Практикум 5

Нелінійні диференціальні рівняння як моделі процесів та систем. Їх особливості

1. Нелінійні системи та їх моделі.
- **1.1.** Осцилятор Дуффінга.
- **1.2.** Система рівнянь та аттрактор Лоренца.

2. Нелінійні та відокремлені хвилі.
- **2.1.** Лінійні та нелінійні хвилі.
- **2.2.** Рівняння Кортевега-де-Вріза: кіноїдальні хвилі та відокремлені хвилі – солітони.

1 Нелінійні системи та їх моделі

Нелінійність є загальною властивістю динамічних систем, а їх лінійна поведінка – швидше виключення з правил. Зокрема всі фізичні системи фактично є нелінійними. Нелінійні системи можуть демонструвати досить складну поведінку на зовнішнє гармонічне збудження, у той час як реакція лінійної системи завжди є передбачуваними і також завжди є періодичним процесом на частоті зовнішнього збудження.

Нелінійні системи додатково схильні до двох протилежних тенденцій поведінки: з одного боку до хаотичної поведінки, а з іншого – до самоорганізації. Навіть слабко нелінійні системи здатні демонструвати цікаві та складні явища типу біфуркацій, перескакувань, субгармонічних та ультрагармонічних коливань, автоколивань, межевих циклів та хаосу.

Загальновідомі такі ознаки нелінійності систем як-от [16]:
- порушення принципу суперпозиції;
- наявність на виході системи коливань із частотами, які відсутні в спектрі вхідного збудження;
- неізохронність – залежність частоти коливань від їх амплітуди;
- можливість реалізації декількох режимів коливань на фіксованій частоті зовнішнього збурення.

Зауважимо, що перелічені властивості проявляються не в усіх нелінійних системах. Найбільш розповсюдженим критерієм є перша з перерахованих вище ознак – порушення принципу суперпозиції. Аби виявити порушення принципу суперпозиції достатньо випробувати систему двома різними вхідними тестовими сигналами під час їх окремої та спільної дії. Якщо система є лінійною, то її реакція на суму тестових сигналів завжди дорівнює сумі реакцій на кожне з них.

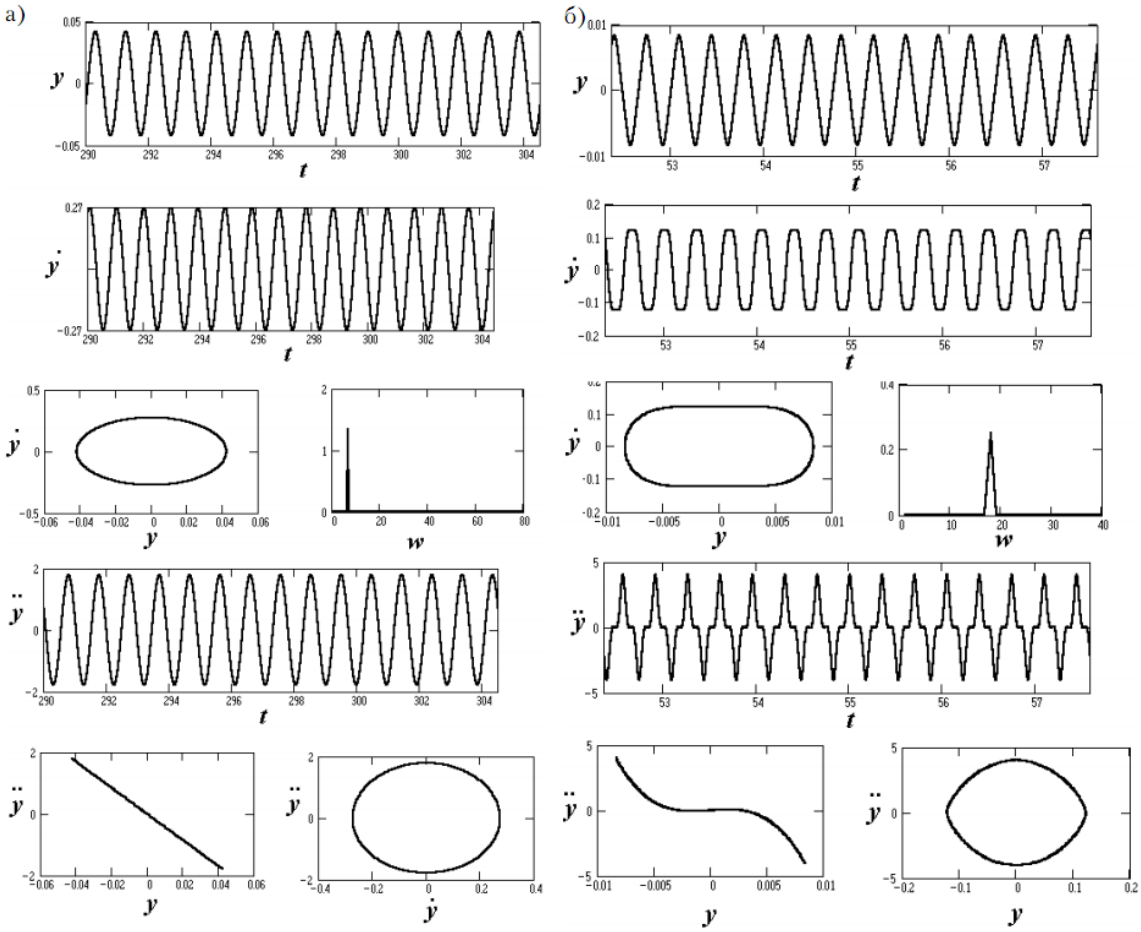
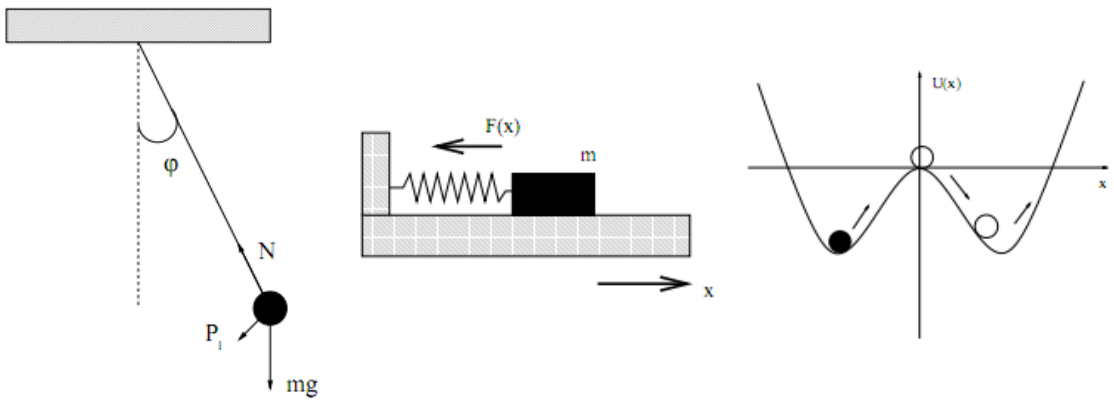


