РОЗДІЛ 10.
ПОБУДОВА СППР НА ОСНОВІ МЕТОДІВ БАГАТОЦІЛЬОВОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА МЕТОДІВ БАГАТОЦІЛЬОВОГО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

10.1. Прийняття рішень на основі багатоцільових методів

Розвиток технічних і економічних систем ставить перед фахівцями завдання ефективного, та оптимального вирішення виникаючих проблем. Це є характерною рисою сучасного етапу розвитку науки в сфері дослідження та моделювання соціально-економічних систем, які в умовах невизначеності, конфліктів та породженого ними ризику адекватно враховують динаміку їх розвитку. До цих характерних рис слід віднести також необхідність створювати моделі, що орієнтуються на декілька цілей стосовно розвитку системи, а оцінка якості альтернативних стратегій розвитку системи здійснюється з позицій множини різних, часто несумісних, критеріїв.

В багатьох галузях науки і техніки, а також в системних дослідженнях використовуються методи багатокритеріального аналізу, та прийняття рішень. Одним з напрямів теорії багатокритеріального прийняття ріщень є багатоцільові методи прийняття рішень. Вважається, що багатоцільове прийняття рішень (*Multiple objective making decision – MODM*) є однією з найшвидше динамічно розвиваючихся областей в теорії прийняття рішень та дослідженні операцій; і головна причина для такого розвитку є те, що багато проблем прийняття рішенння можуть бути сформульовані як багатоцільова задача. Мета MODM – задач в математичному програмуванні – оптимізація k різних цільових функцій, з врахуванням ряду обмежень системи, а в багатоцільовому прийнятті рішень вибір самого ефективного варіанта, за умовою врахування всіх критеріїв конфліктуючих цілей. Математичне формулювання проблеми MODM також відоме як проблема векторної максимізації (або мінімізації). Складність багатоцільового вибору заключається в першу чергу в протиріччі цілей. Звідси виникає необхідність використання деякої схеми розумного компромісу, який дозволяє покращити якість рішень, що приймаються, за всіма локальними критеріями, та показниками ефективності. Окрім того виникає необхідність досліджувати проблему за допомогою багатьох методів і порівнюючи результати досліджень обирати раціональне рішення.

Тому для проведення таких досліджень необхідно мати інструментальні засоби (СППР), які б дозволили якісно дослідити і вирішити проблему багатоцільового вибору.

На сьогодні проблема багатоцільового вибору має виключно важливе значення. Це обумовлено тим, що постійно зростає роль і складність практичних проблем, які вирішуються методами дослідження операцій. Традиційними скалярними (однокритеріальними) методами оптимізації неможливо вирішити ці проблеми.

Особливо важко з їх допомогою дати відповідь на багато запитань, які виникають при розробці складових організаційно-економічних рішень формування і функціонування багатокритеріальних інфраструктур сталого розвитку і функціонування систем. Тільки багатоцільова оцінка і вибір створюють передумови для розробки ефективної методології вирішення цих проблем, дають досліднику або розробнику різних організаційно-економічних і технічних проблем формальний апарат, який дозволяє адекватно вирішити складні проблеми.

Вивченню властивостей і методів вирішення багатоцільових завдань присвячена чимала кількість робіт. Ці питання розглядаються також в багатьох роботах з теорії ігор, економетриці, теорії статистичних рішень, дослідженні операцій, теорії оптимального управління та інших наукових дисциплін, в яких вивчаються різні багатокритеріальні та багатоцільові моделі прийняття раціональних рішень. Проаналізувавши сучасні підходи до вирішення багатоцільових задач, можна зазначити, що проблеми MODM можуть ділитися на чотири різні групи.

В **першій групі** проблем MODM не потрібно отримувати будь-яку інформацію від ОПР протягом процесу пошуку ефективного рішення. Ці види методів і алгоритмів залежать виключно від попередніх припущень про переваги ОПР. Методи лінійного програмування є серед найпопулярніших методів, для вирішення цієї групи проблем, чиї завдання – мінімізація відхилень цільових функцій від ідеального рішення. Так як різні цілі відмінні в природі, вони мають бути нормалізовані перед тим, як почнеться процес мінімізації відхилень. [73]

Друга група проблем MODM включає збір інформації, впорядкованої за кількістю або якістю перед тим як ініціюється процес прийняття рішення. У методі функції корисності, що є найбільш популярним, ми повинні визначити корисність ОПР в залежності від цілі функцій і тоді ми максимізуємо загальну функцію згідно з початковими обмеженнями. Інші методи, включаючи цільове програмування та цільовизначення, є сумішшю інформації впорядкованої як за кількістю, так і за порядком. У методі цільового програмування, який широко використовується багатьма дослідниками, ОПР визначає найменш (найбільш) бажаний рівень максимуму (мінімуму) функції. Здобуття цих значень може призвести до того, що обмеження можуть перевищуватися, але ми намагаємося звести до мінімуму зважені відхилення.

Третя група MODM проблеми пропонує набір ефективних рішень, в яких ОПР має можливість обирати краще рішення серед ефективних рішень. Багатоцільове лінійне програмування (MOLP) і багатокритеріальний симплекс-метод, в цій групі, є одними з широко використовуемих методів.

Четверта група пропонує рішення, що базуються на інтерактивній безперервній взаємодії з ОПР і дозволяють поступово досягти кращого рішення наприкінці цього алгоритму. До цієї групи відноситься багато розроблених методів, таких як: спрощене інтерактивне багатоцільове програмування (SIMOLP); покроковий метод (STEM); послідовне багатоцільове прийняття рішень (SEMOPS); методи теорії ігор; еволюційні методи; генетичні алгоритми.

Крім того слід відзначити багато переваг використання інтерактивних методів, деякі з них:

1) Немає необхідності отримувати інформацію від ОПР до того як ініціюється процес прийняття рішення.

2) Процес прийняття рішення допомагає ОПР більше дізнатися про характер проблеми.

3) Оскільки ОПР постійно аналітично сприяє на вирішення проблеми, він швидше приймає остаточне рішення.

4) Існує менше обмежень в вирішені такого типу проблем в порівнянні з іншими групами в MODM методах.

Однак, є деякі недоліки, пов'язані з цими типами алгоритмів, найбільш важливими з них є:

1) Точність остаточного рішення цілком залежить від точності відповіді ОПО. Іншими словами, якщо ОПР не ретельно аналізує проблему, в результаті остаточне рішення може бути невірним.

2) Немає ніякої гарантії, що буде знайдене бажане рішення за кінцеве число ітерацій.

3) ОПР необхідно докладати більше зусиль у процесі реалізації цих методів і алгоритмів в порівнянні з іншими групами методів багатоцільового прийняття рішень.

Найчастіше багатоцільову задачу намагаються звести до одноцільової. Ця процедура в більшості випадків приводить до значного спотворення суті проблеми і, отже, до невиправданої заміни однієї задачі іншою.

Багатовимірні цілі можуть знаходитися один з одним у наступних відносинах:

Цілі взаємно нейтральні

Цілі кооперуються (система розглядається стосовно однієї мети, а решта досягаються одночасно).

Цілі конкурують. У цьому випадку одну з цілей можна досягти лише за рахунок іншої.

