ТЕМА 10
Економетричні моделі на основі системи структурних рівнянь

Розв'язання питань рівноваги в економіці неможливо здійснити на основі однієї економетричної моделі, оскільки на кожну економічну величину, що характеризує той чи інший ринок або всю економіку в цілому, впливає велика кількість інших (екзогенних) факторів. Так, на попит впливає дохід споживача, рівень цін, уподобання, динаміка цін на товари-замінники та доповнювані тощо. На пропозицію впливають такі показники, як рівень технологій, вартість ресурсів, рівень цін, ринкова кон'юнктура, очікування виробників тощо. Досліджувати такі складні економічні мікросистеми в економетриці можливо за допомогою системи рівнянь, що мають виконуватися одночасно. Тема 10 демонструє, яким чином ці рівняння розв'язуються та які особливі випадки засто-сування системи структурних рівнянь можливі у практиці досліджень.

Основні питання, що розглядаються:

1. Поняття про систему одночасних рівнянь (СОР)
2. Структурна і приведена форма моделей
3. Ідентифікованість та неідентифікованість моделей
4. Оцінка параметрів систем одночасних рівнянь
5. Приклади застосування системи одночасних рівнянь

Основні терміни:

Система одночасних рівнянь (СОР); структурна модель; точно ідентифікована, зверхідентифікована, неідентифікована модель; метод непрямих найменших квадратів; метод двокрокових найменших квадратів; статична модель Кейнса.

10.1. ПОНЯТТЯ ПРО СИСТЕМУ ОДНОЧАСНИХ РІВНЯНЬ

Застосування МНК до окремого рівняння передбачає, що незалежні змінні (фактори) – справді екзогенні і що є тільки односторонній зв'язок між залежною змінною *y* та незалежною змінною *x*. Якщо ці умови не виконуються, тобто, якщо змінні *x* визначаються через *y*, то порушується одне з припущень – класичного регресійного аналізу – про незалежність факторів та випадкових величин ($(\mathrm{cov}(x,\varepsilon)\neq 0)$ і використання методу найменших квадратів для знаходження невідомих параметрів моделі призведе до появи неефективних оцінок з відхиленням.

Якщо $y = f(x)$ і, у свою чергу, також $x = f(y)$, недопустимо застосо-вувати одне регресійне рівняння для опису взаємозв'язку між *y* та *x*. У такому випадку ми переходимо від регресійної моделі з одним рівнянням до регресійної моделі з багатьма рівняннями, серед яких можуть бути рівняння, які можуть включати *x* та *y* у ролі як ендогенних, так і екзогенних змінних.

Таким чином, ***СОР*** називається набір взаємопов'язаних регресійних моделей, у яких одні й ті ж змінні в різних рівняннях системи можуть одночасно відігравати роль результуючих, пояснювальних змінних.

Приклад: Припустимо, що нам необхідно оцінити попит на олію. З економічної теорії нам відомо, що попит на будь-який товар залежить від його ціни Р, цін на інші товари P_0, та доходу *y*. Тому функцію попиту на олію можна записати у вигляді:

$$Q = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P_0 + \beta_3 y + \varepsilon,$$

де Q – обсяг попиту;

P – середня ціна олії;

P_0 – ціни на інші товари;

y – дохід;

ε – випадкова величина.

Якщо ми застосовуємо для знаходження невідомих параметрів цього рівняння МНК, то отримаємо зміщенні оцінки (або як ми їх називаємо, оцінки з відхиленням) для β_0 та β_1, оскільки P та ε не незалежні. Попит на будь-який товар є функцією від його ціни, але одночасно і ринкова ціна змінюється під впливом обсягу попиту. Внаслідок цього наведене вище одиничне рівняння не можна розглядати як повну модель. Система повинна містити принаймні ще одне рівняння, що вказує на зв'язок між P та Q, наприклад:

$$P = c_0 + c_1 Q + c_2 W + \upsilon,$$

де *W* – індекс погодних умов.

