Глава 3.
ТОПОЛОГІЧНИЙ РІВЕНЬ ОПИСУ СТРУКТУРИ СИСТЕМ

Завданням докладного дослідження перехідних процесів у СЕУ є визначення динамічних властивостей системи і виявлення шляхів їх удосконалення з метою забезпечення необхідних показників якості вироблюваної електроенергії.

Для всебічного аналізу властивостей і розвитку засобів синтезу СЕУ необхідно володіти рівняннями цих систем в достатньо загальній формі, які є математичними моделями досліджуваного об'єкта.

Особливість СЕУ полягає в тому, що вони містять комутаційні елементи, наприклад, автомати і вентилі, що в процесі роботи перебувають в одному з двох сталих станів – проводять струм або не проводять. Подання цих елементів ідеальними контактами, що змінюють структуру електричного ланцюга, зумовлює опис досліджуваної схеми як електричним, так і комутаційним підграфами. Застосування теорії графів для опису комбінаторних контактних схем і електронних логічних ланцюгів, що відображаються булевими функціями, дає змогу сформувати ефективний математичний опис комутаційного підграфа. Встановленню зв'язку між електричними і контактними частинами схеми шляхом використання загальних методів, матричного і топологічного, кількісного опису складних систем присвячені роботи [13-17; 21; 22]. Нижче узагальнені відомі розробки в цій галузі і включені деякі нові результати автора.

Однією з основних вимог, що ставляться до математичного опису, є можливість дослідження функціонування системи в нормальних і аварійних режимах з урахуванням переключень, які приводять до зміни структури електричної системи. Цій вимозі задовольняє математична модель електричної системи, побудована за принципом топологічного ізоморфізму [14], який визначає взаємно однозначну відповідність між структурними перетвореннями в об'єкті і моделі. Згідно з цим принципом елементи електричної системи подані у вигляді багатополюсних компонентів, багатополюсників. Динамічне об'єднання багатополюсників у систему здійснюється шляхом комутаційної схеми.

Сполучення багатополюсників між собою описується законами Кірхгофа. Ці закони пов'язані тільки з топологією ланцюга і не враховують характеру елементів, що її складають. Узагальнений метод аналізу ланцюгів з багатополюсниками і підсхемами дозволяє розкласти загальну задачу аналізу складних ланцюгів на кілька локальних, більш простих задач.

Для узагальненого дослідження схем елементи електричного ланцюга зображуються у вигляді ліній-гілок. Кожній гілці придамо напрям, обраний довільно і позначений стрілкою. Позитивні напрямки струмів у гілках і напруг на них приймаємо як такі, що співпадають з орієнтацією гілок. У місцях сполучення гілок утворюються вузли. Системи гілок, що з'єднані в вузлах, являють собою лінійні графи електричних схем. У графі досліджуваної системи можна виділити три підграфи, що описуються основними матрицями інциденцій і відповідають електричній, комутаційній схемам та схемі, яка включає малі параметри мережі.

3.1. Підграф систем з фіксованою структурою

У підграфі, який включає малі параметри мережі **($\mathbf{P}_m$)**, містяться гілки, що віддзеркалюють ємності вузлів у системі відносно спільної бази. Підграф комутаційної мережі **($\mathbf{P}_v$)** становлять комутаційні елементи системи. Решта гілок графа утворюють підграф електричної мережі **($\mathbf{P}_e$)**. Для кожного з підграфів можна сформувати вектор струмів гілок підсхем **($\mathbf{I}_m$, $\mathbf{I}_v$, $\mathbf{I}_e$)**. Крім того, у типі систем, що розглядається, звичайно відсутні незалежні джерела струму, тому рівняння першого закону Кірхгофа набуває вигляду

$$\left[\mathbf{P}_e, \mathbf{P}_v, \mathbf{P}_m\right] \cdot \left[\mathbf{I}_e^t, \mathbf{I}_v^t, \mathbf{I}_m^t\right]^t = \mathbf{0}. \qquad (3.1)$$

Якщо досліджують лише електромагнітні процеси в електричному ланцюзі без урахування струморозподілу в комутаційних елементах і струмів витоку через ємності вузлів схеми, то число стовпчиків матриць інциденцій $\mathbf{P}_v$ і $\mathbf{P}_m$ дорівнює $\mathbf{0}$.