Рис. 2.5.1. Часові характеристики та фазові діаграми для двох систем [16]: а) лінійної коливальної системи; б) нелінійної коливальної системи

Як видно з рис. 2.5.1, часові характеристики та фазові діаграми для нелінійних систем суттєво відмінні від лінійних аналогів. Особливо це стосується акселограм – графіків прискорення, а також фазових діаграм. Розглянемо два конкретні приклади нелінійних систем та їх математичних моделей.

1.1. Осцилятор Дуффінга

Осцилятор Дуффінга є простим прикладом нелінійної системи. Прості варіанти механічних систем, які описуються рівнянням Дуффінга показано на рис. 2.5.2. Утім, існують також електронні системи, які описуються тим самим рівнянням.



а) б) в)

Рис. 2.5.2. Приклади механічних коливальних систем, які описуються рівнянням Дуффінга: а) математичний маятник за умови відносно невеликих кутів відхилення; б) вантаж на пружині з нелінійною жорсткістю $F(x)$; в) частинка, яка рухається в потенціальному полі з двома симетричними мінімумами (потенціальними ямами)

Рівняння для осцилятора Дуфінга має такий вигляд:

```
> restart: unprotect(gamma);
> duff:= diff(x(t),t$2) + alpha*diff(x(t),t) +
beta*x(t) + gamma*x(t)^3=0;
```

$$duff := \ddot{x}(t) + \alpha\,\dot{x}(t) + \beta\,x(t) + \gamma\,x(t)^3 = 0\,, \qquad (2.5.1)$$

Рівняння Дуффінга (2.5.1) також можна записати у вигляді еквівалентної йому системи двох рівнянь першого порядку:

```
> sysd:= diff(x(t),t)=y(t), diff(y(t),
t)=-alpha*y(t)-beta*x(t)-gamma*x(t)^3;
```

$$sysd := \dot{x}(t) = y(t),\ \dot{y}(t) = -\alpha\,y(t) - \beta\,x(t) - \gamma\,x(t)^3\,. \qquad (2.5.2)$$

З (2.5.2) видно, що розмірність фазового простору $(x(t), y(t))$ осцилятора $N = 2$, а сам простір є площиною. Визначимо точки рівноваги осцилятора на цій площині з рішення рівнянь:

```
> eq1:=y(t)=0;
eq2:=-alpha*y(t)-beta*x(t)-gamma*x(t)^3=0;
s:=solve({eq1,eq2},[x(t),y(t)]);
```

$$eq1 := y(t) = 0\,, \qquad (2.5.3)$$

$$eq2 := -\alpha\,y(t) - \beta\,x(t) - \gamma\,x(t)^3 = 0\,,$$

$$s := \left[\,[x(t) = 0, y(t) = 0],\ \left[x(t) = RootOf\left(\gamma_Z^2 + \beta\right), y(t) = 0\right]\right].$$

Уточнимо значення коренів другого рішення (2.5.3):

```
> allvalues(s[2,1]);
```

$$x(t) = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}\,,\ x(t) = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}\,. \qquad (2.5.4)$$

Отже, взагалі можуть існувати або одна точка рівноваги за умови, що параметри β, γ одного знаку, і це точка $P_0 : \{x = 0, y = 0\}$, або ж три точки рівноваги з додатковими за умо-

ви, що параметри β, γ мають різні знаки, причому симетричними відносно першої точками рівноваги $P_1 : \left\{ x = \sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0 \right\}$ та $P_2 : \left\{ x = -\sqrt{-\frac{\beta}{\gamma}}, y = 0 \right\}$.

Залежно від знаків та величин коефіцієнтів рівняння (2.5.3) характери цих трьох точок можуть змінюватися (табл. 2.5.1).