Якщо цілі частково нейтральні, частково кооперовані і частково конкурують між собою, то завдання формулюється таким чином, що потрібно брати до уваги тільки конкуруючі цілі. Розгляд нейтральних або кооперативних цілей не представляє особливих труднощів, так що проблеми, орієнтовані на декілька цілей, перш за все повинні бути розглянуті в частині конкуруючих цілей, якщо всі вони разом не можуть бути виражені одновимірним параметром.

10.2. Методи багатоцільової оптимізації і багатоцільового прийняття рішень

В математичній постановці багатоцільова постановка задачі може представлена як:

$$\min_x[\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)] \tag{10.1}$$

де μ_i є n-ю цільовою функцією, і x вектор оптимізації або змінних рішення. Рішенням зазначеної задачі може бути, як набір точок з множни Парето, для яких поліпшення однієї цілі може відбуватися тільки з погіршенням принаймні однієї іншої цілі, так і рішення, яку буде знайдено за допомогою інших методів. Таким чином, замість того, щоб знайти єдине рішення проблеми (яке зазвичай має місце у традиційному математичному програмуванні), рішенням багатоцільової проблеми може бути (можливо, нескінченна) множина точок Парето, або декілька рішеню. Підхід побудований на аналізі множини Парето є основою багатьох багатоцільових методів. На рис. 10.1 представлені головні методи вирішення багатоцільових задач.

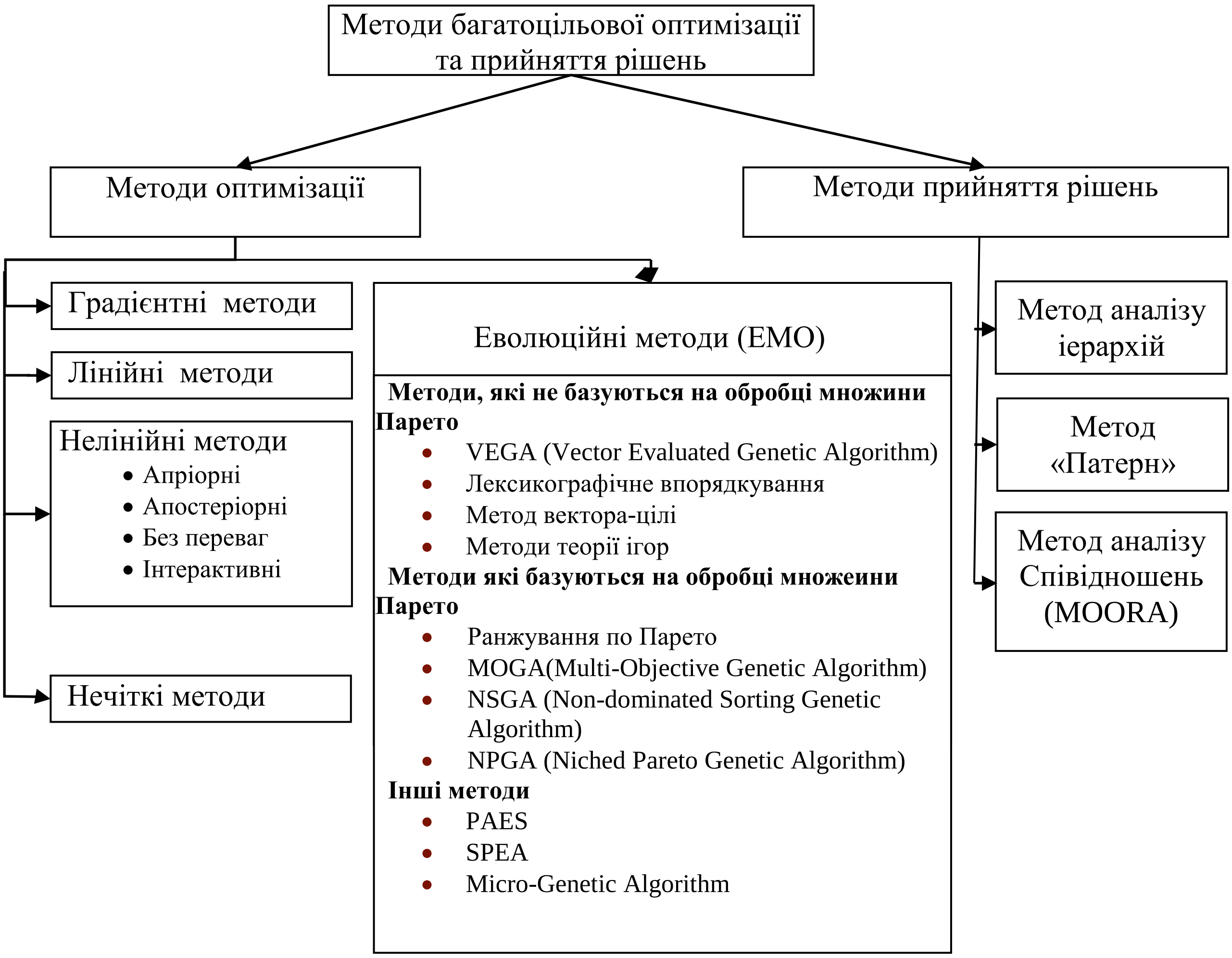

Рис. 10.1 Методи багатоцільової оптимізації та прийняття рішень

Методи вирішення багатоцільових задач умовно поділяються на дві великі групи : методи багатоцільової оптимізації та методи багатоцільового прийняття рішень.

У процесі прийняття рішень важливу роль відіграє інформація від осіб, що приймають рішення, її тип та час застосування в певному методі. В таблиці 10.1 представлені головні класи методів багато-цільової оптимізації та прийняття рішеньв залежності від типу взаємодіїї з ОПР.

Таблиця 10.1

Класи методів	*Суть, переваги та недоліки*	*Приклади методів*
Апріорні методи	Ці методи потребують від ОПР визначення переваг заздалегідь, що може бути проблематично, спираючись на переваги необмежених знань основаних на значенні оптимальної цілі. Буде отримано одне Парето-оптимальне рішення, яке і буде розглядатися як результуючим.	• Метод цільового програмування (GP) • Лексикографічний метод (LM)
Методи без переваг	Як випливає з назви, методи не вимагають яких-небудь коректив зі сторони ОПР до, під час або після вирішення проблеми. Метод головного критерію може знайти Парето-оптимальне рішення, близьке до ідеального вектора.	• Метод головного критерію
Апостеріорні методи	Ці класичні методи потребують вирішення проблем БЦО багато разів, щоб знайти декілька Парето-оптимальних рішень. Метод ε-обмеження підходить для вирішення проблем з декількома цілями. Також ці методи дуже часто застосовуються в інженерних науках, адже вони надають багато Парето-оптимальних рішень, які дуже необхідні ОПР для прийняття рішення. Роль ОПР дуже важлива, адже після знаходжень оптимальних рішень він обирає одне. Недоліком виступає те , що пошук багатьох рішень часто є неефективним	• Метод зважених сум (weighted-sum method) • ε обмеження • Гібридний метод
Інтерактивні методи	ОПР приймає активну учать під час роз'язання задачі за допомогою інтерактивних методів, що є перспективно для задач з великою кількістю цілей. Адже якщо під час обчислень отримаємо декілька оптимальних рішень, одне з яких задовольнить ОПР, воно може бути вибрано як оптимальне. Участь ОПР в обчислювальному процесі постійно необхідні, що не завжди може бути виправдано.	• Метод ефективного рішення у цільовому програмуванні (ESGP) • Інтерактивне багатоцільове лінійне програмування (IMOLP) • Послідовне інтерактивне цільове програмування (ISGP) • Метод STEM • Еволюційні алгоритми (EA)

Апріорні методи. Апріорні методи є одніми з найбільш досліджених та розвинених методів. Головною особливостю цих методів є те, що в результаті їх застосування багатоцільова задача зводиться до цільової і знаходиться тільки одне рішення яке і буде результуючим [73,74,79].