Підставляючи в це рівняння вираз для Q, отримаємо:

$$P = c_0 + c_1(\beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 P_0 + \beta_3 y + \varepsilon) + c_2 W + \upsilon.$$

Очевидно, що P залежить від ε, а отже, припущення про незалежність факторів від випадкових величин відхиляється, а оцінки будуть зміщеними. P не є екзогенною величиною у функції попиту.

Для визначення причинності використовуємо тест Гренджера на причинно-наслідковий зв'язок. Основний принцип тесту: якщо *x* впливає на *y*, то зміни *x* повинні випереджувати зміни *y*, але не навпаки.

Висуваємо нуль-гіпотезу H_0 про те, що «*x* не впливає на *y*».

Оцінюємо регресію:

$$y_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \varepsilon_t \ ,$$

застосовуючи F-тест.

Для альтернативної гіпотези H_0^*: «*y* не впливає на *x*» оцінюємо регресію:

$$x_t = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j y_{t-j} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j x_{t-j} + \upsilon_t \ .$$

Тест вказує на можливість наявності причинно-наслідкового зв'язку. Вибір m може вплинути на результат тесту. Краще обрати декілька m.

10.2. СТРУКТУРНА І ПРИВЕДЕНА ФОРМА МОДЕЛІ

Часто економетрична модель, що описує якусь економічну теорію, може бути виражена у вигляді системи рівнянь, де кожне рівняння являє собою деяке співвідношення між екзогенними, ендогенними змінними і параметрами. Така система рівнянь називається ***структурною моделлю***.

Розглянемо приклад: система попиту і пропозиції:

$$\begin{cases} D = a_0 - a_1 p + a_2 z_1 + \varepsilon_1 \\ S = b_0 + b_1 p + b_2 z_2 + \varepsilon_2 \\ D = S \end{cases}$$

D та S – ендогенні змінні, що являють собою попит і пропозицію на деякий товар, p – його ціна, z_1, z_2 – інші екзогенні змінні, які впливають на попит і пропозицію.

Оцінювати окремо кожне рівняння системи за допомогою МНК не можна, оскільки оцінки коефіцієнтів у цьому випадку отримуються зміщеними (у зв'язку з тим, що в обох рівняннях регресори корельовані із залишками).

Можна перетворити дану систему таким чином, що ціна стане ендогенною змінною:

$$p = \frac{a_0 - b_0}{a_1 + b_1} + \frac{a_2}{a_1 + b_1} z_1 - \frac{b_2}{a_1 + b_1} z_2 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{a_1 + b_1} \ .$$

Ми отримали приведену форму моделі, здійснюючи певні підстановки, ми переходимо до оцінки звичайного регресійного рівняння:

$$p = \beta_0 + \beta_1 z_1 + \beta_2 z_2 + \varepsilon_3$$

Це рівняння можна оцінювати за допомогою МНК.

Однак, як правило, інтерес представляють не коефіцієнти $\beta_0, \beta_1, \beta_2$, а вихідні параметри системи. Виникає питання – чи можна за значеннями коефіцієнтів $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ відновити величини вихідних параметрів, що нас цікавлять? Відповідь на це питання залежить від потенційної ідентифікованості рівнянь системи.

10.3. ІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ ТА НЕІДЕНТИФІКОВАНІСТЬ МОДЕЛІ

Проблема ідентифікованості є центральною при роботі з системами одночасних рівнянь. Наведемо визначення:

1) Рівняння структурної форми економетричної моделі є ***точно ідентифікованим***, якщо всі невідомі його коефіцієнти однозначно відновлюються за коефіцієнтами приведеної форми без будь-яких обмежень на значення останніх.

2) Рівняння структурної форми називається ***зверхідентифікованим,*** якщо всі невідомі в ньому коефіцієнти відновлюються за коефіцієнтами приведеної форми, причому деякі з вихідних параметрів можуть приймати одночасно декілька числових значень, що відповідають одній і тій самій приведеній формі.

Рівняння структурної форми називається ***неідентифікованим,*** якщо хоча б один з коефіцієнтів не може бути відновлений за коефіцієнтами приведеної форми.