Таблиця 2.5.1

Точки рівно-ваги	**Умови на коефіцієнти рівняння Дуффінга [17]**			
	$\gamma > 0$		$\gamma < 0$	
	$\beta > 0$	$\beta < 0$	$\beta > 0$	$\beta < 0$
P_0	$\alpha < -2\sqrt{\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ – стійкий вузол	**Сідлова точка** за довільного значення та знаку параметра α	$\alpha < -2\sqrt{\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{\beta}$ – стійкий вузол	**Сідлова точка** задовіль-ного значення та знаку параметра α
P_1	**відсутня**	$\alpha < -2\sqrt{2\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{2\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий вузол	**Сідлова точка** за довільного значення та знака параметра α	**відсутня**
P_2	**відсутня**	$\alpha < -2\sqrt{2\beta}$ – нестійкий вузол $-2\sqrt{2\beta} < \alpha < 0$ – нестійкий фокус $0 < \alpha < 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий фокус $\alpha > 2\sqrt{2\beta}$ – стійкий вузол	**Сідлова точка** за довільного значення та знака параметра α	**відсутня**

Вирішимо числовим способом рівняння Дуффінга (2.5.1) з початковими умовами:

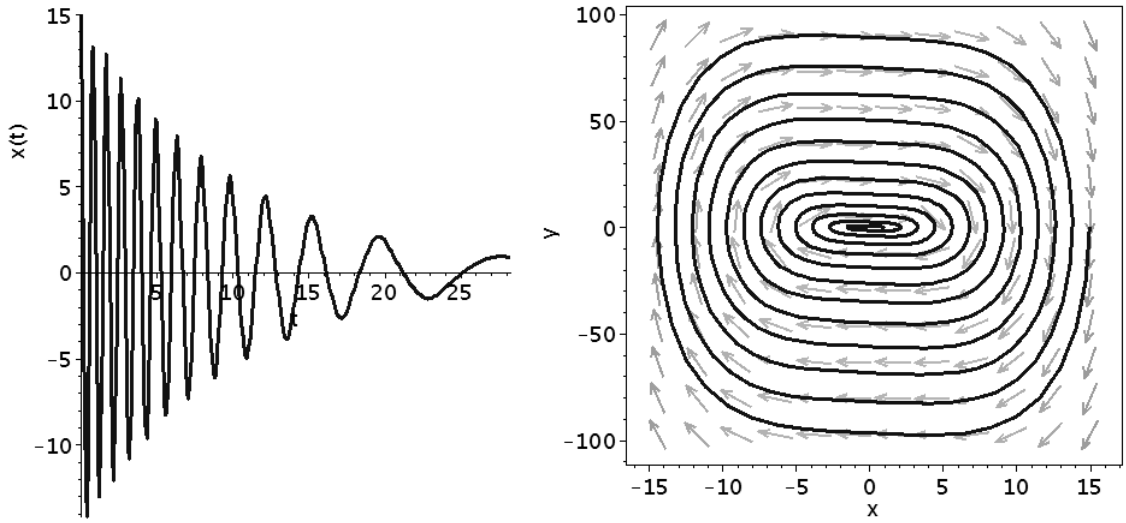
```
> duff1:=eval(duff, [alpha=0.3, beta=0.01,
gamma=0.4]);
ic1:=x(0)=15, D(x)(0)=0;
sysd1:=eval(sysd, [alpha=0.3, beta=0.01, gamma=0.4]);
ivs1:=x(0)=15, y(0)=0;
```

$$duff1 := \ddot{x}(t) + 0.3\,\dot{x}(t) + 0.01\,x(t) + 0.4\,x(t)^3 = 0\,, \qquad (2.5.5)$$
$$ic1 := x(0) = 15,\ \mathrm{D}(x)(0) = 0\,,$$
$$sysd1 := \dot{x}(t) = y(t),\ \dot{y}(t) = -0.3\,y(t) - 0.01\,x(t) - 0.4\,x(t)^3\,,$$
$$ivs1 := x(0) = 15,\ y(0) = 0\,.$$

```
> p1:=DEtools[DEplot](duff1, x(t), t=0..9*Pi,
[[ic1]],linecolor=blue, numpoints=300, labels=["t",
"x(t)"], labelfont=[HELVETICA,14], title=`Рис. 3а.
Осцилограма`):
p2:=DEtools[DEplot]([sysd1], [x(t), y(t)], t=0..9*Pi,
[[ivs1]], arrows=smalltwo, dirfield=[12,12],
color=magnitude[green, khaki], linecolor=blue,
numpoints=1500, axes=boxed, labels=["x", "y"],
labelfont=[HELVETICA,14], title=`Рис. 3б. Фазовий
портрет осцилятора Дуффінга`);
```

Відповідно до величин та знаків параметрів у виразі (2.5.5) маємо $(\gamma,\beta)>0$, а також $\alpha > 2\sqrt{\beta}$, отже, згасаючі коливання осцилятора відбуваються навколо стійкого вузла на початку координат.

```
> r:=Array(1..2, [p1,p2]):
plots[display](r, font=[HELVETICA,14],
labeldirections= ["horizontal", "vertical"]);
```



а) б)

Рис. 2.5.3. Осцилограма (а) та фазовий портрет осцилятора Дуффінга (б)

Зверніть увагу: період, отже, й частота, згасаючих коливань явно залежать від амплітуди, іншими словами коливання осциля-

тора Дуффінга не є ізохронними. Фазовий портрет свідчить про відмінність коливань від гармонічних.