Метод цільового програмування(GP). В методі ОПР встановлює параметри для кожної мети, яку необхідно досягти. Кращим рішенням буде те, в якого найменше відхилення від цілей. Для рішення застосовується метод лінійного програмування (MOLP). Деякі цілі (параметри) $g=(g_1,g_2,...,g_k)^T$ вказуються для цільової функції $f=(f_1(x),f_2(x),...,f_k(x))^T$ і змінна величина рішення $x^*\in X$ в MOLP обчислюється значення цільової функцію $f^*=(f_1^*(x),f_2^*(x),...,f_k^*(x))^T$ яка якомога ближче до мети:

$$g=(g_1,g_2,...,g_k)^T. \tag{10.2}$$

Різниця між $f^*=(f_1^*(x),f_2^*(x),...,f_k^*(x))^T$ і $g=(g_1,g_2,...,g_k)^T$ зазвичай визначається як відхилення функції $D(f(x),g)$. Потім задача цільового програмування може бути визначена, як задача оптимізації:

$$f(x)=\begin{cases}\min D(f(x),g)\\ x\in X=\{x\in R^n \mid Ax\le b, x\ge 0\}\end{cases} \tag{10.3}$$

Тобто необхідно знайти $x^*\in X$, який мінімізує $D(f(x),g)$ чи $x^*=\arg\min\limits_{x\in X} D(f(x),g)$.

Звичайно, функція відхилення $D(f(x),g)$ – це максимум відхилення від окремих цілей, $D(f(x),g)=\max\{D_1(f_1(x),g_1),...,D_k(f_k(x),g_k)\}$.

Мінімаксний підхід застосовується до проблем цільового програмування:

$$\begin{cases}\min\max\{D_1(f_1(x),g_1),...,D_k(f_k(x),g_k)\}\\ x\in X=\{x\in R^n \mid Ax\le b, x\ge 0\}\end{cases} \tag{10.4}$$

Шляхом введення допоміжної змінно γ можна перетворити в наступну задачу лінійного програмування:

$$f(x)=\begin{cases} D_1(f_1(x),g_1\le\gamma \\ D_2(f_2(x),g_2\le\gamma \\ \dots \\ D_m(f_m(x),g_m\le\gamma \\ Ax\le b \\ x\ge 0 \end{cases} \tag{10.5}$$

Розглянемо наступний приклад задачі цільового програмування:

$$\max f(x)=\max\begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix} 2x_1+x_2 \\ -x_1+2x_2 \end{pmatrix} \tag{10.6}$$

$$f(x)=\begin{cases} -x_1+3x_2\le 21 \\ x_1+3x_2\le 27 \\ 4x_1+3x_2\le 45 \\ 3x_1+x_2\le 30 \end{cases} \tag{10.7}$$

Припустимо, що цілі зазначенні як $g=(10{,}10)^T$. Початкова проблема цільового програмування може бути конвертована в задачу лінійного програмування з допоміжною змінною γ, $\min\gamma$

$$f(x)=\begin{cases} 2x_1+x_2-10\le\gamma \\ +x_1+2x_2-10\le\gamma \\ -x_1+3x_2\le 21 \\ x_1+3x_2\le 27 \\ 4x_1+3x_2\le 45 \\ 3x_1+x_2\le 30 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases} \tag{10.8}$$

Тоді, оптимальне рішення $(x_1^*,x_2^*)=(2{,}6)$, і значення оптимальної цільової функції $f^*(x)=(f_1^*(x),f_2^*(x))^T=(10{,}10)^T$.

За допомогою значення оптимальної цільової функції можемо визначити, що вона не досягає мети. Причина в тому, що вказані цілі виходять за рамки допустимої області обмежень.

Методи без переваг. Для методів, що не використовують переваги, ОПР отримує рішення з оптимізації процесу. Вони можуть зробити вибір – прийняти або відхилити його. Цей метод використовують в тому випадку, коли ОПР не має конкретних припущень про рішення. Метод глобального критерію може бути використаний для демонстрації цього класу методів.

Для цього методу, перетворення багатоцільової задачі в одноцільову оптимізаційну задачу відбувається по зведенню до мінімуму відстані між деякими точками відліку, та можливості цілі. В найпростішій формі (з використанням Lp-метрики) орієнтиром є ідеальне рішення і задача представляється наступним чином:

$$\min\left(\sum_{i=1}^{k}\left|f_i(x)-z_i^*\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \tag{10.9}$$

де z* – ідеальний вектор, k – кількість цілей. Ситуація коли p=1 називається проблемою Чебишева з метрикою Чебишева та представляється наступним чином:

$$\min \max_{i=1,\ldots,k}\left|f_i(x)-z_i^*\right| \tag{10.10}$$

З цього рівняння видно, що знайдені рішення залежать від вибору значення p. Крім того в кінці методу ОПР отримує єдине рішення.

Апостеріорні методи. В апостеріорних методах після отримання набору Парето-оптимальних рішень ОПР обирає найбільш відповідне рішення на його думку. Тут два найбільш популярні підходи, *метод зваженої суми* і метод *ε-обмеження*.

Для *методу зваженої суми*, всі цілі будуть об’єднані в єдину ціль, використовуючи ваговий вектор. Потім рівняння (10.9) перетворються в рівняння (10.11):

$$\min f(\vec{x})=w_1 f_1(\vec{x})+w_2 f_2(\vec{x})+\ldots+w_k f_k(\vec{x})\Big|\vec{x}\in D \tag{10.11}$$

де i=1,2,…k і $D\in R_n$.

Ваговий вектор нормований наступним чином $\sum w_i=1$. На рис. 10.2 видно як працює цей метод в 2D цільовому просторі. З рівняння (10.11) ми можемо бачити

$$f_2 = -\frac{w_1}{w_2} f_1 + \frac{f}{w_2}. \qquad (10.12)$$

Це рівняння можна зобразити у вигляді прямої лінії на рис. 10.2 (a).

Тому, коли проводиться оптимізація процесу, це еквівалентно переміщенню лінії до початку координат цільового простору, поки він досягне точки A оптимального набору. Хоча метод зваженої суми простий та легкий у використанні, він має дві проблеми.

По-перше, є складність вибору ваги з метою вирішення проблеми масштабування оскільки цілі зазвичай мають різні величини. Таким чином, при об'єднанні їх разом, легко заподіяти упередження при пошуку компромісів рішень. По-друге, продуктивність методу дуже сильно залежить від форми типу множини Паретто (POF). Отже, вона не може знайти всі оптимальні рішення проблеми, що мають невипуклі POF. Ми бачимо цю задачу з рис. 10.2 (b) де процес оптимізації не знаходить жодної з точок множини Парето заданих в межах між A і C.

