

Глава 5.

МАТРИЧНО-ТОПОЛОГІЧНИЙ МЕТОД ФОРМУВАННЯ ЦІЛІСНОЇ МОДЕЛІ СИСТЕМ З ДИНАМІЧНОЮ СТРУКТУРОЮ

5.1. Рівень алгебраїчних рівнянь для об'єднання топологічного та компонентного описів систем з динамічною структурою

Потенціали вузлів аналізованої схеми є характеристикою вузлів, а вузол встановлює взаємозв'язок компонентів у системі. Таким чином, без розгляду системи в цілому неможливо визначити потенціали її вузлів. Як уже відмічалося, СЕУ властивий динамічний характер зміни структури. Щоб вирішити задачу обчислення потенціалів вузлів системи, запишемо перший закон Кірхгофа в матричній формі у відносних одиницях для систем з динамічною структурою

$$\mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I} = 0, \quad \mathbf{CBP} \cdot d\mathbf{I} / d\tau = 0$$

або для струму та його першої похідної

$$\mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{CBP} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = 0 \tag{5.1}$$

та для напруги

$$\mathbf{U} = \mathbf{CBP}' \cdot \mathbf{V}, \tag{5.2}$$

де \mathbf{CBP} , \mathbf{CBP}' – матриці інциденцій для системи з динамічною структурою, пряма та транспонована; \mathbf{I} , $d\mathbf{I}/d\tau$ – вектори струмів та перших похідних струмів у гілках електричного підграфу; \mathbf{U} – вектор падіння напруги на гілках електричного підграфу; \mathbf{V} – вектор потенціалів вузлів системи.

Рівняння (5.1), (5.2) описують схему з'єднання компонентів електричного підграфу в систему. При цьому матриця **СВР** містить інформацію як про внутрішню структуру компонентів, так і про схему з'єднання компонентів, тобто про зовнішню структуру.

Характер, фізичні властивості компонентів електричного підграфу, тобто співвідношення струмів та напруг, описує закон Ома в матричній формі, у в.о.:

$$\frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{E}) - \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{I}, \quad (5.3)$$

де **YL** – матриця провідностей гілок електричного підграфу, обернена від матриці індуктивних параметрів; **E** – вектор ЕРС у гілках електричного підграфу; **R** – діагональна матриця активних опорів гілок електричного підграфу; **M** – матриця індуктивних параметрів гілок електричного підграфу, що обумовлюють ЕРС обертання у гілках; **Ω** – вектор кутових швидкостей обертання роторів компонентів електричного підграфу.

Розв'язуючи одночасно рівняння (5.1-5.3), знаходимо

$$\mathbf{СВР} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{U} - \mathbf{E}) - \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{I};$$

$$\mathbf{СВР} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{СВР}^t \cdot \mathbf{V} - \mathbf{E}) - \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{I} = 0;$$

$$\mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot \mathbf{СВР}^t \cdot \mathbf{V} = \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{I}.$$

(5.4)

В результаті зміни структури системи утворюються нові базисні та друго-рядні в складному вузлі, потенціали котрих приймаємо рівними нулеві.

$$\mathbf{СВЕ} \cdot \mathbf{V} = 0. \quad (5.5)$$

Тоді рівняння (5.5), (5.4), записані одночасно, приймають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot \mathbf{СВР}^t + \mathbf{СВЕ}) \cdot \mathbf{V} = \\ & = \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega}) \cdot \mathbf{I} - \mathbf{СВР} \cdot \mathbf{I} \end{aligned} \quad (5.6)$$

або з урахуванням введених позначень

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{F},$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{YL} \cdot \mathbf{CBP}^t + \mathbf{CBE}$ – матриця вузлових провідностей систем з динамічною структурою; $\mathbf{E}\mathbf{E} = \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{YL} \cdot \mathbf{E}$ – вектор, обумовлений наявністю ЕРС у гілках електричного підграфа; $\mathbf{Z} = \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{YL} \cdot (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \mathbf{\Omega})$ – матриця параметрів, обумовлена наявністю струмів та ЕРС обертання у гілках електричного підграфа; $\mathbf{F} = \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I}$ – вектор суми струмів у вузлах.