1.2. Система рівнянь та аттрактор Лоренца

Система Лоренца була побудована як модель шару рідини, який підігрівався знизу. Втім, зараз нас цікавитиме не її фізична інтерпретація, а математичні деталі поведінки.

```
> restart: with(plots): with(DEtools):
> lor:=diff(x(t),t)=sigma*(y(t)-x(t)),
diff(y(t),t)=x(t)*(r-z(t))-y(t),
diff(z(t),t)=x(t)*y(t)-b*z(t);
```

$$lor := \dot{x}(t) = \sigma\,(y(t) - x(t)), \dot{y}(t) = x(t)\,(r - z(t)) - y(t), \dot{z}(t) = x(t)\,y(t) - b\,z(t) \quad . \qquad (2.5.6)$$

Оберемо конкретні значення для коефіцієнтів системи, а також визначимо початкові умови:

```
> lor1:=eval(lor, [sigma=10, b=8/3, r=27]);
ic1:=x(0)=-3/10, y(0)=-1/10, z(0)=1/2;
```

$$lor1 := \dot{x}(t) = 10\,y(t) - 10\,x(t), \dot{y}(t) = x(t)\,(27 - z(t)) - y(t), \dot{z}(t) = x(t)\,y(t) - \frac{8\,z(t)}{3} \quad , \qquad (2.5.7)$$

$$ic1 := x(0) = -\frac{3}{10}, y(0) = -\frac{1}{10}, z(0) = \frac{1}{2} \; .$$

Вирішимо систему рівнянь Лоренца числовим методом:

```
> ans1:=dsolve([lor1,ic1], [x(t),y(t),z(t)],
type=numeric, method=rkf45, output=listprocedure);
```

$$ans1 := [t = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, x(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, y(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}, z(t) = \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}] \quad . \qquad (2.5.8)$$

Отримаємо осцилограми шуканих функцій:

```
> xt:=eval(x(t), ans1);
yt:=eval(y(t), ans1);
zt:=eval(z(t), ans1);
```

$$xt := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\ , \qquad (2.5.9)$$
$$yt := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\ ,$$
$$zt := \mathbf{proc}(t)\ \ldots\ \mathbf{end\ proc}\ .$$

Зобразимо отримані осцилограми графічно (розрахунки потребують певного часу).

```
> st:=time():
p1:=plot(xt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3, color=navy,
gridlines=true, tickmarks=[5,8], title=`Рис. 4а.
Осцилограма x(t)`):
p2:=plot(yt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3, color=red,
gridlines=true, tickmarks=[5,8], title=`Рис. 4б.
```

```
Осцилограма y(t)`):
p3:=plot(zt, 4.5*Pi..8.25*Pi, thickness=3,
color=maroon, gridlines=true, tickmarks=[5,8],
title=`Рис. 4в. Осцилограма z(t)`):
tp:=time()-st;
```

$$tp := 2.449\,, \qquad (2.5.10)$$

```
> A:=Array(1..3, [p1,p2,p3]):
display(A, font=[HELVETICA,14]);
```

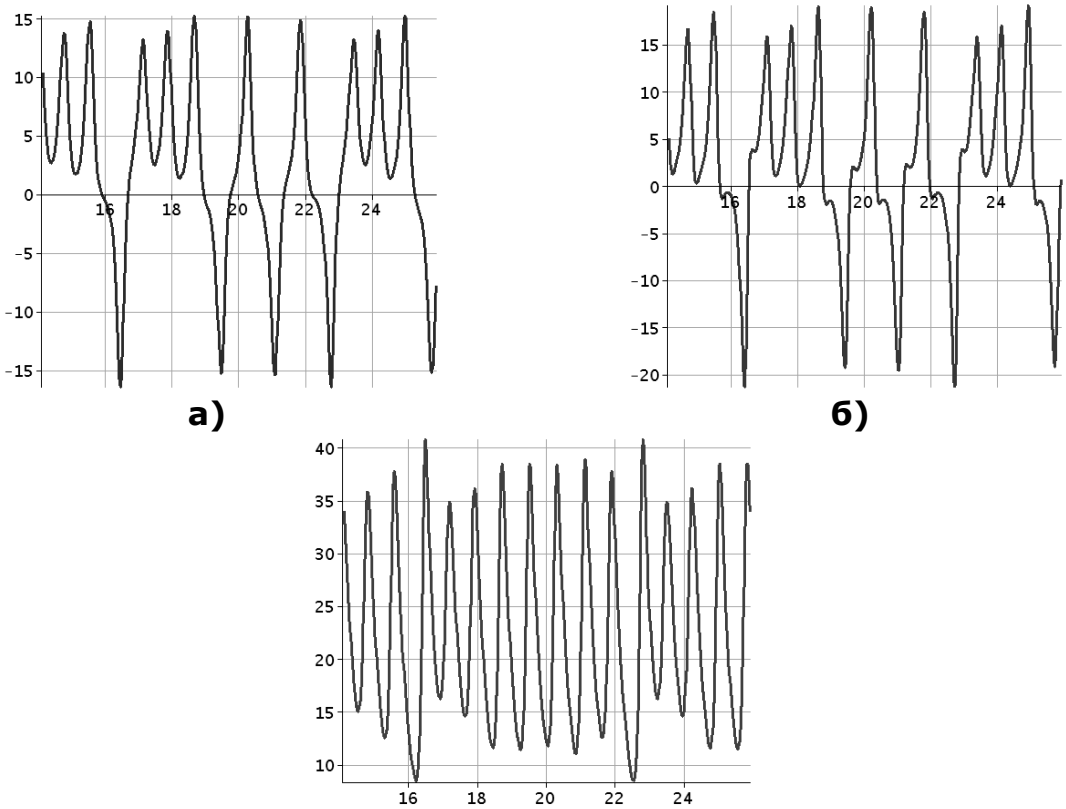


Рис. 2.5.4. Осцилограми функцій:
а) $x(t)$**, б)** $y(t)$**, в)** $z(t)$

Як видно з рис. 2.5.4, осцилограми є негармонічними і з виразно хаотичними складовими, тобто не періодичні.