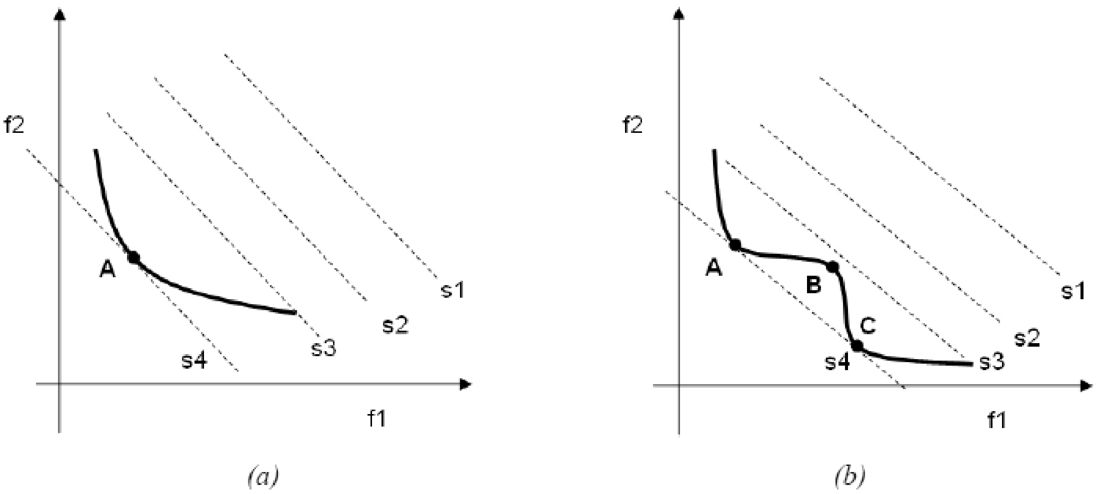

Рис. 10.2. Демонстрація зваженої суми методом 2D цільового простору: проблема з опуклими по POF ліворуч (a), і одне з невипуклими POF праворуч (б)

Інтерактивні методи у процесі рішення потребують більше участі ОПР. Взаємодія здійснюється на кожній ітерації через інтерфейс комп'ютера та ОПР. Компроміс чи інформація вибрана ОПР на кожній ітерації використовується для визначення нового рішення. В свій час були розроблені декілька інтерактивних методів заснованих на цільовому програмуванні, що поєднують кращі риси як цільового програмування так і інтерактивних підходів[75,76,79].

Метод STEM використовує взаємодію з ОПР на протязі процесу прийняття рішення. Принцип полягає в тому, що ОПР жертвує певними цілями до тих пір поки ціль не буде задовольняти. Спочатку відображає рішення та найкраще значення для кожної цілі. Потім вирішує прийняти чи відхилити це рішення. Якщо прийняти, то воно стає заключним задовольняючим рішенням. Проте, особи, що приймають рішення можуть мати різні думки. Вони часто вдаються до подальшого пошуку, щоб отримати більше альтернативних рішень. Якщо поточне рішення відхилене, починається процес послаблення. ОПР коли приймає рішення спрощує цілі, щоб удосконалити незадовільні рішення. Коли спрощення не вдається, система дозволяє ОПР повторно ввести набір спрощених значень. Друге рішення знайдене. Якщо ОПР прийняли його, то воно буде заключним задовольняючим рішенням. В іншому разі система повторить процес. Після того, як сформовано набір варіантів рішень, ОПР має обрати найбільш задовольняючий варіант.

*Метод зваження.*Ключова ідея методу зваження (*weighting method*) полягає в перетворені декількох цілей в задачі MOLP у зважену цільову функцію, яка описується наступним чином :

$$f(x)=\begin{cases}\max wf(x)=\sum_{i=1}^{k} w_i f_i(x)\\ x\in X\end{cases} \tag{10.13}$$

де $w=(w_1,w_2,...,w_k);\geq 0$ – це вектор вагових коефіцієнтів покладених на цільову функцію.

Розглянемо наступний приклад MOLP проблеми.

$$\max\ f(x)=\max\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix} 2x_1+x_2\\ -x_1+2x_2\end{pmatrix} \tag{10.14}$$

$$f(x)=\begin{cases}-x_1+3x_2\leq 21\\ x_1+3x_2\leq 27\\ 4x_1+3x_2\leq 45\\ 3x_1+x_2\leq 30\end{cases} \tag{10.15}$$

Коли w_1=0.5, w_2=0.5 формула (10.15) має вигляд:

$$f(x) = \begin{cases} \max wf(x) = x_1 + 3x_2 \\ x \in X \end{cases} \qquad (10.16)$$

Оптимальне рішення $(x_1^*, x_2^*) = (3{,}8)$.

Коли w_1=1, w_2=0 формула має вигляд:

$$f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x))^T = (14.13)^T. \qquad (10.17)$$

Оптимальне рішення $(x_1^*, x_2^*) = (9{,}3)$ і значення оптимальної цільової функції

$$f^*(x) = (f_1^*(x), f_2^*(x))^T = (21{,}-3)^T. \qquad (10.18)$$

Взаємодія – це одна з найголовніших рис MODM. Існує три типи взаємодії: попередня взаємодія, під час та після. П'ять MODM методів вибраних з таблиці 10.2 ESGP, IMOLP, ISGP, LGP, STEM мають очевидну різницю в процесі взаємодії з ОПР. В таблиці 10.3 показано ситуацію в цих п'яти методах, які приймають три типи взаємодії. Наприклад, лінійне цільове програмування використовує взаємодію з користувачами перед тим як почнеться процес рішення через збір ваги, мети, пріоритетних цілей.

Таблиця 10.3

Типи взаємодії з ОПР в MODM методах

Тип взаємодії	ESGP	IMOLP	ISGP	LGP	STEM
Попередня	*	*	*		
Під час	*	*	*		*
Після	*	*	*	*	*

Особи, що приймають рішення мають різні уподобання в типах взаємодії та в деяких проблемах прийняття рішення може знадобитися певний тип взаємодії.

10.3. Нечітке багатоцільове програмування

Задачі нечіткого багатоцільового лінійного програмування мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned}
&\max \tilde{z}_k = \sum_{j=1}^{m} \tilde{c}_{kj} x_j, k = 1, 2, ..., q_1 \\
&\min \tilde{w}_k = \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_{kj} x_j, k = q_1 + 1, ..., q \\
&\sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{kj} x_j \le \tilde{b}_i, i = 1, 2, ..., m_1; \\
&\sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{kj} x_j \ge \tilde{b}_i, i = m_1 + 1, ..., m_2
\end{aligned} \tag{10.19}$$

де $\tilde{c}_{kj}$ – це j-ий нечіткий коефіцієнт k-ї цілі $\tilde{a}_{ij}$ це j-ий нечіткий коефіцієнт i-го обмеження та $\tilde{b}_i$ – це права сторона i-го обмеження. Проблему (10.19) можна вирішити перетворивши її в наступну модель:

$$\begin{aligned}
&\max(z_k)_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (c_{kj})_\alpha^U x_j, k = 1,2,..., q_1 \\
&\min(w_k)_\alpha = \sum_{j=1}^{n} (c_{kj})_\alpha^l x_j, k = q_1 + 1,..., q
\end{aligned} \tag{10.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_\alpha^l x_j \le (b_i)_\alpha^U, i = 1, 2, ..., m_1, m_2 + l, ..., m$$

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij})_\alpha^U x_j \le (b_i)_\alpha^l, i = m_1 + 1, ..., m_2; x_j = 1, 2, ..., n$$

де-$(c_{kj})_\alpha^U$ та $(c_{kj})_\alpha^l, (c_{ij})_\alpha^U$ та $(c_{ij})_\alpha^l$ та $(b_i)_\alpha^U$ та $(b_i)_\alpha^l$ – це верхня та нижня межі нечіткого числа $\tilde{c}_{kj}$, $\tilde{a}_{ij}, \tilde{b}_i$, відповідно, приймаючи α-переріз. Проблема (10.20) може бути вирішена за допомогою інтерактивного нечіткого алгоритму ⌈79].