Віднесення рівняння до однієї з категорій може бути здійснено на основі таких критеріїв:

Якщо позначити число ендогенних змінних у j-му рівняння системи через *H*, а число екзогенних (визначених), які містяться в системі , але не входять у дане рівняння, – через *D*, то умова ідентифікованих:

$D+1= H$ – рівняння ідентифіковане;

$D+1<H$ – не ідентифіковане;

$D+1>H$ – зверх ідентифіковане.

Приклад:

$$\begin{cases} y_1 = b_{12} y_2 + b_{12} y_3 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ y_2 = b_{21} y_1 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ y_3 = b_{31} y_1 + b_{32} y_2 + a_{33} x_3 + a_{34} x_4 \end{cases} .$$

Перше рівняння точно ідентифікується, бо в ньому три ендогенні змінні y_1, y_2, y_3 і дві екзогенні – x_1, x_2. Кількість відсутніх екзогенних $D = 2 \leftarrow (x_3 - x_4)$. Тоді маємо: $D+1= H$, тобто 1+2=3. У другому рівнянні системи $H=2$ (y_1, y_2), $D=1$ (x_4), таким чином $H=D+1$ (2=1+1), тобто ідентифікується.

У третьому: $H=3$, $D=2$ (x_1,x_2) – ідентифікуються.

10.4. ОЦІНКА ПАРАМЕТРІВ СИСТЕМИ ОДНОЧАСНИХ РІВНЯНЬ

Залежно від цілей дослідження та ідентифікованості рівняння структурної форми застосовуються різні методи оцінки параметрів системи. Кожен з цих методів вимагає більш ретельного розгляду.

Найбільш поширені інструменти:

1) Інструментальні змінні;
2) Непрямий метод найменших квадратів;
3) Двокроковий метод найменших квадратів (МНК);
4) Трикроковий метод найменших квадратів (МНК);
5) Метод максимальної правдоподібності з обмеженою інформацією;
6) Метод максимальної правдоподібності з повною інформацією.

Розглянемо декілька методів:

1. Оцінювання точно ідентифікованого рівняння методом непрямих найменших квадратів.

Етапи:

1) Отримуємо рівняння приведеної форми. Для цього виражаємо залежну змінну в кожному рівняння виключено через попередньо визначені (екзогенні та лагові) змінні та випадкові величини.
2) Окремо до кожного рівняння застосовуємо МНК.
3) Отримуємо оцінки початкових структурних параметрів з оцінених на другому етапі коефіцієнтів скороченої форми.

2. Метод двокрокових найменших квадратів (МНК).

Оскільки в структурних рівняннях наявна кореляція між ендогенними зміннми і залишками e_t, то можливо спробувати знайти таку змінну, яка б не корелювала з e_t. Знаходиться вона з приведеного рівняння, яке оцінюється через МНК. У результаті, наприклад:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + e_t,\ y_t = \hat{y}_{1t} + e_t.$$

Таким чином, для подальших розрахунків використовуємо $\hat{y}_{1t}$, оскільки він не корелює з e_t.

10.5. ПРИКЛАДИ ЗАСТОСУВАННЯ СОР

Найбільш широко СОР застосовується для побудови макроекономічних моделей функціонування економіки тієї чи іншої країни. Більшість з них – мультиплікаторні моделі кейнсіанського типу з тим чи іншим ступенем складності. ***Статична модель Кейнса*** в найбільш простому варіанті має вигляд:

$$\begin{cases} C = a + by + \varepsilon \\ y = c + I \end{cases}$$

C – особисте споживання;

y – національний дохід у постійних цінах;

ε – випадкова складова;

I – інвестиції в постійних цінах.

Оскільки в моделі наявна тотожність, структурний коефіцієнт b не може бути >1. Він характеризує граничну схильність до споживання.