Зобразимо фазовий портрет системи. Якщо розглядати траєкторію, то видно, що вона є нерегулярною кривою, яка тяжіє до обмеженої області фазового простору, яку власне і називають **аттрактором Лоренца**. Траєкторія є блукаючою, причому вона робить один виток праворуч, потім декілька витків ліворуч, знов праворуч і так далі.

```
> G:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-55,65,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],
```

```
labelfont=[HELVETICA,14], caption=`Рис. 5. Фазовий
портрет системи`):
display(G, labeldirections=[horizontal, horizontal,
horizontal]);
```

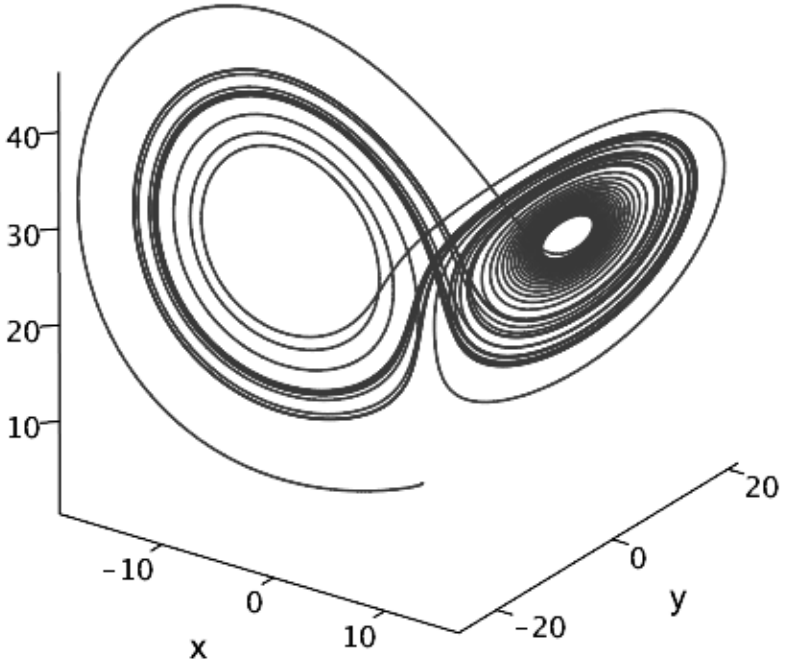


Рис. 2.5.5. Фазовий портрет системи

```
> g1:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-90,0,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],
labelfont=[HELVETICA,14], caption=`Рис. 6а. Проекція
аттрактора Лоренца \n на площину (x,y)`):
g2:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[0,90,0], axes=FRAME, font=[HELVETICA,12],
tickmarks=[4,4,5], labelfont=[HELVETICA,14],
caption=`Рис. 6б. Проекція аттрактора Лоренца \n на
площину (z,y)`):
g3:=odeplot(ans1, [x(t),y(t),z(t)], 0..40,
numpoints=8000, labels=[x,y,z], color=violet,
orientation=[-90,90,0], axes=FRAME,
font=[HELVETICA,12], tickmarks=[4,4,5],
labelfont=[HELVETICA,14], caption=` Рис. 6в. Проекція
аттрактора Лоренца \n на площину (z,x)`):
display(Array(1..3, [g1,g2,g3]));
```

Проекції аттрактора Лоренца на площини тривимірного фазового простору є нерегулярними орбітами навколо нестійких нерухомих точок потоку. Хаотизація коливань у системі Лоренца – явне свідчення її нелінійності.