Матриця \mathbf{D} незалежно від стану комутаційних елементів має обернену. Ця властивість придбана матрицею \mathbf{D} , виходячи із знання інформації, у відповідності до матричного рівняння (5.5), що приводить до виродження системи рівнянь (5.4) з незалежної в залежну. Тому розв’язок рівняння (5.6) існує, і його можна обчислити шляхом обернення матриці \mathbf{D} . Тоді

$$\mathbf{V} = \mathbf{D}^{-1} \cdot (\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathbf{Z} \cdot \mathbf{I} - \mathbf{F}). \quad (5.7)$$

Для визначення вектора падіння напруги на гілках електричного підграфа достатньо скористуватись знайденим значенням вектора потенціалів вузлів системи та рівнянням (5.2).

Щоб визначити і значення потенціалів другорядних вузлів у складних, необхідно скоригувати значення елементів вектора \mathbf{V} таким чином:

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{B}^t \cdot \mathbf{V}, \quad (5.8)$$

де \mathbf{V}_y – вектор потенціалів вузлів системи з урахуванням рівності потенціалів усіх вузлів, що утворюють складний вузол в результаті замкнутого стану відповідних комутаційних елементів; \mathbf{B}^t – матриця перебудови комутаційного підграфа (алгебраїчна, транспонована).

Таким чином, рівень описання системи утворюють алгебраїчні матричні рівняння (5.2, 5.6, 5.8).

Подальший розвиток математичного описання системи отримано шляхом розділення описання внутрішньої та зовнішньої структур. При цьому кожна модель типового елемента СЕУ можна представити у вигляді багатополусного компонента з урахуванням своєї внутрішньої структури, тобто схеми з’єднання гілок типового елемента. Сутність цього методу організації уніфікованих моделей типових елементів полягає в наступному.

Фізичні властивості компонентів електричного підграфа, описані рівнянням (5.3), можна записати в блочній формі з кількістю блоків, рівній кількості компонентів:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}\mathbf{L}_1 & & & \\ & \mathbf{Y}\mathbf{L}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \mathbf{U}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_k \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & & & \\ & \mathbf{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \mathbf{R}_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & & & \Omega_1 \\ & \mathbf{M}_2 & & \Omega_2 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathbf{M}_k & \Omega_k \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \mathbf{I}_1 \\ \mathbf{I}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{I}_k \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

де $\mathbf{Y}\mathbf{L}_k$ – матриця провідностей гілок k -го компонента електричного підграфу, обернена від матриці індуктивних параметрів; \mathbf{R}_k – діагональна матриця активних опорів k -го компонента електричного підграфу; \mathbf{M}_k – матриця індуктивних параметрів k -го компонента електричного підграфу, що обумовлюють ЕРС обертання у гілках компонентів; $\mathbf{U}_k, \mathbf{E}_k$ – вектори падіння напруги та ЕРС у гілках k -го компонента електричного підграфу; $\mathbf{I}_k, d\mathbf{I}_k/dt$ – вектори струмів та перших похідних від струмів у гілках k -го компонента електричного підграфу; Ω_k – кутова частота обертання ротора k -го компонента електричного підграфу.

Внутрішня структура k -го багатополюсного компонента (багатополосника) описується першим законом Кірхгофа в матричній формі

$$\mathbf{I}\mathbf{P}_k + \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{I}_k + \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \frac{d\mathbf{I}_k}{dt}; \quad (5.10)$$

$$\mathbf{U}_k = \mathbf{P}\mathbf{P}'_k \cdot \mathbf{V}\mathbf{P}_k, \quad (5.11)$$

де $\mathbf{P}\mathbf{P}_k, \mathbf{P}\mathbf{P}'_k$ – матриці інциденцій k -го багатополюсника, пряма і транспонована; $\mathbf{I}\mathbf{P}_k, d\mathbf{I}\mathbf{P}_k/dt$ – вектори суми струмів у полюсах k -го багатополюсника та їх перших похідних; $\mathbf{V}\mathbf{P}_k$ – вектор потенціалів полюсів k -го багатополюсника.

