

«Якщо з якихось причин певний негативний елемент середовища відсутній або не впливає суттєво на ситуацію, він буде замінений іншою, не менш паскудною гидотою»
Принцип Ле-Шательє

1. Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів.
2. Поняття про солітони, їх типи і властивості.

1 Нелінійні математичні моделі фізико-хімічних процесів

Із нелінійними рівняннями математичного моделювання уперше в цьому курсі ми познайомилися під час розгляду рівнянь Ван-дер-Поля (лекція 2, п. 1), Хопфа-Рімана (лекція 6, п. 1) та Нав'є-Стокса (лекція 6, п. 2).

Утім, нелінійні диференціальні рівняння в математичній фізиці з'являються вже під час вивчення коливань простого математичного маятника. Якщо не обмежуватися малими коливаннями, коли виконується умова $\sin(\phi) \approx \phi$, то диференціальне рівняння коливань для звичайного математичного маятника є істотно нелінійним:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \sin(\phi) = 0. \quad (1.7.1)$$

Рівняння (1.7.1) суттєво нелінійне: якщо ми навіть знайдемо якісь два його окремі рішення, припустимо $\phi_1(t), \phi_2(t)$, то жодна їх лінійна комбінація не буде рішенням рівняння (1.7.1), як це повинно бути для лінійного рівняння:

$$\ddot{\phi} + \omega^2 \phi = 0. \quad (1.7.2)$$

Хоча б через те, що синус – це нелінійна функція і тому:

$$\sin(c_1\phi_1 + c_2\phi_2) \neq c_1 \sin(\phi_1) + c_2 \sin(\phi_2). \quad (1.7.3)$$

Як було вже зазначено вище, зазвичай нелінійне рівняння (1.7.1), у якості першого наближення, апроксимують лінійним рівнянням (1.7.2) для малих коливань, замінюючи синус його аргументом $\sin(\phi) \approx \phi$. Така ситуація є доволі типовою: більшість реальних систем та процесів описуються саме нелінійними моделями, тоді як лінійні моделі є найчастіше лише наближеннями до складніших нелінійних.

Рішенням нелінійного рівняння (1.7.1) є функція:

$$\phi(t) = \arcsin \left[\sin \left(\frac{\phi_0}{2} \right) \cdot \operatorname{sn}(\omega t) \right], \quad (1.7.4)$$

де $\text{sn}(\phi)$ – спеціальна функція: так званий синус Якобі, ϕ_0 – початковий кут відхилення маятника. На рис. 1.7.1 показані залежності (1.7.4) кута відхилення нелінійного математичного маятника, який моделюється рівнянням (1.7.1) для двох початкових кутів відхилення: $\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$.

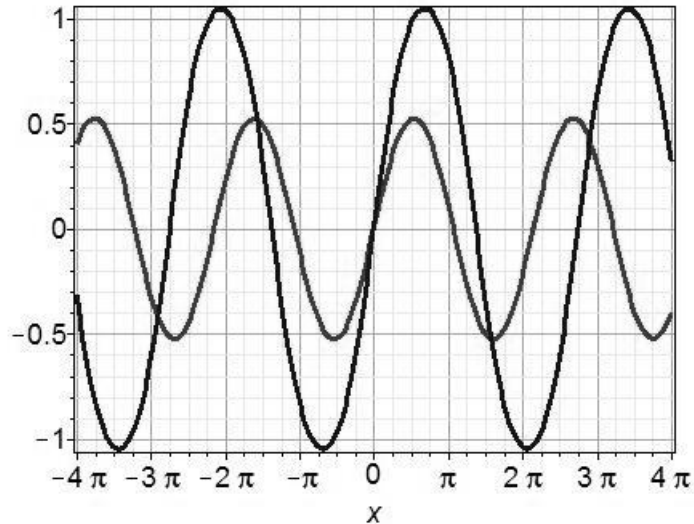


Рис. 1.7.1. Кут відхилення нелінійного математичного маятника (1.7.4)

З рис. 1.7.1 можна помітити, що на відміну від малих лінійних коливань, періоди нелінійних коливань помітно різні і залежні від початкового кута відхилення: період більший для більшого початкового кута відхилення маятника.