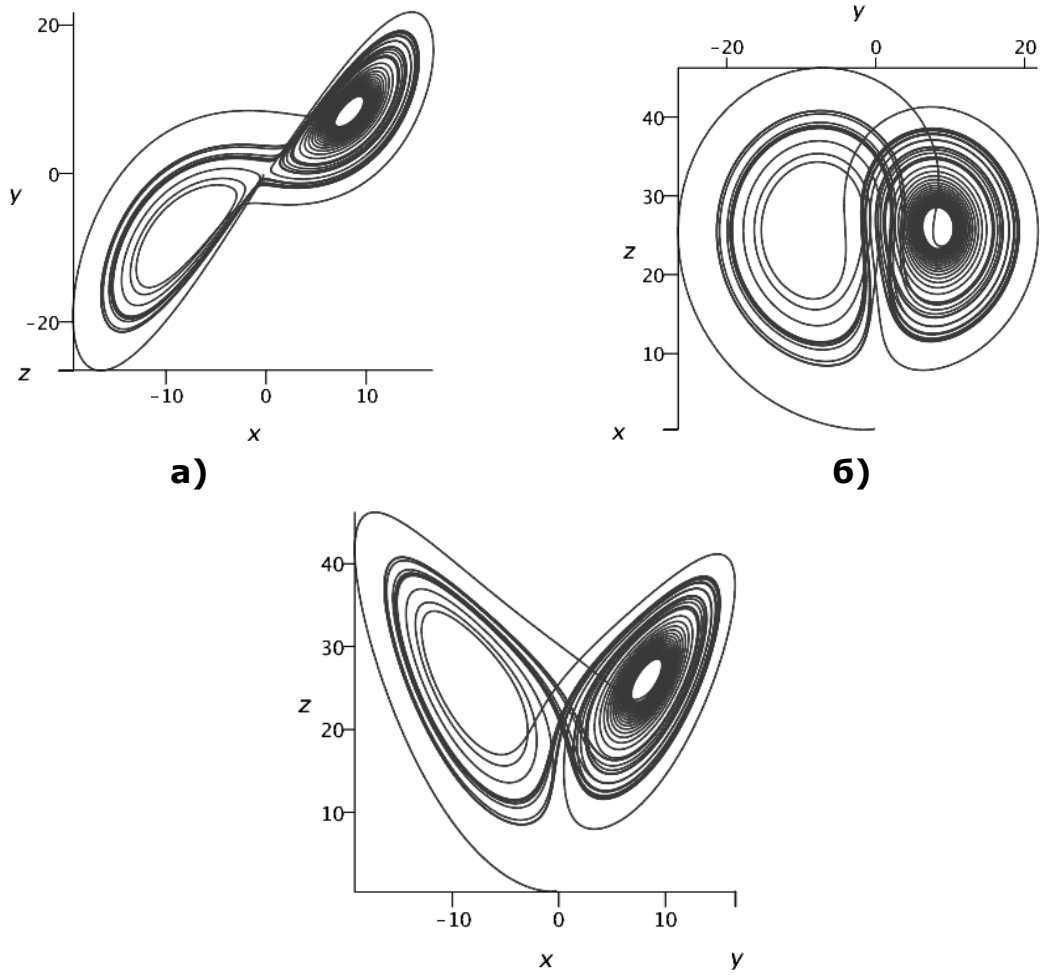


Рис. 2.5.6. Проекція аттрактора Лоренца на площини:
а) (x,y)**, б)** (z,y)**, в)** (z,x)

2 Нелінійні та відокремлені хвилі

2.1. Лінійні та нелінійні хвилі

Хвилею прийнято називати процес розповсюдження певного збудження, наприклад, коливання, від однієї точки простору до іншої. Механізм розповсюдження хвилі може бути різноманітним. Наприклад, електромагнітні хвилі здатні передаватися навіть у вакуумі, оскільки змінне електричне поле породжує змінне магнітне і навпаки, і для таких процесів навіть не потрібна участь середовища. Просте хвильове рівняння, яке описує розповсюдження хвиль різної природи, має вигляд [18]:

```
> restart:
> weq:=diff(u(x,t), t$2) = c^2*diff(u(x,t), x$2);
```

$$weq := \frac{\partial^2}{\partial t^2}\, u(x,\, t) = c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\, u(x,\, t) \right), \qquad (2.5.11)$$

Загальним рішенням такого рівняння є дві хвилі, які розповсюджуються в протилежних напрямах з однаковою за величиною, але протилежною за напрямом постійною швидкістю (c).

```
> sol:=pdsolve(weq);
```

$$sol := u(x,t) = _F1(c\,t + x) + _F2(c\,t - x)\,, \qquad (2.5.12)$$

Рівняння (2.5.11) має одну надзвичайно важливу особливість: якщо взяти два довільних рішення цього рівняння (u_1, u_2), то будь-яка лінійна композиція цих двох рішень $(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2)$ також є рішенням хвильового рівняння. Цей принцип суперпозиції рішень віддзеркалює лінійність рівняння (2.5.11) та лінійність його рішень – хвиль (2.5.12). Зокрема швидкість лінійної хвилі (2.5.12), не залежить від її амплітуди або координат: $c = const$.

Якщо розглядати хвилі на воді, то вони описуються диференціальними рівняннями гідродинаміки, які, як відомо, є не лінійними. Отже, в загальному випадку такі хвилі є нелінійними хвилями, зокрема такими, що не підкоряються принципу суперпозиції. Не завжди лінійними є також звукові хвилі. Наприклад, ще Дж. Рассел, перший спостерігач відокремленої хвилі на воді – солітону Рассела, відмічав, що потужний звук гарматного пострілу добігає до спостерігача швидше, ніж звуки команди на цей постріл. Це пояснюється тим, що швидкість звуку є залежною від його амплітуди і більш потужний звук з більшою амплітудою рухається швидше звуку з меншою амплітудою.

2.2. Рівняння Кортевега-де-Вріза: кіноїдальні хвилі та відокремлені хвилі – солітони

У 1895 році два датських вчених Дідерик Йоганнес Кортевег та Густав де-Вріз розглянули рівняння, якому підкоряються хвилі на воді, за умови відсутності вихрів та незмінної густини рідини [2]. Рівняння Кортевега-де-Вріза описує випадок відносно довгих хвиль на відносно неглибокій воді:

$$\frac{a}{h} << 1,\ \frac{h}{\lambda} << 1,$$

де a, λ – амплітуда та довжина хвилі, тоді як h – глибина басейну.

Рівняння, отримане Кортевегом-де-Врізом має вигляд нелінійного диференціального рівняння третього порядку:

```
> KdV:= diff(u(x,t),t) + 6*u(x,t)*diff(u(x,t),x) +
diff(u(x,t),t$3)=0;
```

$$KdV := \frac{\partial}{\partial t}\,u(x,t) + 6\,u(x,t)\left(\frac{\partial}{\partial x}\,u(x,t)\right) + \frac{\partial^3}{\partial t^3}\,u(x,t) = 0\,. \qquad (2.5.13)$$

Нелінійність рівняння (2.5.13) зумовлена другим квадратичним по шуканій функції доданком. Рівняння (2.5.13) має відоме хвильове рішення, яке має назву **кіноїдальних хвиль** і задається спеціальною функцією – еліптичною функцією Якобі [19]. За деяких умов періодичне рішення типу кіноїдальних хвиль може

переходити (перетворюватися) у відокремлену хвилю – **солітон**. Отримаємо обидва ці рішення, які є рішеннями типу біжучих хвиль, спеціальною командою програмного пакету PDEtools [TWSolutions].

```
> sol:=PDEtools[TWSolutions](KdV, singsol=false,
functions=[sech, JacobiSN]);
```

$$sol := \left\{u(x,t) = \frac{2\,_C3^3\,\mathrm{sech}(_C2\,x + _C3\,t + _C1)^2}{_C2} - \frac{_C3\left(4\,_C3^2 + 1\right)}{6\,_C2}\right\}, \left\{u(x,t) = -\frac{2\,_C1^2\,_C4^3\,sn(_C3\,x + _C4\,t + _C2|_C1)^2}{_C3} + \frac{_C4\left(4\,_C1^2\,_C4^2 + 4\,_C4^2 - 1\right)}{6\,_C3}\right\}. \quad (2.5.14)$$