Тому рівняння (3.1) можна записати

$$\mathbf{P}_e \cdot \mathbf{I}_e = 0. \tag{3.2}$$

3.2. Підграф систем з динамічною структурою

Для запису комутаційної схеми використаємо матрицю суміжностей

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{P}_{vL}^{-} \wedge \mathbf{P}_{vL}^{+t},$$

де $\mathbf{P}^{-}_{vL}$ – основна матриця інциденцій вхідних гілок комутаційного підграфа (логічна); $\mathbf{P}^{+t}_{vL}$ – транспонована основна матриця інциденцій вихідних гілок комутаційного підграфа (логічна).

Прийняті позначки базуються на так званому поданні повної провідності контактної схеми: *T(TRUE)* – відповідає замкнутому, а *F(FALSE)* – розімкнутому ланцюгу.

Стан i-го комутаційного елемента (i-й гілки комутаційного підграфа) визначається логічною змінною X_i. Тоді

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}_{vL}^{-} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^{+t},$$

де $\mathbf{X}_\mathrm{L}$ – діагональна матриця стану комутаційних елементів (логічна).

Елемент матриці суміжностей $a_{ij} = T$, якщо у схемі існує гілка (комутаційного підграфа), спрямована від вузла i до вузла j, $a_{ij} = F$, якщо такої гілки немає. Діагональний елемент $a_{ii} = T$, якщо у вузлі i існує гілка – петля, і $a_{ii} = F$, якщо така петля відсутня. Дослідника цікавлять і аварійні режими роботи комутаційних елементів, такі, як пробій вентиля, тобто спроможність проводити струм у зворотному напрямі, тому необхідно перейти до розгляду нової матриці суміжностей

$$\mathbf{A}_2 = (\mathbf{P}_{vL}^{-} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^{+t}) \vee (\mathbf{P}_{vL}^{+t} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^{-})$$

або матриці спряжень

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{P}_{vL} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^{t},$$

де $\mathbf{P}_{vL} = \mathbf{P}^{+}_{vL} \vee \mathbf{P}^{-}_{vL}$ – основна матриця інциденцій (логічна).

Матриці $\mathbf{A}_2$ або $\mathbf{A}_3$ своїми значущими (відмінними від *FALSE*) позадіагональними елементами вказують на існуючі у схемі спряження між вузлами.

Оскільки кожний вузол електричного ланцюга тотожно зв’язаний сам із собою, основна матриця з’єднань визначається як

$$\mathbf{A}_4 = \mathbf{P}_{vL} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^t \vee \mathbf{E}_L, \tag{3.3}$$

де $\mathbf{E}_L$ – одинична логічна матриця порядку m (m – кількість вузлів), яка визначає тотожність зв’язку вузла з самим собою.

Елементи основної матриці з’єднань визначають усі шляхи одиничної довжини (шлях, що включає одну гілку), що зв’язують вузли графа. Щоб визначити всі можливі шляхи довжиною не більше $m_k - 1$ гілок у комутаційному підграфі, слід використати матрицю повних досяжностей вузлів

$$\mathbf{A}_L = \mathbf{A}_4^{m_k - 1} = (\mathbf{P}_{vL} \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{P}_{vL}^t \vee \mathbf{E}_L)^{m_k - 1}, \tag{3.4}$$

де m_k– число вузлів, спільних для гілок комутаційного й електричного підграфів.

3.3. Об’єднання математичного опису підграфів систем з фіксованою та динамічною структурами

У процесі функціонування комутаційні елементи змінюють інцидентність вузлів графа, що приводить до зміни інцидентності гілок електричного підграфа, що на топологічному рівні описується матрицею $\mathbf{P}_e$. Для відповідної перебудови матриці $\mathbf{P}_e$ можна безпосередньо використати алгебраїчну матрицю повних досяжностей вузлів **A** при переході від її логічної форми $\mathbf{A}_L$

$$\mathbf{AP} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}. \tag{3.5}$$

При цьому рядки перетвореної матриці інциденцій **AP**, відповідні вузлам, об’єднаним у складний комутаційний вузол, будуть рівні. Перетворена матриця інциденцій **AP** буде мати стільки залежних рядків, скільки вузлів об’єдналися в складний. Об’єднання вузлів комутаційним елементом, що замкнувся, зумовлює наявність двох однакових вузлів у схемі, що аналізується, а в матриці інциденцій $\mathbf{P}_e$– двох однакових рядків.

Розглянемо лише один вузол, відповідний складному вузлу. Для цього необхідно складному вузлу надати номер якогось із комутованих вузлів, а інші вузли, що об’єдналися в складний, з розгляду виключити. З цією метою в роботі [14] було запропоновано використати логічну матрицю перебудування $\mathbf{B}_L$.