Більшість проблем нечіткого цільового програмування можна представити в математичному вигляді:

$$\begin{aligned}
&\max[\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), ..., \tilde{f}_k(x)] \\
&Ax \le b; x \ge 0
\end{aligned} \tag{10.21}$$

де *x, b* – це вектор змінних та права сторона належить функції нечіткої цілі таким чином:

$$\mu_{g_i}(x) = \begin{cases} 1, & f_i(x) \geq f_i^*(x) \\ 1 - \dfrac{f_i^*(x) - f_i(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)}, & f_i^-(x) \leq f_i(x) \leq f_i^*(x) \\ 0, & f_i(x) < f_i^-(x) \end{cases} \tag{10.22}$$

де $f^*_i(x)$ та $f^-_i(x)$ – це найкраще позитивне та найкраще негативне рішення відповідно.

Ми можемо перетворити (10.21) в метод λ-виразу наступним чином:

$$\begin{aligned} &\max_x \lambda \\ &\lambda \leq \frac{f_i(x) - f_i^-(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)} \\ &Ax \leq b; x \geq 0 \end{aligned} \tag{10.23}$$

Також ми можемо застосувати максмінний метод для перетворення в наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\max_x \min_i \lambda \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{10.24}$$

Проблеми нечіткого програмування та програмування з обмеженнями можна представити у вигляді:

$$\begin{aligned} &\max[\tilde{f}_1(x), \tilde{f}_2(x), \ldots, \tilde{f}_k(x)] \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{10.25}$$

де *x*– це вектор змінних та *b* – це вектор нечіткої правої сторони. По-перше визначимо функцію нечіткої цілі:

$$\mu_{g_i}(x) = \begin{cases} 1, & f_i(x) \geq f_i^*(x) \\ 1 - \dfrac{f_i^*(x) - f_i(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)}, & f_i^-(x) \leq f_i(x) \leq f_i^*(x) \\ 0, & f_i(x) < f_i^-(x) \end{cases} \tag{10.26}$$

$$\mu_{c_i}(x) = \begin{cases} 1, & (Ax)_j < b_j \\ 1 - \dfrac{(Ax)_j - b_j}{p_j}, & b_j \leq (Ax)_j \leq b_j + p_j \\ 0, & (Ax)_j > b_j + p_j \end{cases} \tag{10.27}$$

В цьому випадку, ми можемо перетворити (10.25) в метод λ-виразу наступним чином:

$$\begin{aligned} &\max_x \lambda \\ &\lambda \leq 1 - \frac{f_i(x) - f_i^-(x)}{f_i^*(x) - f_i^-(x)}, \quad i = 1, 2, ..., k \\ &\lambda \leq 1 - \frac{(Ax)_j - b_j}{p_j}, \quad j = 1, 2, ..., m; \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{10.28}$$

Ми також можемо застосувати максмінний метод для перетворення (10.22) в наступний вигляд:

$$\begin{aligned} &\max_x \min_{i,j} \lambda \\ &x \geq 0 \end{aligned} \tag{10.29}$$

10.4. Еволюційні алгоритми

Еволюційні алгоритми є досить популярними методами вирішення задач багатоцільової оптимізації. Сьогодні більшість еволюційних методів оптимізації застосовують схеми ранжування, які базуються на обробці множини Парето. Багатоцільові еволюційні алгоритми (MOEA) – це стохастичні методи оптимізації. Як і інші алгоритми оптимізації MOEA використовуються для знаходження Парето-оптимальних рішень для конкретної проблеми, але вони відрізняються підходами. Більшість еволюційних алгоритмів використовують концепцію планування в своїх діях. Оптимізаційний механізм багатоцільового еволюційного алгоритму (MOEA) дуже схожий на еволюційний алгоритм (EA) за винятком використання відносин домінування. На кожній ітерації значення цілі розраховується індивідуально, а потім використовується для визначення домінування відносин всередині сукупності, щоб обрати потенційно ефективні рішення. Як правило, багатоцільові алгоритми (MOEA) мають справу з двома основними проблемами. Перша проблема полягає в тому, щоб наблизитись до Парето множини. Друга проблема полягає в тому, як зберегти різноманітність серед рішень в отриманому наборі. Ці дві проблеми стали загальним критерієм для більшості алгоритмів порівняння ефективності наближення до цілі. Різноманітність набору рішень дає більше можливостей для ОПР.

На рис. 10.1 в приведена загальна класифікація еволюційних методів вирішення задач багатоцільової оптимізації. В таблиці 10.2 приведено головні особливості еволюційних методів вирішення багатоцільових задач.

Таблиця 10.2

Особливості еволюційних методів вирішення багатоцільових задач

Класи методів	*Суть, переваги та недоліки*	*Приклади методів*
Методи, які не базуються на обробці множини Парето	Методи цієї категорії, не використовують безпосередньо поняття оптимальності за Парето. Методи обчислювально ефективні, але в більшості випадків вони можуть ефективно працювати з невеликою кількістю цілей.	• VEGA (Vector Evaluated Genetic Algorithm) • Лексикографічне впорядкування • Метод вектора-цілі • Методи теорії ігор
Методи які базуються на обробці множини Парето	Ця група методів базується на операціях з множиною Парето Головна ідея методів полягає в постійному поліпшенні результатів вирішення багатоцільової задачі на базі генетичних алгоритмів, не порушуючи при цьому правило недомінування	• Ранжування по Парето • MOGA(Multi-Objective Genetic Algorithm) • NSGA (Non-dominated Sorting Genetic Algorithm) • NPGA (Niched Pareto Genetic Algorithm)
Інші методи	Ці методи потребують вирішення задачібагатоцільової оптимізації багато разів, щоб знайти декілька Парето-оптимальних рішень. після знаходжень оптимальних рішень він обирає одне. Недоліком виступає те , що пошук багатьох	• PAES • SPEA • Micro-Genetic Algorithm

	рішень часто є неефективним	

Розглянемо більш детально ці методи:

Методи, які не базуються на обробці множини Парето

Метод ***VEGA*** *(Vector Evaluated Genetic Algorithm).*[79] Фактично це перше застосування генетичного алгоритма для вирішення багатокритеріальних задач. Данний метод представляє собою генетичний алгоритм із зміненим механізмом відбору. Відбір хромосом здійснюється за умовою наближення до цільових функцій. Наближення визначається нормалізованим параметром. Кількість обраних хромосом пропорційна значенню цілі. Хромосоми мають постійний розмір. Кожна хромосома оцінюється вектором оцінювання, який складається з параметрів наближення до цілі. Операції кросоверу і мутації стандартні. Результатом є екземпляри хромосом, вектор оцінювання яких складается з параметрів рівно наближених до цілі. Головна перевага методу полягає в простоті реалізації.