Та перевіримо їх на валідність:

```
> pdetest(sol[1], KdV);
pdetest(sol[2], KdV);
```

$$0, \quad 0. \quad (2.5.15)$$

Розглянемо перш за все друге рішення, яке вочевидь описує кіноїдальні хвилі, оскільки містить еліптичну функцію Якобі – $\mathrm{sn}(z)$. Покладемо константу $_C2 = 0$ і позначимо аргумент функції Якобі через $_C3x + _C4t = \xi$, тоді:

```
>cw:= factor(-2*_C1^2*_C4^3*JacobiSN(xi,
_C1)^2/_C3+_C4*(4*_C1^2*_C4^2+4*_C4^2-1)/(6*_C3));
```

$$cw := -\frac{1}{6\,_C3}\left(_C4\left(12\,_C1^2\,_C4^2\,sn(\xi|_C1)^2 - 4\,_C1^2\,_C4^2 - 4\,_C4^2 + 1\right)\right). \quad (2.5.16)$$

Далі можемо покласти константи $_C4 = _C3 = 1$, оскільки їх значення визначають лише величину амплітуди хвилі, для нас зараз неважливу:

```
> cw1:=unapply(eval(cw, [_C1=k, _C3=1, _C4=sqrt(2)]),
xi, k);
```

$$cw1 := (\xi, k) \mapsto -\frac{\sqrt{2}\left(24\,k^2\,sn(\xi|k)^2 - 8\,k^2 - 7\right)}{6}. \quad (2.5.17)$$

```
> g1:=plot(cw1(xi,1.5), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6а. k=1.5`, titlefont=[Arial,14]):
```

```
g2:=plot(cw1(xi,1.1), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6б. k=1.1`, titlefont=[Arial,14]):
g3:=plot(cw1(xi,1.001), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6в. k=1.001`, titlefont=[Arial,14]):
g4:=plot(cw1(xi,1), xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy, title=
`Рис. 6г. k=1, відокремлена хвиля`,
titlefont=[Arial,14]):
> B:=Array(1..4, [g1,g2,g3,g4]):
plots[display](B, font=[Arial,14]);
```

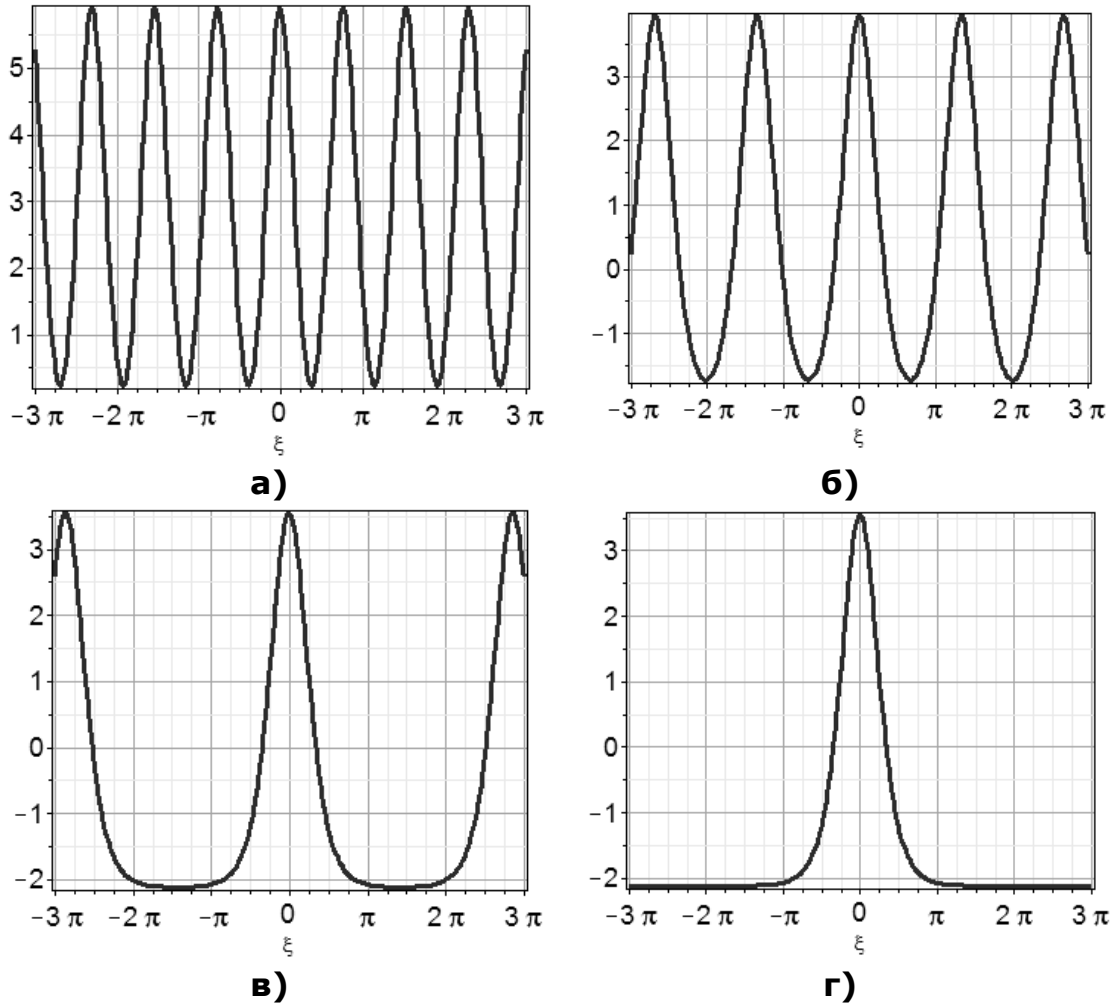


Рис. 2.5.7. Графіки кіноїдальних хвиль з періодами, залежними від параметра $_C1 = k$**: а)** $k = 1.5$**; б)** $k = 1.1$**; в)** $k = 1.001$**; г)** $k = 1$ **(відокремлена хвиля)**

З графіків на рис. 2.5.7 можна побачити як поступово кіноїдальна хвиля перетворюється у відокремлену хвилю за умови $k \to 1$ (рис. 2.5.7.г).