Якщо складному вузлу надаємо найменший індекс із комутованих вузлів, то елементи матриці перебудування $\mathbf{B}_L$ можна визначити через елементи матриці повних досяжностей $\mathbf{A}_L$ за виразом

$$b_{ij} = a_{ij} \bigwedge_{k=1}^{k=i-1} \overline{a}_{ik}, \tag{3.6}$$

де a_{ij}, a_{ik} ij-й елемент матриці $\mathbf{A}_L$ і логічне заперечення i_k-го елемента матриці $\mathbf{A}_L$;

$\bigwedge_{k=1}^{k=i-1}$ – знак почленного логічного множення.

Матриця перебудування $\mathbf{B}_L$ трикутна верхня визначає логічні умови зв'язності та існування вузлів. Елемент матриці перебудування $b_{ij} = T$ тільки тоді, коли внаслідок замикання будь-якого числа комутаційних елементів утворився складний вузол з індексом i, а j-й вузол з розгляду виключено як другорядний, причому завжди $j > i$. Діагональний елемент $b_{ii} = T$, якщо i-й вузол існує, а $b_{jj} = F$, оскільки j-й вузол – другорядний в складному i-му вузлі.

Змінна структура аналізованої схеми описується динамічною матрицею інциденцій [14]

$$\mathbf{BP} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}. \tag{3.7}$$

Необхідно уточнити, що елементи матриці **BP** – цілі. При описі складних схем елементами логічної матриці $\mathbf{B}_L$ можуть бути вирази, що містять операції логічного додавання. Необхідно ввести проміжні логічні змінні так, щоб кожному елементу матриці $\mathbf{B}_L$ відповідала логічна змінна, що замінила логічний вираз. Це необхідно, щоб перейти від логічної матриці $\mathbf{B}_L$ до її алгебраїчної форми запису у вигляді матриці **B**. Після цього можна сформувати алгебраїчну матрицю **BP** за рівнянням (3.7).

При виникненні другорядних вузлів, внаслідок замикання комутаційних елементів, у матриці **BP** виявляються нульові рядки, що приводить до виродження матриці вузлових провідностей. Якщо розглядати кожний другорядний вузол як виникнення ізольованого вузла, тобто підграфа, що містить один-єдиний вузол і тому базисний, потенціал якого дорівнює нулю, то можна відвернути виродження матриці вузлових провідностей. Процедура формування рівностей потенціалів другорядних вузлів нулю може бути формалізована наступним чином.

Діагональні елементи матриці $\mathbf{B}_L$ містять інформацію про вузли. Якщо $\mathbf{B}_L(i, i) = T$, то i-й вузол розглядається, а якщо $\mathbf{B}_L(i, i) = F$, то i-й вузол не розглядається як другорядний у складному вузлі, який виник у результаті об'єднання вузлів комутаційними елементами, що замкнулися.

Матриця $\mathbf{B}_L \vee \overline{\mathbf{E}}_L$, де $\overline{\mathbf{E}}_L$ – логічне заперечення для одиничної логічної матриці, характеризує лише вузли, а не взаємозв'язки між вузлами. А матриця

$$\mathbf{BE}_L = \overline{\mathbf{B}_L \vee \overline{\mathbf{E}}_L}$$

містить на головній діагоналі вирази, що забезпечують появу T для будь-якого другорядного вузла. Тоді формалізована умова рівності нулю потенціалів будь-яких можливих другорядних вузлів при переході до алгебраїчного подання від матриці $\mathbf{BE}_L$ до матриці $\mathbf{BE}$ може бути записана як $\mathbf{BE}\cdot\mathbf{V} = 0$, де $\mathbf{V}$ – вектор потенціалів вузлів.

Крім цього, при розмиканні комутаційних елементів можливий розподіл електричного зв'язного підграфа на сукупність підграфів. У кожному підграфі необхідно виділити базисний вузол і прийняти, що його потенціал дорівнює нулю, спочатку виключивши його з розгляду, аналогічно другорядному. Утворення нових базисних вузлів у схемі, що аналізується, відбувається в результаті виникнення перерізів із комутаційних елементів.

Матриця перерізів $\mathbf{Q}_L$ комутаційного підграфа містить стільки стовпчиків, скільки гілок у комутаційному підграфі, й стільки рядків – скільки перерізів. Матриця $\mathbf{Q}_L$ формується з урахуванням лише тих перерізів, що виділяють лише один підграф, причому раніше не виділений.