Структура системи, що складається з будь-якої кількості багатополюсників, відображаюча лише схему з'єднання багатополюсників у систему без опису внутрішньої структури багатополюсників, описується наступними матричними рівняннями:

$$\mathbf{PY} \cdot \mathbf{IP} + \mathbf{PY} \cdot d\mathbf{IP} / d\tau = 0, \quad \mathbf{VP} = \mathbf{PY}^t \cdot \mathbf{V}$$

або в блочній формі

$$\mathbf{PY} \cdot \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{IP}_1 \\ \mathbf{IP}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{IP}_k \end{bmatrix} = -\mathbf{PY} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{IP}_1 \\ \mathbf{IP}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{IP}_k \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \mathbf{VP}_1 \\ \mathbf{VP}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{VP}_k \end{bmatrix} = \mathbf{PY}^t \cdot \mathbf{V}, \quad (5.12)$$

де \mathbf{IP} , $d\mathbf{IP}/d\tau$ – вектори суми струмів в P полюсах багатополосників та їх перших похідних; \mathbf{VP} – вектор потенціалів P полюсів багатополосників; \mathbf{PY} , \mathbf{PY}^t – матриці об'єднання полюсів багатополосників у вузли системи, пряма і транспонована; \mathbf{V} – вектор потенціалів M вузлів системи.

Матриця об'єднання полюсів у вузли системи \mathbf{PY} має відповідну розмірність ($M \times P$). Ця матриця описує схему з'єднання типових елементів (багатополосників) у систему.

Роздільний опис внутрішньої структури (\mathbf{PP}^k) багатополосників та зовнішньої структури об'єднання полюсів багатополосників у вузли системи (\mathbf{PY}) дозволяє суттєво підвищити ефективність процесу моделювання, використати раніше створений математичний опис типових багатополосників, установок та підсистем. Роздільний опис внутрішньої структури багатополосників та структури об'єднання полюсів у вузли системи можна представити як

$$\mathbf{P}_e = \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PP}; \quad \mathbf{P}'_e = \mathbf{PP}^t \cdot \mathbf{PY}^t, \quad (5.13)$$

де \mathbf{P}_e , \mathbf{P}'_e – матриці інцидентій всієї системи без розділення на внутрішню та зовнішню структури, пряма і транспонована.

При описі всієї системи можна записати

$$\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{I} + \mathbf{P}'_e \cdot \frac{d\mathbf{I}}{d\tau}; \quad (5.14)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{P}'_e \cdot \mathbf{V} \quad (5.15)$$

або

$$PY \cdot PP \cdot I + PY \cdot PP \cdot \frac{dI}{d\tau} = 0;$$

$$U = PP^t \cdot PY^t \cdot V.$$

У блочній формі можна записати ці рівняння разом з рівняннями (5.10, 5.11):

$$PY \cdot PP \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix} + PY \cdot \begin{bmatrix} PP_1 & & & \\ & PP_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & PP_k \end{bmatrix} \cdot \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_k \end{bmatrix} = 0;$$

$$U = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PP'_1 & & & \\ & PP'_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & PP'_k \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} VP_1 \\ VP_2 \\ \vdots \\ VP_k \end{bmatrix}.$$

Ці рівняння можна представити інакше:

$$PY \cdot \begin{bmatrix} PP_1 \cdot I_1 \\ PP_2 \cdot I_2 \\ \vdots \\ PP_k \cdot I_k \end{bmatrix} + PY \cdot \begin{bmatrix} PP_1 \cdot \frac{d}{d\tau} I_1 \\ PP_2 \cdot \frac{d}{d\tau} I_2 \\ \vdots \\ PP_k \cdot \frac{d}{d\tau} I_k \end{bmatrix} = 0; \quad \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} PP'_1 \cdot VP_1 \\ PP'_2 \cdot VP_2 \\ \vdots \\ PP'_k \cdot VP_k \end{bmatrix}.$$