Рис. 2.5.8. Бомбардувальники армії США недалеко від узбережжя Панами (фотографія 1933 року) летять над кіноїдальними хвилями на мілкій воді

Різкі гребені та дуже плоскі спади характерні саме для кіноїдальних хвиль (див. рис. 2.5.7.в). Тепер можна зобразити і перше рішення. Обираючи константи $_C1=0$, $_C2=_C3=1$, $_C2x+_C3t=\zeta$, маємо:

```
> sw:= factor(2*_C3^3*sech(xi+_C1)^2/_C2-
_C3*(4*_C3^2+1)/(6*_C2)):
sw1:=eval(sw, [_C1 = 0, _C2 = 1, _C3 = 1]);
```

$$sw1 := 2\,\mathrm{sech}(\xi)^2 - \frac{5}{6}\,. \qquad (2.5.18)$$

```
> plot(sw1, xi=-3*Pi..3*Pi, thickness=3,
gridlines=true, axes=boxed, color=navy,
title=`Рис. 7. Відокремлена хвиля - солітон`,
titlefont=[Arial,14], font=[Arial,14]);
```

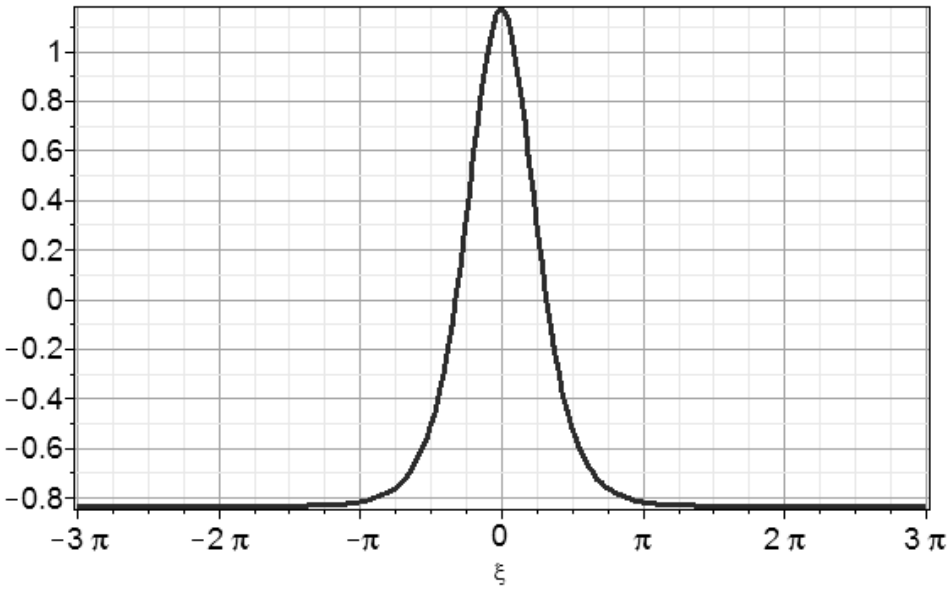


Рис. 2.5.9. Відокремлена хвиля – солітон

Знаходячи межу функції (2.5.17) за умови, що модуль еліптичної функції Якобі прямує до одиниці:

```
> sol_1:=simplify(limit(cw1(xi,k), k=1));
```

$$sol_1 := -\frac{\sqrt{2}\left(3\cosh(\xi)^2 - 8\right)}{2\cosh(\xi)^2}. \qquad (2.5.19)$$

Легко переконатися в тому, що вираз (2.5.19) можна представити у формі лінійної функції від квадрату гіперболічного секанса, як і вираз (2.5.18).

```
> sol_2:=4*sqrt(2)*sech(xi)^2-3/sqrt(2);
```

$$sol_2 := 4\sqrt{2}\,\mathrm{sech}(\xi)^2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}. \qquad (2.5.20)$$

```
> simplify(sol_1-sol_2);
```

$$0. \qquad (2.5.21)$$

Порівнюючи вирази (2.5.20) та (2.5.18), неважко переконатися, що вираз (2.5.18) є масштабованим та зсунутим виразом (2.2.20). Отже, солітонне рішення (2.5.18) дійсно можна отримати як граничний випадок періодичної кіноїдальної хвилі за умови, що її період не обмежено зростає. Окрім того, візуально порівнюючи форму кіноїдальної хвилі на рис. 2.5.7.г та солітону на рис. 2.5.9, можна переконатися в їх ідентичності.

Практикум 6

Математичні моделі технологічних та економічних процесів

1. Моделі технологічних процесів.
- **1.1.** Модель технологічного процесу перетікання рідини між двома резервуарами.
- **1.2.** Кабель між двома мачтами (опорами).

2. Математична модель для балансу попиту та пропозиції.

1 Моделі технологічних процесів

Комп'ютерне моделювання застосовують для оптимізації, проектування та дослідження реальних технологічних процесів або систем. У цьому процесі можна вирізнити декілька послідовних етапів (рис. 2.6.1).