Перерізи комутаційного підграфа при будь-яких станах комутаційних елементів описують матрицею

$$\mathbf{QE}_L = \overline{\mathbf{Q}_L \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{Q}_L^t \vee \overline{\mathbf{ES}_L}}, \tag{3.8}$$

де $\mathbf{ES}_L$ – одинична логічна матриця, розмірність якої дорівнює кількості перерізів.

Матриця $\mathbf{QE}_L$ – діагональна і позбавлена інформації про комутаційні елементи, які спільні для декількох перерізів, бо необхідно враховувати самі перерізи, а не їх взаємозв'язки.

Вибір базисного вузла в кожному електричному підграфі, які утворюються з появою перерізів, може бути довільним. За результатами аналізу графа на зв’язність при розімкнутому стані комутаційних елементів формується матриця $\mathbf{S}_L$. Якщо $\mathbf{S}_L(i, j) = T$, то i-й вузол базисний внаслідок існування j-го перерізу. Тоді формалізована умова рівності нулю потенціалів будь-яких можливих базисних вузлів на основі матриці

$$\mathbf{GE}_L = \mathbf{S}_L \wedge \overline{\mathbf{Q}_L \wedge \mathbf{X}_L \wedge \mathbf{Q}_L^t \vee \overline{\mathbf{ES}_L}} \wedge \mathbf{S}_L^t$$

при переході до її алгебраїчного подання матрицею GE може надаватися у формі

$$\mathbf{GE} \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3.9}$$

Щоб виключити з розгляду всі базисні вузли, що утворюються, тобто як і для другорядних в складному вузлі, способом рівняння нулю відповідних рядків матриці $\mathbf{P}_e$ за допомогою матриці $\mathbf{B}_L$ необхідно сформувати матрицю

$$\mathbf{C}_L = \overline{\mathbf{GE}_L \vee \overline{\mathbf{E}}_L}. \tag{3.10}$$

Повна інформація про другорядні і базисні вузли може бути описана виразами:

- умова існування вузлів, пряма

$$\mathbf{CB}_L = \mathbf{C}_L \wedge \mathbf{B}_L; \tag{3.11}$$

- умова виродження вузлів, зворотна

$$(\mathbf{BE} + \mathbf{GE}) \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3.12}$$

Розглядаючи процес формування складних вузлів і комутаційних перерізів при замиканні одних і розмиканні інших комутаційних елементів як єдиний процес формування базисних вузлів внаслідок виникнення підграфів, можна сформувати таку матрицю:

$$\mathbf{CBE}_{\mathrm{L}} = \overline{\mathbf{CB}_{\mathrm{L}} \vee \overline{\mathbf{E}}_{\mathrm{L}}}. \tag{3.13}$$

Тоді умова рівності нулю потенціалів будь-яких базисних вузлів, що утворюються, при переході від логічної матриці $\mathbf{CBE}_L$ до її алгебраїчної форми запису як матриці **CBE** описується рівнянням

$$\mathbf{CBE} \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{3.14}$$

При переході від логічної матриці $\mathbf{CB}_L$ до її алгебраїчної форми **СВ** динамічну структуру систем, що містять комутаційні елементи, можна описати матрицею

$$\mathbf{CBP} = \mathbf{CB} \cdot \mathbf{P}_e . \tag{3.15}$$

Матриця **СВР** описує динамічну структуру системи при будь-яких станах комутаційних елементів, виключає дублювання інформації про другорядні вузли в складних вузлах і про базисні вузли, що утворюються внаслідок виникнення перерізів із комутаційних елементів, які приводять до розподілу первинного графа на сукупність підграфів. Наступним кроком у розвитку математичного опису систем зі структурою, що змінюється, буде розробка алгоритму формування динамічної матриці **СВМ**, яка мінімізує кількість вузлів, що залишилися до розгляду при комутаціях елементів.

Контрольні питання

1. Що являє собою граф системи?
2. В чому сутність методу декомпозиції складних систем?
3. Поняття “підграф”, “вузол”, “гілки”.
4. Чим описується структура системи?
5. Які форми опису структури систем вам відомі ?
6. Які форми опису фіксованої структури відомі?
7. Які є форми опису динамічної структури?
8. Як об’єднати математичний опис динамічної та фіксованої структур?
9. Теорема Лунца.
10. Правила переходу від логічної форми опису структури до алгебраїчної.
11. Правило ортогоналізації.
12. Сутність першої, другої та третьої матриць опису структури системи.
13. Матриця перебудови.
14. Матриця перерізів.
15. Повна динамічна матриця опису систем із змінною структурою.