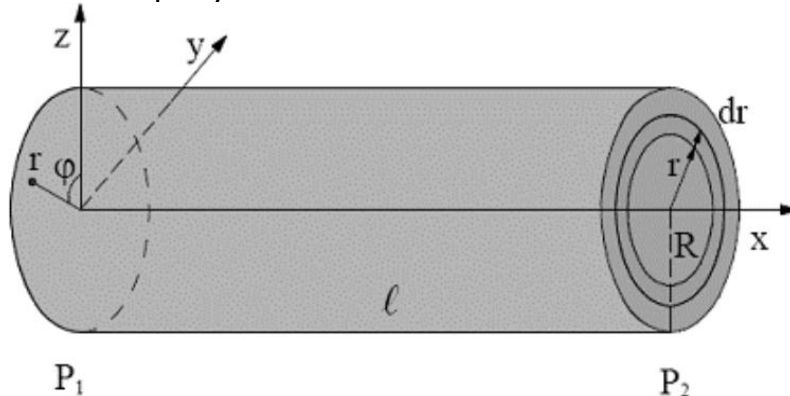


Рис. 3.5.1. Циліндричний канал радіусу R та системи координат. декартова (x, y, z) та циліндрична (ρ, ϕ, z) [31]. Вісь Oz циліндричної системи спрямована уздовж осі Ox декартової системи координат

Течія створюється і підтримується незмінним в часі перепадом тисків $P_1 > P_2$ поміж двома паралельними перерізами каналу:

```
> restart;
with(Physics[Vectors]);
Setup(mathematicalnotation=true);
[&x, `+`, `.`], ChangeBasis, Component, Curl, DirectionalDiff,
Divergence, Gradient, Identify, Laplacian, ∇, Norm, Setup, diff], (3.5.14)
[mathematicalnotation = true].
```

Надалі використовуємо циліндричну систему координат (ρ, ϕ, z) , причому, як вказано на рис. 3.5.1, вісь Oz циліндричної системи спрямована уздовж осі Ox декартової системи координат. Запишемо залежність поля тиску в каналі від координат:

```
> P:=unapply(P1+(P2-P1)*z/L, rho, phi, z); # Тиск
лінійно спадає уздовж каналу і не залежить від
радіальної та кутової координат (rho, phi)
P := (rho, phi, z) ↦ P1 + (P2 - P1) z / L, (3.5.14)
```

де L – довжина каналу (судини).

Циліндрична симетрія каналу допускає лише один напрям для вектора швидкості потоку; напрям уздовж осі каналу, тобто

уздовж циліндричної осі Oz . Отже, вектор швидкості течії має лише одну компоненту, яка паралельна одиничному вектору-орту \vec{k} , проте її норма (модуль) v_z теоретично може залежати від кожної з трьох координат (ρ, ϕ, z) :

$$\begin{aligned} | > \mathbf{v}_ := \mathbf{vz}(\rho, \phi, z) * \mathbf{k}; \\ \vec{v} & := v_z(\rho, \phi, z) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

Рівняння безперервності для течії рідини, яка не стискається, має такий вигляд:

$$\begin{aligned} | > \text{Divergence}(\mathbf{v}_) = 0; \\ \frac{\partial}{\partial z} v_z(\rho, \phi, z) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

З виразу (3.5.16) виникає, що модуль швидкості v_z не залежить від координати z . З міркувань циліндричної симетрії також виникає, що він також не може залежати від кутової координати ϕ . Отже, модуль швидкості залежний лише від радіальної координати ρ :

$$\begin{aligned} | > \mathbf{v}_ := \mathbf{vz}(\rho) * \mathbf{k}; \\ \vec{v} & := v_z(\rho) \hat{k}. \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

За таких умов конвективне прискорення – нелінійний фактор у рівнянні Нав'є, обертається в нуль, що можна перевірити безпосередньо, застосовуючи формулу (3.5.13) до вектору швидкості (3.5.17):

$$\begin{aligned} | > \%Nabla(\mathbf{v}_ \cdot \mathbf{v}_) / 2 + (\%Curl(\mathbf{v}_) \&\mathbf{x} \mathbf{v}_) = \\ \text{Nabla}(\mathbf{v}_ \cdot \mathbf{v}_) / 2 + (\text{Curl}(\mathbf{v}_) \&\mathbf{x} \mathbf{v}_); \\ \frac{\nabla v_z(\rho)^2}{2} + v_z(\rho) ((\nabla \times (v_z(\rho) \hat{k})) \times \hat{k}) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

Найстарша похідна від вектору швидкості у рівнянні Нав'є в циліндричній системі координат матиме такий вигляд:

$$\begin{aligned} | > -\%Laplacian(\mathbf{v}_) = -\text{Laplacian}(\mathbf{v}_); \\ -\nabla^2(v_z(\rho) \hat{k}) = -\frac{\hat{k} \left(\left(\frac{d^2}{d\rho^2} v_z(\rho) \right) \rho + \frac{d}{d\rho} v_z(\rho) \right)}{\rho}, \end{aligned} \quad (3.5.19)$$