Розглянемо в якості іншого прикладу окремі рішення нелінійного диференціального рівняння, яке є узагальненням моделі Бюргерса-Хопфа. Рівнянням Бюргерса називають нелінійним диференціальним рівнянням у часткових похідних, що використовується зокрема в гідродинаміці та акустиці і загалом під час вивчення нелінійних хвиль у суцільних середовищах. Воно є окремим випадком рівнянь Нав'є-Стокса в одновимірному випадку.

Нехай задана швидкість течії рідини $u(x, t)$ та її кінематична в'язкість μ . Рівняння Бюргерса в загальному вигляді записується так (похідні по змінних показані нижніми індексами):

$$u_t + u \cdot u_x - \mu u_{xx} = 0. \quad (1.7.5)$$

Третій доданок в (1.7.5) пропорційний другій похідній швидкості по координаті $\left(\mu u_{xx} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)$, і описує вплив сил в'язкого

тертя на рух хвилі. Якщо в'язким тертям можна знехтувати, то рівняння Бюргерса переходить у простіше рівняння Хопфа, розглянуте в попередній лекції:

$$u_t + u \cdot u_x = 0. \quad (1.7.6)$$

Якщо ж в рівнянні Бюргерса додатково враховані процеси дисипації (розсіяння) енергії хвилі під час її проходження по середовищу, то рівняння Бюргерса узагальнюється до вигляду:

$$u_t + u \cdot u_x - \mu u_{xx} + \beta u_{xxx} = 0. \quad (1.7.7)$$

Останнє рівняння має назву рівняння Кортевега-де-Вріза-Бюргерса (**КдВБ**). Воно моделює зокрема процес проходження ударних хвиль у крупних кровоносних судинах [2]. Розглядаючи артерію як в'язко-пружній аксіально симетричний канал (трубу) змінного перерізу з системи рівнянь Нав'є-Стокса та неперервності можна отримати рівняння (1.7.5), де доданок βu_{xxx} описує процеси дисипації енергії хвилі під час руху судиною.

Доповнимо рівняння КдВБ початковими умовами вигляду:

$$\left. \begin{aligned} u(x,0) &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 1 \\ u(x,0) &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned} \right\}. \quad (1.7.8)$$

У такому разі рівняння (1.7.5) з початковими умовами (1.7.8) має рішення у вигляді біжучої хвилі, так званого кінку, яка рухається з постійною амплітудою та швидкістю (рис. 1.7.2). Кінк є фактично відокремленою хвилею ударного типу. Відокремленою (усамітною) хвилею називають такий хвильовий рух під час якого хвиля в кожний окремий момент часу локалізована в обмеженій області простору і швидко спадає з віддаленням від цієї області. Типова усамітнена хвиля має вигляд імпульсу (**солітон**), або перепаду (**ударна хвиля, кінк**), утім вона може мати і більш складні структури. Такі усамітнені хвилі спостерігаються в різних середовищах: газах, рідинах, електронній плазмі тощо.