Лексикографічне впорядкування. У цьому методі, користувач ранжує цілі в порядку їх важливості. Оптимальним рішенням є рішення, отримане шляхом зведення до мінімуму цільових функцій, починаючи з найважливішою, послідовно виходячи відповідно до впорядкованих по важливості цілей. Головний недолік цього методу полягає в тому, що данний метод ефективно працює коли надається перевага певній цілі. Перевага такого методу полягає в його простоті та обчислювальної ефективності.

Метод вектора-цілі Основу методу складає процедура визначення результатів, які необхідно досягти при реалізації кожної цілі, або параметрів для кожної цільової функції в стадії розгляду. З них буде формуватись вектор-ціль. Еволюційний алгоритм в цьому випадку буде використовуватись для зведення до мінімуму значення параметрів для кожної з цільових функцій. Потім з цих мінімумів генерується вектор бажаних цілей, в якому можуть бути використані різні метрики для елементів вектору. Основною перевагою цього методу є простота і обчислювальна ефективність, тому що вони не вимагають визначення множини Парето. Однак їх основним недоліком є визначення результатів та параметрів для бажаних цілей, , яка вимагає деяких додаткових обчислювальних ресурсів.

Методи теорії ігор.Використовуються для задач з двома конфліктуючими цілями. Визначаються головні параметри для двох конфліктуючих цілей. Формуються хромосоми для більшості варіантів комбінацій значень параметрів цілей. Та потім за допомогою еволюційного алгоритму знаходяться рішення, які є компромісними для реалізації конфліктуючих цілей. Метод дуже простий в реалізації і дає ефективні результати при невеликій кількості параметрів.

Методи, які базуються на обробці множини Парето

Ранжування по Парето. Головний недолік множини недомінуємих рішень по Парето при багатоцільовій постановці задачі, це те , що не існує ефективного алгоритму для перевірки недомінуємості в множині допустимих рішень (звичайниий випадок для множини різноманітних цілей). Таким чином, будь-який традиційний алгоритм для перевірки Парето домінування множини рішень приводить до збільшення популяцій та кількості цілей. Тим не менш, ранжування по Парето найбільш підходящий спосіб знаходження множини Парето в один прохід з ЕА.

Генетичні алгоритми, такі як ***MOGA****(Multi-Objective Genetic Algorithm)*, ***NSGA*** *(Non-dominated Sorting Genetic Algorithm)*, ***NPGA*** *(Niched Pareto Genetic Algorithm)*, ***SPEA-2*** [79],стали стандартними підходами, хоча деякі з схем, засновані на оптимізації групи рішень та імітації нормалізації є багатозначними і не дають точних рішень. Головна перевага генетичних алгоритмів, це те що вони можуть бути використаними для пошуку рішень в дуже великих і складних просторах пошуку з значною кількістю різних цілей [77, 78].

10.5. Метод аналізу співвідношень

Методи багатокритеріального аналізу (рис. 10.1), такі, як метод аналізу ієрархій і метод «Патерн» досить широко висвітлені в літературі, тому ми приділимо увагу відносно новому методу вирішення багатоцільових задач методу аналу співвідношень. Метод аналізу співвідношень (MOORA) складається з двох частин: побудови системи співвідношенн і обчислення наближення до точки відліку [72].

Побудова системи співвідношень починається з побудови матриці відношень різних альтернатив до різних цілей:

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1i} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ x_{j1} & \cdots & x_{ji} & \cdots & x_{jn} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & \cdots & x_{mi} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}, \tag{10.30}$$

де: x_{ij} – відношення альтернативи j до цілі чи атрибуту i; i = 1, 2…, n – число цілей або атрибутів; j = 1, 2,…, m – число альтернатив. Для того, щоб визначити ціль, ми маємо сфокусуватися на понятті атрибут. Ціль і відповідний атрибут завжди відповідають один одному. Тому коли ціль невизначена, атрибут не визначений також.

Система співвідношень в методі MOORA, це система, у якій кожне відношення альтернативи до цілі порівнюється зі знаменником, який представляє собою суму всіх відношень альтернатив до цієї цілі. Для цього знаменника найкращим вибором буде квадратний корінь з суми квадратів відношення кожної альтернативи до цілі:

$$x_{ij}^{*} = \frac{x_{ij}}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} x_{ij}^{2}}} \tag{10.31}$$

де x_{ij}^{2}– відношення альтернативи j до цілі i; $j = 1,2,...,m; m$ – кількість альтернатив; i=1,2,…,n, n – кількість цілей; x_{ij}^{*} – безвимірне число, що представляє нормоване відношення альтернативи j до цілі i.

Безвимірні числа, що не мають конкретної одиниці вимірів, отримуються, наприклад, шляхом віднімання, множення чи ділення. Нормовані відношення альтернатив до цілей лежать в інтервалі [0;1]. Однак, іноді інтервал може бути [-1;1]. Наприклад, у разі зростання продуктивності праці, деякі сектори, регіони або країни можуть показати зниження, замість збільшення продуктивності, тобто від’ємне безвимірне число.

Для оптимізації, такі реакції будуть додані в разі максимізації та відняті при мінімізації:

$$y_{j}^{*} = \sum_{i=1}^{j=g} x_{ij}^{*} - \sum_{i=g+1}^{j=n} x_{ij}^{*} \tag{10.32}$$

де: $i=1,2,...,g$ – цілі, що мають бути максимізовані; $i=g+1, g+2,...,n$ – цілі, що мають бути зведені до мінімуму; y_{j}^{*} – нормована оцінка варіанту j з врахуванням всіх цілей.

Порядкове ранжування y_{j}^{*} показує остаточний вибір. Дійсно, головні ваги можуть бути порівняні з порядковим ранжуванням, відповідно до Ерроу [].

Обчислення наближення до точки відліку базується на співвід ношенні, що було знайдено у формулі (10.31), згідно з яким також було виведено ідеальну точку відліку. Наближення називається реалістичним і не суб'єктивним, коли координати (r_i) підібрані для точки відліку, реалізовані в одному з варіантів альтернатив. Наприклад, у нас є три альтернативи, описані в такий спосіб: A(10,100), B(100,20) і C(50,50). У цьому випадку ідеальна точка відліку R_m має координати (100;100). Ідеальний вектор є самоочевидним, якщо альтернативи були чітко визначені як для проектів в області аналізу так і планування проектів.

Визначивши безвимірне число, що представляє нормоване відношення альтернатив *j* до цілі *i*, тобто, обчисливши x_{ij}^* по формулі (10.31), отримаємо чисельні значення наближення до цілі R_{ij} :

$$R_{ij} = (r_i - x_{ij}^*) \tag{10.33}$$

де: $i = 1,2,\ldots,n$ – атрибути; $j = 1,2,\ldots,m$ – альтернативи; r_i – *i*-та координата точки відліку; x_{ij}^* – нормований атрибут *i* альтернативи *j*;

Ця метрика є частиною мін-макс метрики Чебишева:

$$\min_{(j)}\{\max_{(i)}(r_j - x_{ij}^*)\} \tag{10.34}$$

Частіше за все при рішенні прикладних задач використовують будь-яку метрику з наступного параметричного сімейства:

$$\rho_a^{(s)}(y,z) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i \left|y_i - z_i\right|^s\right)^{\frac{1}{s}} \tag{10.35}$$

де $s \geq 1$ і $a = (a_1,\ldots,a_m)$; $a_i > 0$ для всіх $i = 1,2,\ldots,m.$

Тут може бути $s = +\infty$; в цьому випадку отримуємо так звану чебишевську (рівномірну метрику):

$$\rho_a^{(+\infty)}(y,z) = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_i \left|y_i - z_i\right|. \tag{10.36}$$

Варіюючи вектор параметрів, прагнучи врахувати «нерівноцінність» критеріїв, надаючи більшого значення тій компоненті вектора параметрів, яка відповідає критерію більшої «цінності».