Виділення внутрішньої структури типового елемента дозволяє розглядати її як додатковий параметр у багатополусній моделі та оперувати функціонально закінченими уніфікованими моделями. Тому на компонентному рівні k -й багатополусник описується системою рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U}_k &= \mathbf{P}\mathbf{P}_k^t \cdot \mathbf{V}\mathbf{P}_k; \\ \mathbf{I}\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{I}_k; \\ \frac{d\mathbf{I}_k}{d\tau} &= \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot [(\mathbf{U}_k - \mathbf{E}_k) - (\mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k) \cdot \mathbf{I}_k]; \\ \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{d\tau} &= \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \frac{d\mathbf{I}_k}{d\tau}. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Об'єднуємо ці рівняння:

$$\frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{P}_k \frac{d\mathbf{I}_k}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \begin{bmatrix} \mathbf{U}_k - \mathbf{E}_k - \\ -(\mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k) \cdot \mathbf{I}_k \end{bmatrix};$$

$$\frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{d\tau} = \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{P}\mathbf{P}_k^t \cdot \mathbf{V}\mathbf{P}_k - \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot \left[\mathbf{E}_k + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_k + \\ + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k \end{pmatrix} \mathbf{I}_k \right]. \quad (5.17)$$

Розв'язуємо рівняння (5.17) відносно вектора $\mathbf{V}\mathbf{P}_k$:

$$\mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{P}\mathbf{P}_k^t \cdot \mathbf{V}\mathbf{P}_k = \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{d\tau} + \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot \left[\mathbf{E}_k + \begin{pmatrix} \mathbf{R}_k + \\ + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k \end{pmatrix} \mathbf{I}_k \right]. \quad (5.18)$$

Введемо для k -го багатополосника наступні позначення:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{Y}\mathbf{P}_k &= \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot \mathbf{P}\mathbf{P}_k^t; \\ \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}_k &= \mathbf{P}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L}_k \cdot [\mathbf{E}_k + (\mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k) \cdot \mathbf{I}_k] \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

де $\mathbf{Y}\mathbf{P}_k$ – матриця полюсних провідностей k -го багатополосника; $\mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}_k$ – вектор повних параметрів k -го багатополосника, включаючи внутрішню структуру $\mathbf{P}\mathbf{P}_k$.

З урахуванням введених позначень матричне рівняння (5.18) приймає вигляд

$$\mathbf{Y}\mathbf{P}_k \cdot \mathbf{V}\mathbf{P}_k = \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}_k}{d\tau} + \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}_k. \quad (5.20)$$

На основі рівняння (5.20), що описує k -й багатополосник, сформуємо опис всієї системи із k -х багатополосників в блочній формі

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{Y}\mathbf{P}_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \mathbf{Y}\mathbf{P}_k \\ \hline \end{array} \cdot \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{V}\mathbf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{V}\mathbf{P}_k \\ \hline \end{array} = \frac{d}{d\tau} \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{I}\mathbf{P}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{I}\mathbf{P}_k \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}_1 \\ \hline \vdots \\ \hline \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}_k \\ \hline \end{array}$$

або у згорнутій формі

$$\mathbf{Y}\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}\mathbf{P} = \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}}{d\tau} + \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}, \quad (5.21)$$

де $\mathbf{Y}\mathbf{P}$ – блочно-діагональна матриця полусних провідностей електричного підграфа системи, що складається з k -х багатополосників; $\mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}$ – вектор повних параметрів всіх k -х багатополосників системи, описаної електричним підграфом.

Помножуючи зліва матричне рівняння (5.21) на матрицю $\mathbf{P}\mathbf{Y}$:

$$\mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{P} \cdot \mathbf{V}\mathbf{P} = \mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \frac{d\mathbf{I}\mathbf{P}}{d\tau} + \mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M}$$

з урахуванням (5.12), запишемо матричне рівняння для електричного підграфа

$$\mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{Y}\mathbf{P} \cdot \mathbf{P}\mathbf{Y}^t \cdot \mathbf{V} = \mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{P}\mathbf{R}\mathbf{M} - \mathbf{P}\mathbf{Y} \cdot \mathbf{I}\mathbf{P}. \quad (5.22)$$

Рівняння (5.22) описує систему з постійною структурою, що складається з k -х багатополосників.