Параметр a – приріст споживання за рахунок інших факторів. Параметр b використовується для інвестиційного мультиплікатора:

$$M_y = \frac{1}{MRS} = \frac{1}{1-MRC} = \frac{1}{1-b} \quad \text{(національного доходу)}$$

$$M_c = \frac{MRC}{1-MRC} = \frac{b}{1-b} \quad \text{(споживання)}$$

Більш пізня модель Кейнса вже включає і функцію заощаджень:

$$\begin{cases} C = a + by + \varepsilon_1 \\ S = T + K(C+I) + \varepsilon_2 \\ y = C + I - S \end{cases}$$

Динамічна модель економіки, яка описує відкриту економіку з економічною активністю з боку держави (розрахована на прикладі Німеччини за 1950-1959 рр.):

$$\begin{cases} C_t = a_0 + a_1 Y_t + a_2 C_{t-1} + \varepsilon_1 \\ I_t = b_0 + b_1 Y_T + b_2 U_{t-1} + \varepsilon_2 \\ IM_t = k_0 + k_1 Y_t + k_2 IM_{t-1} + \varepsilon_3 \\ Y_t = C_t + I_t + G_t - IM_t \end{cases}$$

де IM – імпорт;

U – особистий дохід від підприємницької діяльності плюс рента плюс нерозподілений прибуток.

Знаходження параметрів системи одночасних рівнянь розглянемо на прикладі.

Приклад. Провести ідентифікацію та оцінку моделі грошового ринку України.

$$R_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 M_t + \varepsilon_{1t},$$
$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 I_t + \beta_2 G_t + \varepsilon_{2t},$$
$$I_t = \gamma_0 + \gamma_1 R_t + \varepsilon_{3t}.$$

на підставі даних за 6 років (табл. 10.1).

Таблиця 10.1

Рік	Квартал	ВВП, млн грн	Інвестиції, млн грн	Державні витрати, млн грн	М2, млн грн	Облікова ставка НБУ на кінець періоду, %
1.	I	20 871	1 744	6 720	12 835	35
	II	23 367	2 675	7 384	13 257	41
	III	28 908	2 877	8 210	14 142	51
	IV	29 447	6 662	8 952	15 432	82
2.	I	24 980	1 861	6 245	15 631	60
	II	29 196	3 006	7 737	18 258	60
	III	37 633	4 023	9 672	20 019	45
	IV	35 317	8 662	9 677	21 714	45
3.	I	32 309	2 659	7 980	23 275	32
	II	37 889	4 018	10 609	26 359	29
	III	51 238	5 073	13 271	28 076	27
	IV	48 634	11 879	13 763	31 544	27
4.	I	39 201	3 945	10 506	32 531	25
	II	46 481	6 062	12 782	36 552	19
	III	58 999	7 493	15 163	39 292	15
	IV	59 509	9 244	16 186	45 186	12,5
5.	I	43 699	4 805	12 017	47 032	11,5
	II	49 893	7 268	14 070	51 056	10
	III	64 081	7 766	16 853	57 618	8
	IV	63 259	17 339	17 270	64 321	7
6.	I	51 206	6 124	13 518	69 552	7
	II	59 937	9 879	16 603	78 477	7
	III	65 413	11 410	18 250	85 849	7

Розв'язок. Для того, щоб змінні були співставними, візьмемо логарифми наведених у таблиці величин.

ВВП, Y	Інвестиції, I	Державні витрати, G	Грошова маса, M	Облікова ставка, R
9,95	7,46	8,81	9,46	0,35
10,06	7,89	8,91	9,49	0,41
10,27	7,96	9,01	9,56	0,51
10,29	8,80	9,10	9,64	0,82
10,13	7,53	8,74	9,66	0,60
10,28	8,01	8,95	9,81	0,60
10,54	8,30	9,18	9,90	0,45
10,47	9,07	9,18	9,99	0,45
10,38	7,89	8,98	10,06	0,32
10,54	8,30	9,27	10,18	0,29
10,84	8,53	9,49	10,24	0,27
10,79	9,38	9,53	10,36	0,27
10,58	8,28	9,26	10,39	0,25
10,75	8,71	9,46	10,51	0,19
10,99	8,92	9,63	10,58	0,15
10,99	9,13	9,69	10,72	0,13
10,69	8,48	9,39	10,76	0,12
10,82	8,89	9,55	10,84	0,10
11,07	8,96	9,73	10,96	0,08
11,05	9,76	9,76	11,07	0,07
10,84	8,72	9,51	11,15	0,07
11,00	9,20	9,72	11,27	0,07

Закінчення таблиці

У нашій моделі присутні три ендогенні змінні *Y, R, I* та 2 екзогенні змінні *M, G*. Проведемо ідентифікацію кожного з рівнянь.