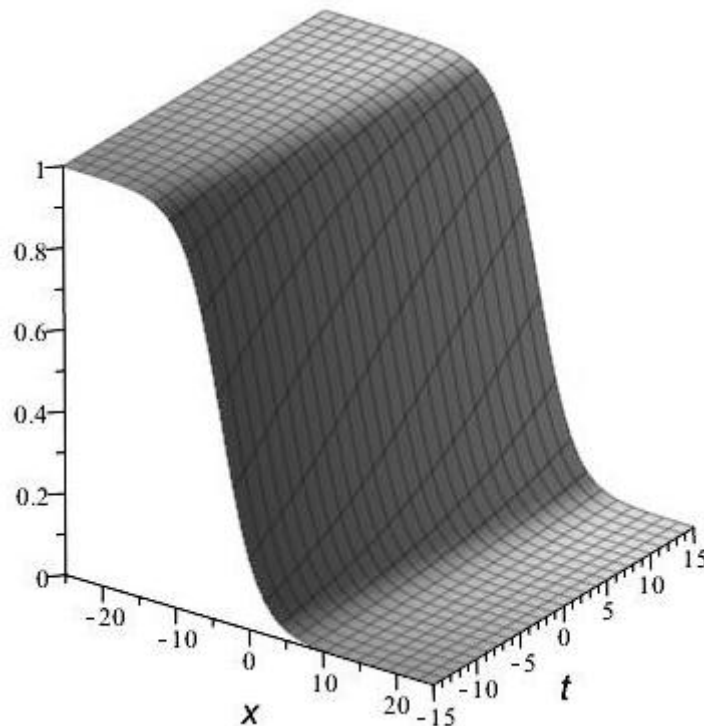


Рис. 1.7.2. Біжуча хвиля (кінк)

2 Поняття про солітони, їх типи і властивості

Одне з таких фізичних явищ, яке коректно описується тільки нелінійними рівняннями математичної фізики, – **солітон** – структурно стійка усамітнена (відокремлена) хвиля, яка розповсюджується в нелінійному середовищі. Солітони поводяться подібно до частинок. Тому солітони можна навіть називати, і вважати, частинкою подібними хвилями. Під час взаємодії один із одним, або з деякими іншими збудженнями, солітони не руйнуються, а рухаються, зберігаючи свою структуру незмінною. Солітони описуються нелінійними диференціальними рівняннями в частинних похідних (для суцільних середовищ).

Історія вивчення солітона розпочалася в серпні 1834 року на березі Юніон-каналу поблизу від Едінбургу. Джон Скотт Рассел спостерігав на поверхні води каналу явище, яке він назвав усамітненою (відокремленою) хвилею, – «solitary wave»:

«Я спостерігав рух баржі, яку досить швидко тягли уздовж вузького каналу парою коней, коли баржа несподівано зупинилася – але не маса води в каналі, яку вона рухала на своєму ході; ця маса води спочатку акумулювалася навкруги носу судна у стані сильного збурення, потім раптово відривається від баржі, накатом посуваючись вперед з великою швидкістю, і приймаючи форму великого самотнього пагорбу, гладкої і заокругленої, чітко визначеної купи води, яка продовжувала свій курс уздовж каналу ймовірно без зміни зазначеної форми, або зменшення швидкості. Я переслідував її верхи протягом восьми або дев'яти міль приблизно годину, і спостерігав її все ще в стані руху зі збереженням початкової фігури приблизно 30 футів довжиною і від фута до півтора фута висотою. Висота хвилі поступово зменшувалася, і через пару міль я загубив її у звивах каналу».

Загальноприйнятим вважають визначення, наведене Дразінім та Джонсоном [3]. Згідно з цим визначенням солітоном називають хвильове збудження в нелінійному середовищі, яке задовольняє наступним трьом вимогам:

- 1) розповсюджується з постійною швидкістю, не змінюючи при цьому своєї форми;
- 2) локалізоване у просторі;
- 3) не змінюється при зіткненні з іншим таким збудженням (окрім можливого зсуву фаз).

У реальних фізичних системах часто використовують більш слабе визначення, де одна, або дві з перелічених умов, виконуються або в межах певного наближення, або ж не виконуються взагалі. Солітони експериментально спостерігаються в низці фізичних систем, які перелічено нижче.

1. На поверхнях рідин солітони утворюються у вигляді локалізованих хвиль-горбів, які розповсюджуються на доволі

далекі відстані (рис. 1.7.3). Це перші солітони, які було виявлено в природі.

2. Іноді солітонами вважають також гігантські самотні хвилі, які утворюються на поверхні океанів після землетрусів та вивержень вулканів – так звані цунамі.
3. Іонозвукові та магнітозвукові солітони в плазмі.
4. Гравітаційні солітони в шаруватій рідині.
5. Солітони у вигляді коротких світлових імпульсів в активному середовищі лазера.
6. Солітони можуть утворюватися в довгих контактах Джозефсона або в масивах точкових контактів Джозефсона. Вони мають фізичний зміст кванту магнітного потоку і називаються джозефсонівськими вихорами або флуксонами. Солітони в джозефсонівських контактах описуються рівнянням синус-Гордон.
7. У магнетиках можуть утворюватися солітони різного типу, зокрема доменні стінки мають властивості солітонів.
8. В оптичних волоконних хвилеводах, у яких присутня нелінійна залежність показника заломлення волокна від електричного поля, завдяки так званому ефекту Керра, утворюються оптичні солітони.
9. У бозе-ейнштейнівських конденсатах холодних атомних газів спостерігалися солітони, що мають фізичний зміст рухливих областей підвищеної густини атомів.