Для аналізу систем зі змінною структурою при виділенні внутрішньої структури k -х багатополосників рівняння (5.6) можна представити у наступному вигляді:

$$\begin{aligned} & (\mathbf{C}\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot \mathbf{P}_e^t \cdot \mathbf{C}\mathbf{B}^t + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{E}) \cdot \mathbf{V} = \\ & = \mathbf{C}\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{Y}\mathbf{L} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \Omega) \cdot \mathbf{I}] - \mathbf{C}\mathbf{B} \cdot \mathbf{P}_e \cdot \mathbf{I}. \end{aligned}$$

З урахуванням рівнянь (5.13) отримуємо

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PP} \cdot \mathbf{YL} \cdot \mathbf{PP}' \cdot \mathbf{PY}' \cdot \mathbf{CB}' + \mathbf{CBE}) \cdot \mathbf{V} = \\
 & = \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PP} \cdot \mathbf{YL} \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{R} + \mathbf{M} \cdot \Omega) \cdot \mathbf{I}] - \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PP} \cdot \mathbf{I}. \quad (5.23)
 \end{aligned}$$

З урахуванням введених позначень (5.16, 5.19, 5.21) матричне рівняння (5.23) приймає вигляд

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{YP} \cdot \mathbf{PY}' \cdot \mathbf{CB}' + \mathbf{CBE}) \cdot \mathbf{V} = \\
 & = \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PRM} - \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{IP}. \quad (5.24)
 \end{aligned}$$

Отримані рівняння дозволяють сформувати компонентний та системний рівні опису СЕУ, що містять k багатополосників.

Системний рівень опису для обчислення векторів потенціалів вузлів \mathbf{V} , \mathbf{V}_y та полюсів \mathbf{VP}

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{YP} \cdot \mathbf{PY}' \cdot \mathbf{CB}' + \mathbf{CBE}) \cdot \mathbf{V} = \\
 & = \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{PRM} - \mathbf{CB} \cdot \mathbf{PY} \cdot \mathbf{IP};
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{V}_y = \mathbf{B}' \cdot \mathbf{V}; \quad \mathbf{VP} = \mathbf{PY}' \cdot \mathbf{V}_y, \quad (5.25)$$

де

$$\mathbf{YP} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{YP}_1 & & \\ \hline & \ddots & \\ \hline & & \mathbf{YP}_k \\ \hline \end{array}; \quad \mathbf{PRM} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{PRM}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{PRM}_k \\ \hline \end{array}; \quad \mathbf{IP} = \begin{array}{|c|} \hline \mathbf{IP}_1 \\ \hline \dots \\ \hline \mathbf{IP}_k \\ \hline \end{array}.$$

Компонентний рівень опису для обчислення векторів падіння напруги \mathbf{U}_k , перших похідних від струмів $d\mathbf{I}_k/d\tau$, повних параметрів \mathbf{PRM}_k , матриці полюсних провідностей \mathbf{YP}_k і вектора суми струмів у полюсах \mathbf{IP}_k .

$$\left. \begin{aligned}
 & \mathbf{U}_k = \mathbf{PP}'_k \cdot \mathbf{VP}_k; \\
 & \mathbf{dI}_k / d\tau = \mathbf{YL}_k \cdot [\mathbf{U}_k - \mathbf{E}_k - (\mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k) \cdot \mathbf{I}_k]; \\
 & \mathbf{PRM}_k = \mathbf{PP}_k \cdot \mathbf{YL}_k \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{R}_k + \mathbf{M}_k \cdot \Omega_k) \cdot \mathbf{I}_k]; \\
 & \mathbf{YP}_k = \mathbf{PP}_k \cdot \mathbf{YL}_k \cdot \mathbf{PP}'_k; \\
 & \mathbf{IP}_k = \mathbf{PP}_k \cdot \mathbf{I}_k.
 \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

5.2. Особливості реалізації цілісної математичної моделі систем з динамічною структурою

Сформовані математичні моделі СЕУ та їх багатополосних компонентів призначені для проведення розрахунків на базі сучасних засобів обчислювальної техніки. Існуючі аналогові та цифрові засоби ефективні під час вирішення широкого кола задач, мають суттєві відмінності, і недоцільно замінити одну техніку іншою.

Одними з основних переваг аналогових обчислювальних машин (АОМ) є простота перевірки нових математичних моделей, оперативний характер обробки і як результат – ефективне та швидке вирішення поставленої задачі.

Перевагами цифрової обчислювальної машини (ЦОМ) є постійна готовність програм до використання, простота і ефективність розрахунку значної кількості варіантів, широкі можливості документування результатів дослідження і як результат – всебічне вирішення поставленої задачі.