В даному випадку, коли $s = 2$ і $a_i = 1,2,\ldots,m,$ отримуємо звичайну евклідову метрику:

$$\rho^{(2)}(y,z)=\sqrt{(y_1-z_1)^2+(y_2-z_2)^2+...+(y_m-z_m)^2}. \quad (10.37)$$

Мін-макс метрика є найкращим вибором поміж усіх можливих метрик теорії точки відліку [6].

Важливим питанням в методі аналізу співвідношень є питання важливості цілі в методі MOORA. Ні одна з цілей в x_{ij}^* не може бути більш важливою, ніж інші (див. формулу 10.32). Тим не менш, може виявитися необхідним підкреслити, що деякі цілі є більш важливими, ніж інші. Для того щоб надати цілі більше значення, її можна помножити на *коефіцієнт важливості*.

На рис. 10. 2 приведено алгоритм метода MOORA .

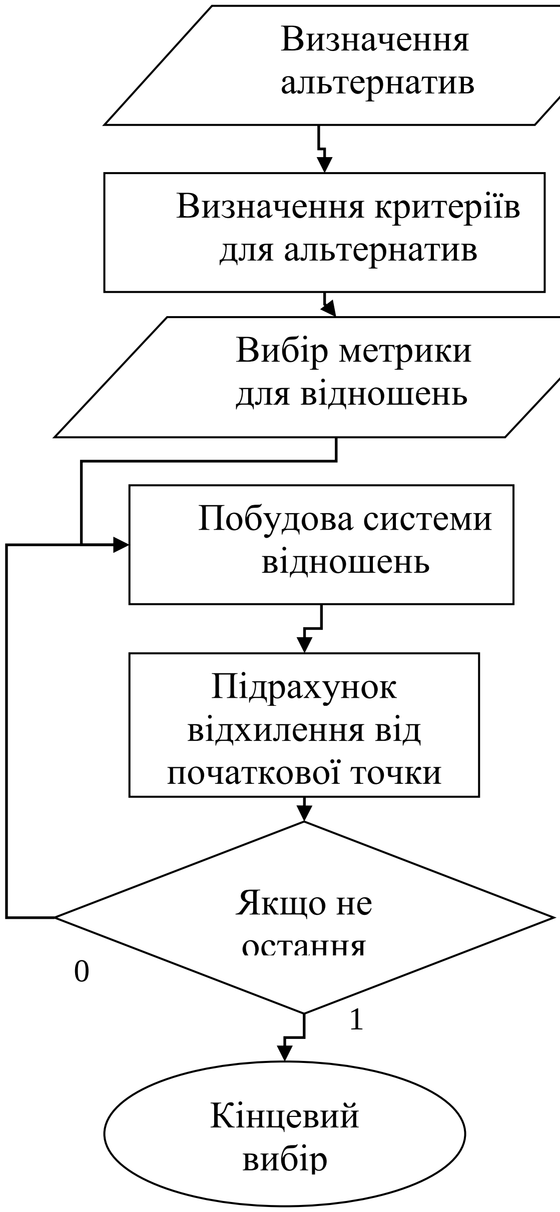

Рис. 10.2. Блок-схема алгоритму метода MOORA

Приведемо приклад використання методу аналізу співвідношень на прикладі вибору варіантів реінжинірінгу інформаційних систем.

Проблема вибору серед різних альтернатив проектів постійна і важлива в проектах реінжинірінга. В даному випадку розробники проекту повинні використовувати глобальну мету і методи запропонувати оптимальний варіант для вирішення, яке приймається.

Лише декілька прийнятих рішень є доцільними для вживання ЛПР, тим паче, що можна також розглянути питання про складність проблеми. Крім того, використання таких методів дозволяє підкреслити суб'єктивні елементи вибору, зокрема на основі технічної оцінки показників діяльності.

Розглянемо чотири можливі варіанти реалізації проекту реінжинірінга інформаційної системи підприємства теплопостачання:

Варіант № 10.*(A1)* Використання готового проектного вирішення інформаційної системи. Закупівля програмного і апаратного забезпечення і конфігурація його і адаптація його під потреби підприємства.

Варіант № 2.*(A2)* Розробка і реалізація нового проекту реінжинірінга інформаційної системи із залученням для розробки програмного забезпечення фахівців підприємства.

Варіант № 3.*(A3)* Розробка і реалізація нового проекту реінжинірінга інформаційної системи підприємства з частковим залученням для розробки окремих компонентів системи інших фірм розробників.

Варіант № 4.*(A4)* Залучення для розробки проекту реінжинірінга консалтитиговой компанії, що має досвід проектування. А також реалізації своїх проектів, що має досвід, і готові для реалізації проектні рішення.

Кожен з варіантів представлений в таблиці 1, має п'ять цілей: ціна, терміни реалізації проекту, термін окупності, можливість розширення проекту, ефективність проекту (здатність вирішувати всілякі завдання).

Ціна проекту – x10. Одним з основних показників для проектів реінжинірінга інформаційних систем є вартість проекту. В даному випадку в ціну проекту включені всі витрати на здійснення проекту. (млн.$) Срок реалізації проекту – x2. (кількість місяців). Срок окупності проекту – x3. (кількість місяців). Дані, представлені в таблиці 10.4, показують, що немає альтернативи домінуючою у всіх цілях. Можливість розширення проекту – x4. Під можливістю розширення проекту розуміється властивості реализованого проекту інформаційної системи комплектуватися додатковими модулями і підсистемами. Вимір у відносній шкалі від 0 до 10. Ефективність проекту – x5. Це здатність інформаційної системи вирішувати всілякі завдання. Вимір у відносній шкалі від 0 до 10.

В таблицях 10.4-10.8 приведено розрахунок і вибір альтернатив по методу анализу співвідношень.

Таблиця 10.4

Матриця відношень альтернатив до цілі

	1 Min	2 min	3 min	4 Max	5 Max
A1	3,0	18	36	5	3
A2	1,1	48	48	9	5
A3	2,1	30	48	8	6
A4	2,3	24	36	9	7

Таблиця 10.5

Сума квадратів та їх квадратні корені

A1	9	324	1296	25	9
A2	1,21	2304	2304	81	25
A3	4,41	900	2304	64	36
A4	5,29	576	1296	81	49
Сума квадратів	19,91	4104	7200	251	119
Квадратні корені	4,462	64,062	84,863	15,843	10,909

Таблиця 10.6

Ділення цілей на їх квадратний корінь та ранжування

A1	0,672	0,281	0,424	0,316	0,275
A2	0,247	0,749	0,566	0,568	0,458
A3	0,471	0,468	0,566	0,505	0,550
A4	0,292	0,375	0.424	0,568	0,642

Таблиця 10.7

Знаходження точок відліку для кожної з цілей

Ri	0,247	0,281	0,424	0.568	0,642

Таблиця 10.8

Знаходження відхилень, по модулю від точки віліку и ранжування альтернатив по мінімальному відхиленню від цілей.