Перше рівняння. Кількість включених ендогенних змінних H = 2, не включена одна екзогенна змінна *G*, тому D = 1. Таким чином H = D+1, рівняння є строго ідентифікованим.

Друге рівняння. Кількість включених ендогенних змінних H = 2, не включена одна екзогенна змінна *M*, тому D = 1. Таким чином H = D+1, рівняння є строго ідентифікованим.

Третє рівняння. Кількість включених ендогенних змінних H = 2, не включено дві екзогенні змінні *G, M*, тому D = 2. Таким чином H<D+1, рівняння є зверхідентифікованим.

Перевіримо для кожного рівняння достатню умову ідентифікації. Для цього складемо матрицю коефіцієнтів при змінних моделі.

	Y	*R*	*I*	*M*	*G*
1 рівняння	α_1	– 1	0	α_2	0
2 рівняння	– 1	0	β_1	0	β_2
3 рівняння	0	γ_1	– 1	0	0

Відповідно до достатньої умови ідентифікації визначник матриці коефіцієнтів при змінних, що не входять до досліджуваного рівняння, не повинен дорівнювати 0, а ранг матриці повинен дорівнювати числу ендогенних змінних моделі мінус 1, тобто 3 – 1 = 2.

Перше рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння, має вигляд:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що її ранг дорівнює 2, а $det\ A_1 = det\begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \beta_2 \neq 0$. Достатня умова для першого рівняння виконується.

Друге рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння має вигляд: $A_2 = \begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix}$. Її ранг також дорівнює 2, а $det\ A_2 = det\begin{pmatrix} -1 & \alpha_2 \\ \gamma_1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_2\ \gamma_1 \neq 0$. Достатня умова для другого рівняння виконується.

Третє рівняння. Матриця коефіцієнтів при змінних, що не входять до рівняння, має вигляд:

$$A_3 = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 0 \\ -1 & 0 & \beta_2 \end{pmatrix}.$$

Її ранг дорівнює 2, оскільки визначник квадратної підматриці цієї матриці не дорівнює 0, а $det\ A_3^* = det\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \alpha_2 \neq 0$. Достатня умова для третього рівняння виконується.

Таким чином, перші два рівняння є точно ідентифікованими, для їх оцінки застосуємо непрямий метод найменших квадратів. Останнє рівняння є зверхідентифікованим, його оцінимо за допомогою двоетапного методу найменших квадратів.

Перетворимо систему до зведеного вигляду. Підставляючи третє рівняння в друге, а отриманий результат – у перше рівняння, неважко отримати систему:

$$\begin{aligned} R_t &= \pi_{10} + \pi_{11}G_t + \pi_{12}M_t + v_{1t}, \\ Y_t &= \pi_{20} + \pi_{21}G_t + \pi_{22}M_t + v_{2t}, \\ I_t &= \pi_{30} + \pi_{31}G_t + \pi_{32}M_t + v_{3t}, \end{aligned} \tag{10.1}$$

де

$$\pi_{10} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1\gamma_0}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{11} = \frac{\alpha_1\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{12} = \frac{\alpha_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$

$$\pi_{20} = \frac{\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{21} = \frac{\alpha_1\beta_2\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{22} = \frac{\alpha_2\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},$$

$$\pi_{30} = \frac{\beta_0 + \beta_1\gamma_0 + \alpha_0\beta_1\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{31} = \frac{\beta_2}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1},\ \pi_{32} = \frac{\alpha_2\beta_1\gamma_1}{1-\alpha_1\beta_1\gamma_1}.$$