Рис. 1.7.3. Водяний солітон на каналі Едінбургського університету

Є ще багато систем, у яких можуть існувати солітони, або хвильові збудження, близькі до них за своїми властивостями. Зок-

рема, своєрідні солітони здатні існувати у протеїнах та ДНК. У цих макромолекулах солітони пов'язані з низько-частотним колективним коливальним рухом фрагментів протеїнів та ДНК [4].

Солітони є адекватною моделлю для так званих пульсових хвиль тиску [5] у крупних кровоносних судинах.

У певному наближенні можна розглядати як солітони також і нервові імпульси. Така гіпотеза була висловлена ще Гельмгольцем, який першим виміряв швидкість їх розповсюдження по нервових волокнах. Сучасна модель солітонів у неврології – це відносно новітня модель (розвивається з 2005 року), яка намагається пояснити, як сигнали проходять у мережах біологічних нейронів. Вона припускає, що нервові сигнали подорожують уздовж клітинних мембран у формі певних видів акустичних солітонів, так званих солітонів Кортвега-де-Вріза.

Як така, ця модель конкурує із більш давньою та загальноприйнятою моделлю Ходжкіна-Хакслі (Hodgkin-Huxley), котра передбачає, що нервові сигнали розповсюджуються як електричні потенціали. Передача нервового збудження у вигляді електричного сигналу повинна супроводжуватися супутнім виділенням деякої кількості тепла (завдяки ефекту Джоуля-Ленца), в той час як солітон під час свого руху практично не втрачає енергії. Реальні температурні режими нервових волокон, причому температури під час збудження є практично незмінними, свідчать на користь саме сучаснішої солітонної моделі [6].

Однією з найпростіших і найвідоміших моделей, що допускають існування солітонів у своїх рішеннях, є нелінійне диференціальне рівняння Кортвега-де-Вріза (**КдВ**). Солітони КдВ, або так звані акустичні солітони, можливі в середовищах з:

- дисперсією, тобто швидкість хвилі в середовищі повинна залежати від її довжини;
- суттєвою нелінійністю.

Рівняння Кортвега-де-Вріза можна отримати з більш загального рівняння КдВБ (1.7.5), нехтуючи в ньому доданком, який описує сили в'язкого тертя:

$$u_t + u \cdot u_x + \nu u_{xxx} = 0. \quad (1.7.9)$$

Рівняння КдВ, на відміну від рівняння (1.7.5), допускає точне солітонне рішення в такому вигляді:

$$u(x, t) = \frac{V}{2 \cosh^2 \left(\frac{\sqrt{V}(Vt - x)}{2} \right)}, \quad (1.7.10)$$

де V – параметр швидкості розповсюдження солітону. Два важливі зауваження щодо солітонного рішення (1.7.10) є такими:

- дійсність рішення (1.7.10) вимагає позитивності параметра швидкості $V > 0$, а за позитивного значення цього параметра солітон (1.7.10) рухається праворуч по осі координат;

- пропорційність амплітуди солітону параметра швидкості ($V > 0$) означає, що солітони з більшою амплітудою рухаються швидше солітонів з меншою амплітудою.

Просторово-часова еволюція солітону КдВ (його форма) показана на рис. 1.7.4.