						Сумма відхилень	Ранг
A1	0.425	0	0	0.252	0.367	10.044	4
A2	0	0.468	0.142	0	0.184	0.794	3
A3	0.224	0.187	0.142	0.063	0.092	0.708	2
A4	0.045	0.094	0	0	0	0.139	1

Виходячи з результатів використання методу співвідношень кращий варіант проекту реінжинірінга з запропонованих альтернатив це проект № 4. Це залучення для розробки проекту реінжинірінга консалтитигової компанії, що має досвід проектування подібних інформаційних систем, а також досвід реалізації своїх проектів, та має готові для реалізації проектні рішення.

10.6. Структура багатоцільової СППР

Розглянемо структуру інформаційної системи підтримки прийняття рішень на основі методів багатоцільової оптимізації та прийняття рішень. Вона схожа за складом на СППР, яка була представлена в попередньому розділі. Вона складається з чотирьох основних підсистем і передбачає модульно-блочну побудову (рис. 10.5) між користувачами СППР та внутрішніми елементами системи і забезпечує ввід та вивід інформації для ОПР, а також надає доступ до зовнішніх запам’ятовуючих пристроїв інформаційної системи.

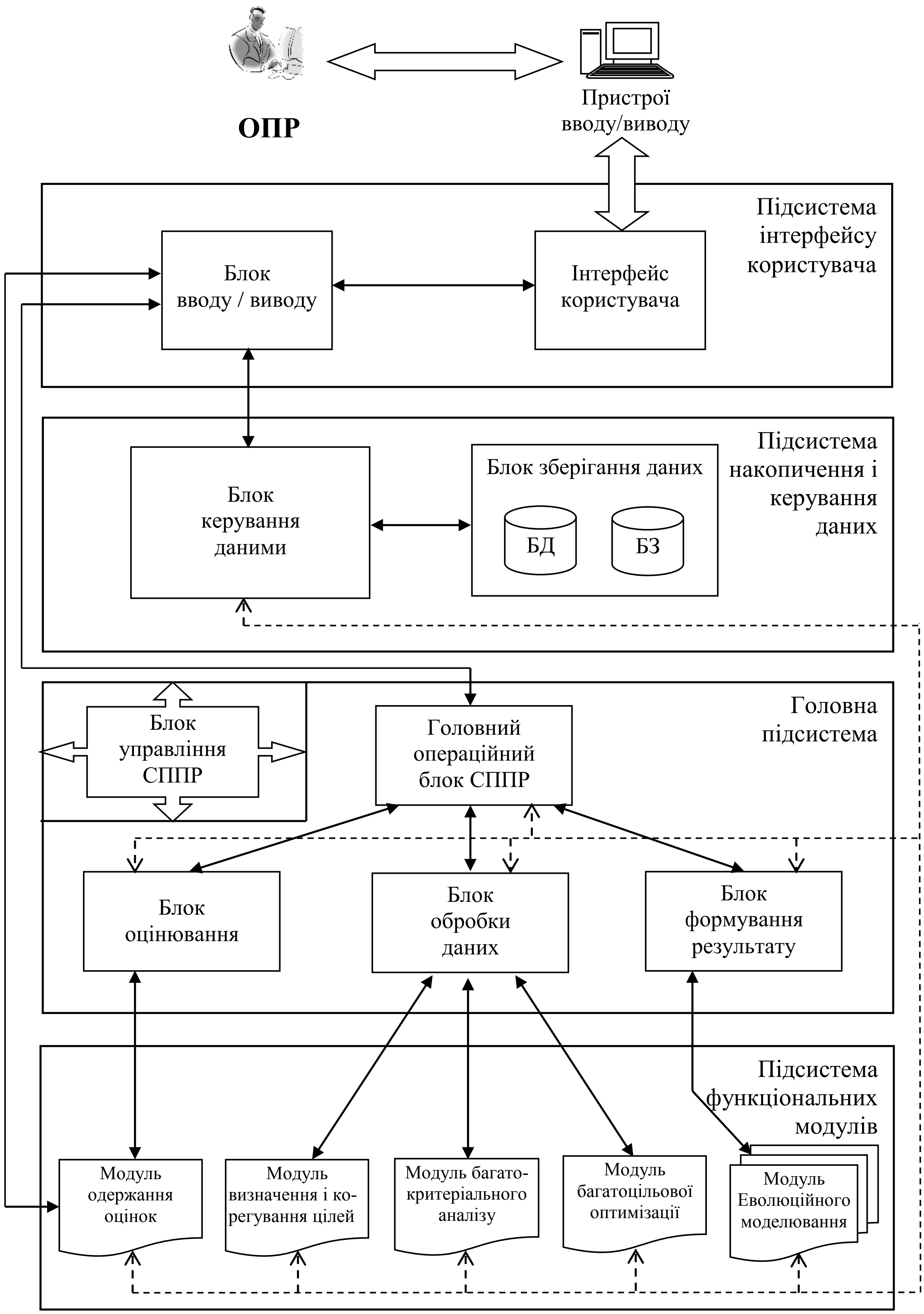

Рис. 10.5. Структура СППР для багатоцільового прийняття рішень

Інтерфейс з ОПР здійснюється за допомогою Підсистеми інтерфейсу користувача. Вона безпосередньо пов'язана з підсистемою зберігання даних. Така організація зберігання і одержання даних забезпечує можливість вибрати оптимальну систему управління даними для певної практичної задачі та знімає необхідність майбутнього структурного перетворення СППР при впровадженні нових, більш сучасних СУБД.

Головна підсистема СППР через Головний операційний блок забезпечує реалізацію процесу аналізу і розв'язання задачі у відповідності із загальною структурою вирішення багатоцільових задач. При цьому для здійснення певних процедур підключаються і застосовуються відповідні модулі, що входять до складу Підсистеми функціональних модулів. Такі модулі призначені для імплементації розроблених методів і підходів, що застосовуються в процесі багатоцільового прийняття рішень, та передбачають можливість подальшого вдосконалення і розвитку без необхідності коригування інших елементів СППР. Ця архітектура СППР легко модифікується до розв'язання інших задач прриийняття рішень, а також можливостей застосування інших методів багатоцільової оптимізації і прийняття рішень.

Контрольні задачі і запитання

1. Дайте визначення багатоцільовому процесу прийняття рішень.
2. Опишіть особливості процесу багатоцільовой оптимізації і прийняття рішень.
3. Наведіть класифікації цілей.
4. Поясніть особливості прийняття рішень в умовах декількох цілей.
5. Які існують типи багатокритеріальних методів аналізу та прийняття рішень?
6. Охарактеризуйте важливі групи методів багатоцільової оптимізації.
7. Охарактеризуйте проблему, яка виникає при використанні множини Парето, у якості базової інформації при прийнятті рішень.
8. Наведіть основні особливості еволюційних методів і алгоритмів
9. Поясніть основні особливості прийняття рішень за методом MOORA.