Суттєві відмінності АОМ від ЦОМ – у суміщенні процесів передачі та обробки в АОМ інформації, а використовуючи термінологію ЦОМ, – у побудові багатопроцесорної, глибоко розпаралеленої структури АОМ у повній відповідності з вирішуваною задачею; можливість отримання рішення в реальному та прискореному масштабах часу. Все це робить АОМ незамінним інструментом сучасного інженера в роботі по вивченню досліджуваних об'єктів та режимів. При цьому дослідник, добиваючись правильної роботи моделі, розвиває та поглиблює свої знання про проєктований об'єкт, про фізику протікаючих процесів.

Необхідно відмітити, що складова $\mathbf{F} = \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I}$ має принципове значення при практичній реалізації математичної моделі СЕУ. Наявність цієї складової дозволяє проводити розрахунки на ЦОМ з обмеженою розрядністю представлення змінних, а на АОМ – з операційними посилювачами обмеженої точності. При цьому знімається обмеження на тривалість аналізованих перехідних процесів, оскільки помилки обчислень не накопичуються, а враховуються на кожному моменті часу розрахунку. Крім того, помилки обчислень понижуються на порядок, тобто від величини порядку 10^{-5} до 10^{-6} , якщо рівняння (5.1) записати у вигляді

$$\mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I} + h_k \cdot \mathbf{CBP} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{dt} = 0$$

або

$$k \cdot \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I} + \mathbf{CBP} \cdot \frac{d\mathbf{I}}{d\tau} = 0, \quad (5.27)$$

де $k = 1 / h_k$ – масштабний коефіцієнт.

Така форма запису першого закону Кірхгофа відповідає однокроковому чисельному розв'язуванню систем диференційних рівнянь з кроком h_k по методу Ейлера. З фізичної точки зору можна вважати, що висуваються більш жорсткі вимоги до виконання першого закону Кірхгофа, тобто необхідно, щоб сума струмів у вузлах схеми в момент τ дорівнювала нулеві: $\mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I}(\tau) = 0$ та сума похідних струмів у вузлах схеми в момент часу τ також дорівнювала нулю: $\mathbf{CBP} \cdot d\mathbf{I}(\tau) / d\tau = 0$. Сума струмів у вузлах схеми в момент часу $\tau + h_k$ також повинна дорівнювати нулю або, інакше, сума струмів у майбутній момент часу розрахунку також має дорівнювати нулю:

$$\begin{aligned} \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I}(\tau) + h_k \cdot \mathbf{CBP} \cdot \frac{d\mathbf{I}(\tau)}{d\tau} &= \mathbf{CBP} \cdot \left[\mathbf{I}(\tau) + h_k \cdot \frac{d\mathbf{I}(\tau)}{d\tau} \right] = \\ &= \mathbf{CBP} \cdot \mathbf{I}(\tau + h_k) = 0. \end{aligned}$$

Результати обчислювального експерименту дозволяють рекомендувати величину $h_k = 0,1$ або $k = 1/h_k = 10$. Збільшення масштабуючого коефіцієнта, наприклад, до $k = 100$, не приводить до збільшення точності обчислень, а навпаки, викликає її зниження і, крім того, приводить до порушення стійкості обчислювального процесу.

Таким чином, специфічні можливості як АОМ, так і ЦОМ вимагають при реалізації тих чи інших математичних моделей перетворення їх до певного вигляду. Причому ефективність використання і проведення розрахунків у значній мірі визначає саме етап реалізації в форму конкретних аналогових чи цифрових моделей.

Характер помилки по явній та неявній схемі однокрокового методу Ейлера представлений для одного кроку розрахунку H на рис. 5.1. Очевидно, що похідна шуканої змінної на початку кроку $H y'_t$ дозволяє визначити значення змінної в кінці кроку $y_j = y_t + y'_t H$, причому цей результат буде більше, ніж дійсне значення змінної y_{t+H} , що і характерно для явного методу Ейлера. Для

неявного методу Ейлера характер виникнення помилки обернений. Так, знаючи похідну в кінці кроку y'_{t+H} , знаходимо значення змінної в кінці кроку $y_N = y_i + y'_{t+H}H$, яке менше, ніж точне значення $y_{t+H} = y_i + y'_{t+H}H$. Якщо графічно з'єднати значення змінної y_i в момент часу t , тобто на початку кроку H , і в кінці кроку y_{t+H} , то можна визначити ту похідну шуканої функції, котра для однокрокового методу Ейлера дає точне рішення. Провівши паралельно цій з'єднуючій прямій дотичну до графіка функції, можна визначити той крок h і той момент часу $t+h$, для якого необхідно обчислювати похідну від функції y'_{t+h} , що дає точне рішення, що і характерно для багатокрокових методів розв'язування систем диференціальних рівнянь.