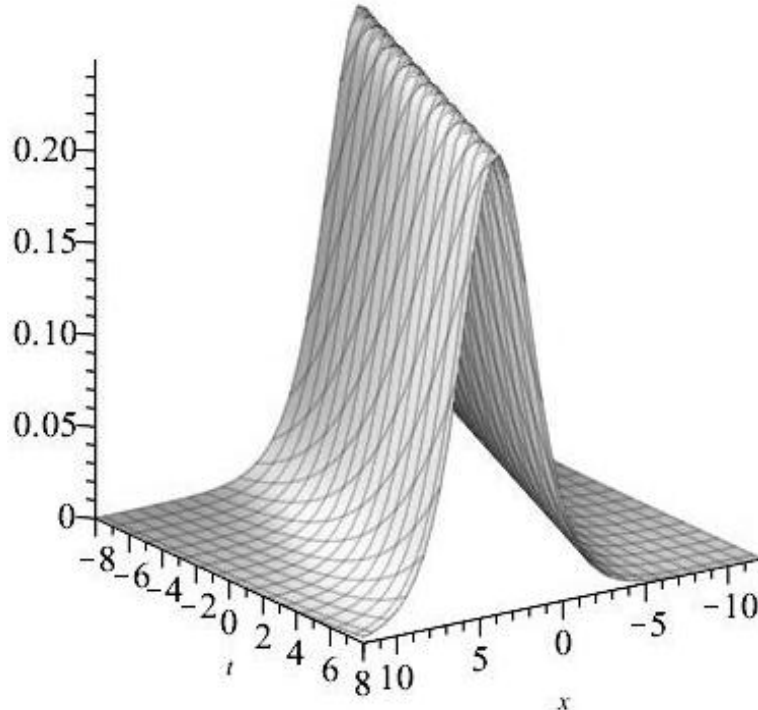


Рис. 1.7.4. Форма солітону Картевега-де-Вріза

Визначимо «об'єм» солітону, власне площу під його кривою. Оскільки солітон не змінює своєї форми під час свого руху і така площа однакова в різні моменти часу, отже, знайдемо її інтегруванням виразу (1.7.10) за умови $t = 0$. Тоді, урахуванням симетрії солітону (1.7.7) відносно точки $x = 0$ маємо для площі під кривою солітону простий вираз:

$$\int_0^{\infty} \frac{V}{\cosh^2\left(\frac{x\sqrt{V}}{2}\right)} dx = 2\sqrt{V}. \quad (1.7.11)$$

Отже, кількість рідини, яку містить і переносить у просторі солітон, пропорційна кореню квадратному його амплітуди. Отже, імпульс солітону пропорційний його амплітуді в ступені $(3/2)$, а його кінетична енергія навіть в ступені $(5/2)$.

Якщо інтегральну площу (1.7.11) поділити на амплітуду солітону $\left(\frac{V}{2}\right)$, то отримаємо його середню (інтегральну) ширину, яка вочевидь обернено пропорційна кореню квадратному з амплітуди солітону: $\lambda = \frac{4}{\sqrt{V}}$. Отже, солітони більшої амплітуди не тільки

рухаються швидше, вони також переносять більше рідини і мають меншу інтегральну ширину (є вищими і вужчими).

Рис. 1.7.5 демонструє схему механізму послідовного розповсюдження пульсової хвилі по аорті [7]. Під час систоли (серцевого скорочення) спочатку розтягується найближча до серця ділянка аорти, де нагромаджується додаткова кров (А). Потім ця ділянка стискається до початкового стану, при цьому розтягується і накопичує кров інша ділянка (Б). Далі цей процес поширюється і реплікується у вигляді деформації стінок уздовж еластичних стінок артерії (В). Отже, пульсову хвилю можна розглядати як типовий солітон деформації стінок артерії та пов'язаного з ним додаткового тиску крові.