і очевидний напрям уздовж осі каналу, тобто уздовж одиничного вектору-орту \vec{k} . З урахуванням умови стаціонарності течії, що передбачає $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, можемо тепер записати рівняння Нав'є у такому вигляді:

$$\begin{aligned} | > \text{Navier} := \eta * \text{Laplacian}(\mathbf{v}_) = \text{Gradient}(P(\rho, \phi, z)); \\ \text{Navier} := \frac{\eta \hat{k} \left(\left(\frac{d^2}{d\rho^2} v_z(\rho) \right) \rho + \frac{d}{d\rho} v_z(\rho) \right)}{\rho} = -\frac{(-P_2 + P_1) \hat{k}}{L}. \end{aligned} \quad (3.5.20)$$

З очевидною початковою умовою нульової швидкості потоку на стінках каналу:

$$| > \text{ics} := \text{vz}(\mathbf{R}) = 0;$$

$$\text{ics} := \text{vz}(\mathbf{R}) = 0, \quad (3.5.21)$$

отримаємо рішення поставленої задачі Коші (3.5.20), (3.5.21):

$$| > \text{ans} := \text{dsolve}(\{\text{Navier}, \text{ics}\}, \text{vz}(\text{rho}));$$

$$\begin{aligned} \text{ans} := \text{vz}(\rho) = & \frac{\rho^2 P2}{4 L \eta} - \frac{\rho^2 P1}{4 L \eta} + _C1 \ln(\rho) - _C1 \ln(\mathbf{R}) \\ & + \frac{\mathbf{R}^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L} \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

Виходячи з фінітності (обмеженості) величини швидкості, необхідно покласти в (3.5.22) $_C1 = 0$. Інакше одна зі складових рішення прямуватиме до нескінченності $_C1 \cdot \ln(\rho) \rightarrow -\infty$, коли ρ прямуватиме до нуля ($\rho \rightarrow 0$). Отже, після такої підстановки маємо для залежності швидкості потоку від радіальної координати:

$$| > \mathbf{v} := \text{eval}(\text{rhs}(\text{ans}), _C1=0);$$

$$\mathbf{v} := \frac{\rho^2 P2}{4 L \eta} - \frac{\rho^2 P1}{4 L \eta} + \frac{\mathbf{R}^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L}. \quad (3.5.23)$$

Або у спрощеній формі:

$$| > \mathbf{v} := \text{simplify}(\text{factor}(\mathbf{v}));$$

$$\mathbf{v} := \frac{(-P2 + P1) (\mathbf{R}^2 - \rho^2)}{4 \eta L}. \quad (3.5.24)$$

З (3.5.24) видно, що швидкість прямо пропорційна перепаду тиску в каналі і обернено пропорційна його довжині та коефіцієнту в'язкості рідини. Параболічна залежність швидкості течії Пуазейля від радіальної координати $v(\rho)$ виникає з виразу (3.5.24). Профіль течії показаний на рис. 3.5.2. Максимальна швидкість спостерігається на осі каналу.

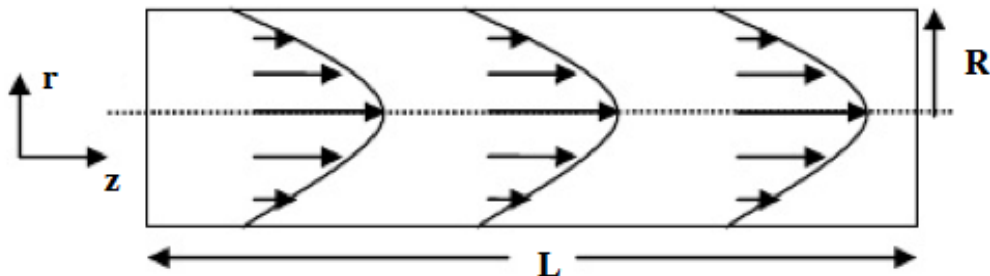


Рис. 3.5.2. Параболічні профілі течії Пуазейля

Зауважимо, що течія Пуазейля має ненульовий ротор швидкості:

$$| > \text{rot_v} := \text{simplify}(\text{Curl}(\mathbf{v} * \mathbf{k}));$$

$$\text{rot_v} := \frac{(-P2 + P1) \rho \hat{\phi}}{2 \eta L}. \quad (3.5.25)$$

Вектор ротору поля швидкостей (3.5.25) спрямований уздовж орту $\vec{\phi}$, тобто по дотичній до контуру кругового перетину каналу. Ненульовий ротор означає ненульову циркуляцію за відповідним контуром.