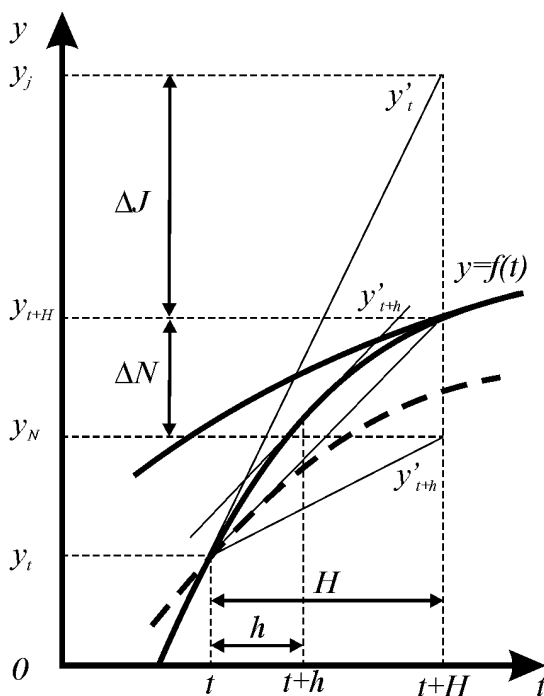


Рис. 5.1

Розглядаючи явний і неявний однокрокові методи Ейлера як єдиний комбінований однокроковий метод з корегуючими параметрами системи диференціальних рівнянь, запишемо

$$\frac{\mathbf{I}_{t+H} - \mathbf{I}_t}{H} = (\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{B}_{t+h} \cdot h)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{t+h} - \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{I}_t). \quad (5.28)$$

Причому при $h=0$ це рівняння відповідає явному методу, а при $h=H$ – явному методу Ейлера. Таким чином, вибираючи h , можна здійснити настройку однокрокового методу з метою забезпечення розрахунку тривалих перехідних процесів із заданою точністю.

З фізичної точки зору на інтервалі розрахунку з кроком H здійснюється така корективна параметрів модельованої системи $(\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{B}_{t+h}h)$, котра забезпечує обчислення похідної $(\mathbf{I}_{t+H} - \mathbf{I}_t)/H$, яка дозволяє визначити по однокроковій схемі шукану функцію \mathbf{I}_{t+H} . На рис. 5.1 пунктиром відмічена скоригована на кроці H функція $y_H = f_H(t)$ таким чином, щоб обчислена в момент часу t її похідна y'_{t+H} забезпечувала розрахунок однокроковим методом шуканої функції y_{t+H} . Параметром коригування є змінна h , значення якої необхідно визначати на кожному кроці. З цієї метою представимо рівняння (5.28) у вигляді

$$\mathbf{I}_{t+H} / H - \mathbf{I}_t / H = (\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{B}_{t+h} \cdot h)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{t+h} - \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{I}_t).$$

Помножуючи це рівняння на матрицю \mathbf{P} , що описує схему з'єднання статорних ланцюгів двох синхронних машин, отримуємо

$$\mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{I}_{t+H}}{H} - \mathbf{P} \cdot \frac{\mathbf{I}_t}{H} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{B}_{t+h} \cdot h)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{t+h} - \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{I}_t).$$

Враховуючи, що сума струмів у вузлах аналізованої схеми як для моменту часу t , так і для моменту $t+H$ дорівнює нулю, тобто

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_{t+H} = 0; \quad \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_t = 0,$$

то можна записати

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{B}_{t+h} \cdot h)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{t+h} - \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{I}_t) = 0 \quad (5.29)$$

або

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{A}_t + \mathbf{B}_t \cdot h_t)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_t - \mathbf{B}_t \cdot \mathbf{I}_t) = 0. \quad (5.30)$$

Очевидно, що рівняння (5.29, 5.30) не можуть бути розв'язані в явному вигляді відносно шуканих змінних h або h_t і приводять до додаткових витрат

на їх розв'язання. Тобто, зберігаючи простоту однокрокового методу, необхідні додаткові обчислення по визначенню на кожному кроці параметра коригування, що в цілому не дає вигаду у порівнянні з багатокроковим методом.