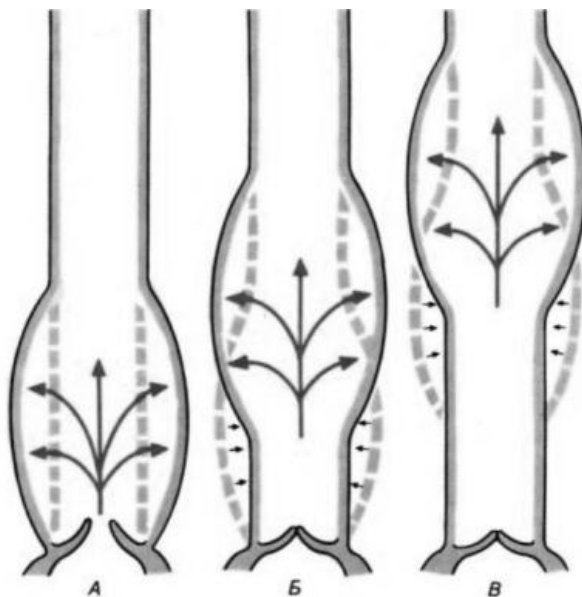


Рис. 1.7.5. Схема послідовного розповсюдження пульсової хвилі в аорті

Розрахунки в моделі солітону КдВ показують, що типовими значеннями для пульсової хвилі є її довжина (2.5–2.7 м), додатковий тиск (приблизно 69 мм.рт.ст.), а також об'єм крові, який переноситься за кожен удар (приблизно 55–60 см³), що відповідає експериментальним значенням.

Іншим нелінійним диференціальним рівнянням, відомим для моделей так званих оптичних солітонів, є нелінійне рівняння Шредінгера, яке має такий вигляд:

$$iu_y + u \cdot u_{xx} - 2v|u|^2 u = 0, \quad (1.7.12)$$

де $u(x, t)$ – комплексна функція.

Будучи нелінійним узагальненням параболічного рівняння, нелінійне рівняння Шредінгера (1.7.12) описує динаміку хвильових пакетів у середовищах з дисперсією і кубічною нелінійністю. Подібна ситуація зустрічається, наприклад, при поширенні електромагнітних хвиль у плазмі: з одного боку плазма є диспергуючим середовищем, з іншого боку, при досить високих амплітудах хвилі

проявляється пондеромоторна нелінійність, яка в деяких випадках може бути апроксимована кубічним фактором – третій доданок у рівнянні (1.7.12).

Іншим фізичним прикладом процесів, які описуються рівнянням (1.7.12), є поширення світла в нелінійних кристалах із дисперсією: у багатьох випадках квадратична нелінійність мала або тотожно дорівнює нулю в силу центральної симетрії кристалічної решітки, тому враховується тільки кубічний доданок.

Для нелінійного рівняння Шредінгера знайдено велику кількість точних розв'язків, що представляють собою стаціонарні нелінійні хвилі. Крім того, рівняння (1.7.12) має також локалізований розв'язок солітонного типу:

$$u(x,t) = \frac{\sqrt{2\beta}}{\sqrt{v} \cosh^2(x-Vt)}, \quad (1.7.13)$$

де параметр α визначає амплітуду, а параметр V – швидкість оптичного солітону. На відміну від акустичних солітонів КдВ (1.7.9) амплітуда та швидкість оптичних солітонів (1.7.13) не пов'язані між собою пропорційним співвідношенням.

На рис. 1.7.6 показано просторово-часову еволюцію так званого брізера, який є комбінацією оптичного солітону та антисолітону (солітон із протилежним напрямом фазової швидкості).

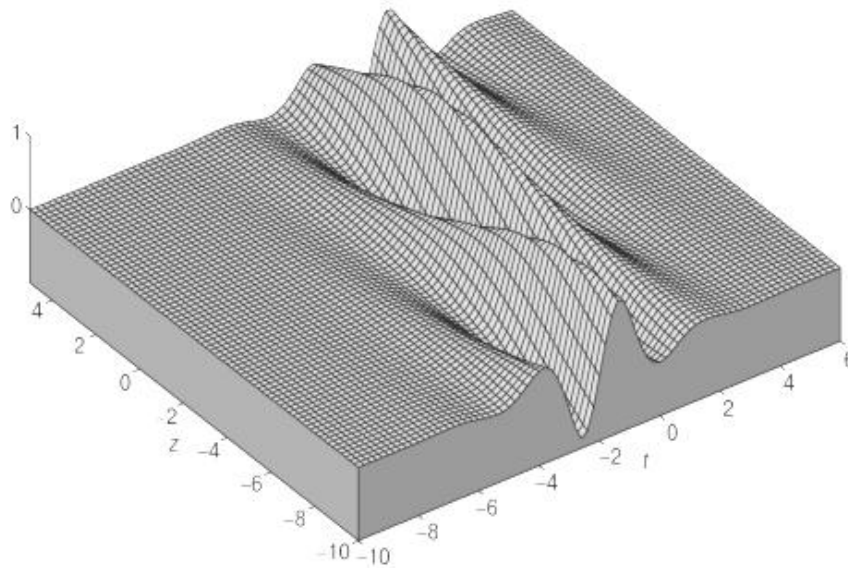


Рис. 1.7.6. Брізер

Ще одна нелінійна математична модель, так зване рівняння синус-Гордона:

$$\varphi_{tt} - \varphi_{xx} + \sin(\varphi) = 0, \quad (1.7.14)$$

де функція $\varphi(x,t)$ описує крутильні коливання елементів у деяких системах (зокрема в згаданих вище молекулах ДНК).

Цікава властивість рівняння синус-Гордона – існування солітонних і навіть багатосолітонних розв'язків (рис. 1.7.7), які отримали назву топологічних солітонів.

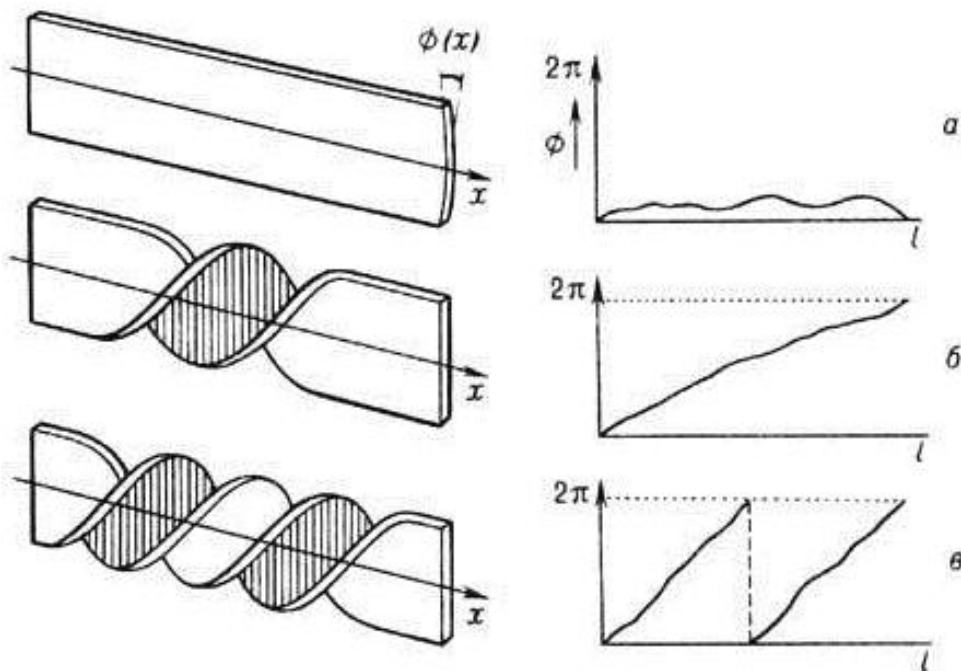


Рис. 1.7.7. Топологічні солітони

Лекція 8

«Якщо здається, що роботу зробити легко, це неодмінно буде важко. Якщо на вигляд вона важка, значить виконати її практично неможливо»
Теорема Стокмаєра

1. Підприємство як об'єкт моделювання.
2. Модель підприємства як відкритої системи.

1 Підприємство як об'єкт моделювання

Звернемося до роботи вітчизняних дослідників В. Здрок и М. Черкес «Системний підхід до дослідження виробничих процесів інформаційно-технологічних підприємств», опубліковану у Віснику Львівського університету [37].

Дослідження та моделювання виробництва передбачає розгляд та зміну умов низки закладених у нього технологічних процесів з метою отримання певного рівня якості продукції або послуг, за додаткової умови мінімальних витрат ресурсів. Типовими задачами, які доводиться при цьому вирішувати, є такі:

- підвищення ефективності виробництва, яке звичайно задається відомою функцією, так званою виробничою функцією, яка буде детальніше розглядатися у практикумі;