Максимальна швидкість потоку спостерігається на осі каналу:
`| > v_max:=eval(v, rho=0);`

$$v_{max} := \frac{R^2 (-P2 + P1)}{4 \eta L}. \quad (3.5.26)$$

3.2. Закон Хагена-Пуазейля

Обчислимо щосекундний об'єм рідини, яка тече крізь круговий поперечний перетин каналу. Для цього проінтегруємо швидкість потоку Пуазейля (3.5.24) крізь повний перетин каналу. В циліндричній системі координат елемент перетину каналу дається виразом:

$$dS = \rho \cdot d\rho \cdot d\phi. \quad (3.5.27)$$

Отже, для об'ємного щосекундного потоку рідини матимемо вираз у вигляді подвійного інтегралу:

`| > Q:=Int(Int(v*rho, rho=0..R), phi=0..2*Pi);`

$$Q := \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{(-P2 + P1) (R^2 - \rho^2) \rho}{4 \eta L} d\rho d\phi. \quad (3.5.28)$$

Виконаємо інтегрування і з інтегралу (3.5.28) матимемо:

`| > Q:=simplify(value(Q));`

$$Q := \frac{(-P2 + P1) R^4 \pi}{8 L \eta}. \quad (3.5.29)$$

Отриманий вираз (3.5.29) має назву закону Хагена-Пуазейля для щосекундного об'ємного розходу рідини під час стаціонарної течії у циліндричному каналі. Як видно з (3.5.29), він пропорційний четвертому ступеню радіусу каналу R та обернено пропорційний довжині судини L та коефіцієнту в'язкості рідини η .

Закон Хагена-Пуазейля можна використати для експериментального визначення коефіцієнту в'язкості рідини:

$$\eta = \frac{\pi(P1 - P2)R^4}{8QL}, \quad (3.5.30)$$

який можна знайти знаючи перепад тиску $(P1 - P2)$, довжину L та радіус труби R , а також об'ємний потік рідини Q , пропущений крізь канал за одиницю часу.

Варто нагадати, що цей закон має місце за умови ламінарної течії рідини у каналі з незмінною геометрією та за додаткової умови, що довжина каналу достатня і дозволяє розвинути в ньому саме ламінарній течії [31].

Критерієм ламінарності течії є так зване безрозмірне число Рейнольдса, яке дорівнює

$$Re = \frac{\rho v_{max} L}{\eta}. \quad (3.5.31)$$

Наприклад, для води критичне значення числа Рейнольдса приблизно дорівнює $Re_{cr} \approx 2300$. Якщо число Рейнольдса не перевищує критичного значення, течію рідини можна вважати ламінарною і користуватися законом Хагена-Пуазейля.

В'язкість крові помітно вища від в'язкості води, зокрема для кров'яної плазми удвічі, а для нормальної крові приблизно в 4 рази [30], тому хоча її густина лише незначно перевищує густину води, критичне значення числа Рейнольдса для крові помітно нижче, ніж у води. Вважається [30], що прояви турбулентності для кровотоку можливі вже за умови $Re_{cr} \approx 400$ (рис. 3.5.3).

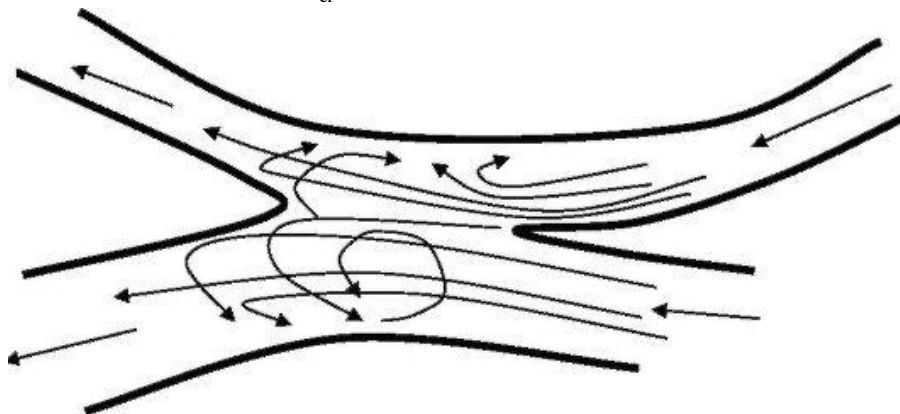


Рис. 3.5.3. Схема виникнення турбулентності потоку крові в судинному шунті

Лабораторна робота 6

Нелінійні моделі математичної фізики

1. Математична модель нелінійного фізичного маятника.
2. Солітони Кортевега-де-Вріза.
 - 2.1. Нелінійне рівняння Кортевега-де-Вріза та його солітонне рішення.
 - 2.2. Мультисолітонні рішення рівняння КдВ та взаємодія пари (дублету) солітонів.

1 Математична модель нелінійного математичного маятника

Фізичний маятник – тверде тіло довільної форми, яке під дією сили тяжіння здійснює коливання навколо нерухомої горизонталь-