Один з алгоритмів підвищення точності обчислень при використанні однокрокового методу можна представити рівнянням

$$\frac{\mathbf{I}_{t+H} - \mathbf{I}_t}{H} = (\mathbf{A}_{t+h} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{D}^t)^{-1} \cdot (\mathbf{U}_{t+h} - \mathbf{B}_{t+h} \cdot \mathbf{I}_t), \quad (5.31)$$

де $\mathbf{D} = \mathbf{E}h + \mathbf{D}\mathbf{H}$ – діагональна матриця корекції; \mathbf{E} – одинична матриця; $h = H/2$ – змінна, що відповідає середньому значенню аргумента t в розрахунках за явними і неявними методами Ейлера; $\mathbf{D}\mathbf{H}$ – діагональна матриця приростів змінної h для кожного рівняння системи.

Елементи діагональної матриці приростів $\mathbf{D}\mathbf{H}$ визначаються наступним чином. Первинно задаємося нульовими значеннями елементів матриці $\mathbf{D}\mathbf{H}$, що відповідає початковим умовам розрахунку перехідних процесів. По мірі розв'язування системи диференціальних рівнянь згідно з рівнянням (5.31) відбувається накопичення помилки, що призводить до появи нев'язки суми струмів або суми похідних струмів у вузлах $\mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_t = \xi \neq 0$.

Це рівняння характеризує накопичувану помилку і пов'язує її з вузлами. При переході від умов у вузлах до умов у гілках можна записати вектор

$$\mathbf{D}\mathbf{E} = \mathbf{P}^t \cdot \xi = \mathbf{P}^t \cdot \mathbf{P} \cdot \mathbf{I}_t, \quad (5.32)$$

що визначає діагональні елементи матриці $\mathbf{D}\mathbf{H}$.

Необхідно відмітити, що використання діагональної матриці \mathbf{D} , одиничної матриці \mathbf{E} і вектора $\mathbf{D}\mathbf{E}$ в рівнянні (5.31) відповідає адаптації однокрокового численного комбінованого методу Ейлера до інтегрування системи диференціальних рівнянь, що враховують різницю в параметрах (в постійних часу) окремо кожного диференціального рівняння та їх взаємозв'язку.

Необхідно відмітити, що представлення результатів у звичній для інженера графічній формі суттєво розширює можливості та ефективність математичного моделювання на ЕОМ. Фактично виводяться осцилограми миттєвих значень, аналізованих змінних струмів та напруг. Практично надаються необмежені можливості по формуванню та видачі будь-яких характеристик, що ціка-

влять дослідника, в будь-якому масштабі, у тому числі й таких, замір яких на діючому фізичному обладнанні чи макеті викликає суттєві ускладнення, а іноді і його неможливість. Суміщення ж графічної форми представлення результатів дослідження з розрахунками показників та оцінок дозволяє організувати ефективний експрес-аналіз режиму роботи обладнання, всебічно перевірити ефективність нових інженерних пропозицій та обґрунтувати вибір найбільш раціонального рішення.

Контрольні питання

1. Яка структура систем автоматизованого проектування?
2. Вкажіть етапи розвитку програмного забезпечення.
3. Вкажіть рівні математичного опису технічних систем.
4. Запишіть динамічну матрицю інцидентій.
5. Які матриці враховують розподіл еклетичного підграфа на частини?
6. Яка матриця описує динамічну структуру технічної системи?
7. Запишіть розгорнуте рівняння синхронної машини в осях odq у відносних одиницях.
8. Який зв'язок між матрицями інцидентій у фазних осях і осях odq ?
9. Чим виражається структура синхронної машини в осях odq ?
10. Запишіть логічне описання вентиля.
11. Для яких цілей необхідна модель системи управління вентилями перетворювачами?
12. Вкажіть форму запису першого закону Кірхгофа для автоматизації розрахунків технічних систем.