Застосування непрямого методу найменших квадратів вимагає знаходження коефіцієнтів системи у структурному вигляді через коефіцієнти π_{ij}, $i = \overline{1,3}$, $j = \overline{0,2}$. Неважко знайти:

$$\gamma_1 = \frac{\pi_{32}}{\pi_{12}},\ \beta_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{32}},\ \alpha_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}},$$

$$\beta_2 = \pi_{21}(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1) = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}},$$

$$\alpha_2 = \pi_{12}(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1) = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}}.$$

Розв’язуючи систему

$$\begin{cases} \alpha_0 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_1\beta_1\gamma_0 = \pi_{10}(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1), \\ \alpha_0\beta_1\gamma_1 + \beta_0 + \beta_1\gamma_0 = \pi_{20}(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1), \\ \alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\beta_0\gamma_1 + \gamma_0 = \pi_{30}(1-\alpha_1\beta_1\gamma_1), \end{cases}$$

отримуємо:

$$\alpha_0 = \frac{\pi_{10}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{20}}{\pi_{21}},\ \ \beta_0 = \frac{\pi_{20}\pi_{32} - \pi_{22}\pi_{30}}{\pi_{32}},\ \gamma_0 = \frac{\pi_{30}\pi_{12} - \pi_{32}\pi_{10}}{\pi_{12}}.$$

Застосовуючи звичайний МНК оцінимо рівняння системи (10.1):

$$\hat{R}_t = 3{,}594 - 0{,}044G_t - 0{,}279M_t,\ R^2 = 0{,}75;$$

$$\hat{Y}_t = 1{,}302 - 0{,}917G_t - 0{,}074M_t,\ R^2 = 0{,}97;$$

$$\hat{I}_t = -8{,}488 + 2{,}194G_t - 0{,}329M_t,\ R^2 = 0{,}80.$$

Використовуючи вищенаведені формули знаходимо оцінки коефіцієнтів у структурному вигляді системи:

$$\alpha_0 = \frac{\pi_{10}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{20}}{\pi_{21}} = \frac{3{,}594 \cdot (-0{,}917) - (-0{,}044) \cdot 1{,}302}{-0{,}917} = 3{,}53;$$

$$\alpha_1 = \frac{\pi_{11}}{\pi_{21}} = \frac{-0{,}044}{-0{,}917} = 0{,}05;$$

$$\alpha_2 = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{21}} = \frac{(-0{,}279) \cdot (-0{,}917) - (-0{,}044) \cdot (-0{,}074)}{-0{,}917} = -0{,}215;$$

$$\beta_0 = \frac{\pi_{20}\pi_{32} - \pi_{22}\pi_{30}}{\pi_{32}} = \frac{1{,}302 \cdot (-0{,}329) - (-0{,}074) \cdot (-8{,}488)}{(-0{,}329)} = 3{,}21;$$

$$\beta_1 = \frac{\pi_{22}}{\pi_{32}} = \frac{-0{,}074}{-0{,}329} = 0{,}22;$$

$$\beta_2 = \frac{\pi_{12}\pi_{21} - \pi_{11}\pi_{22}}{\pi_{12}} = \frac{(-0{,}279) \cdot (-0{,}917) - (-0{,}044) \cdot (-0{,}074)}{-0{,}279} = -0{,}91.$$

Для оцінки третього рівняння системи у структурній формі застосуємо двоетапний метод найменших квадратів. Замість змінної R_t підставимо її оцінку, знайдену нами: $\hat{R}_t = 3{,}594 - 0{,}044 G_t - 0{,}279 M_t$ та оцінимо регресію $I_t = \delta_0 + \delta_1 \hat{R}_t + \varepsilon_t$:

$$\hat{I}_t = 9{,}33 - 2{,}61 \hat{R}_t, \; R^2 = 0{,}59.$$

Таким чином, остаточно оцінена система записується у вигляді:

$$\hat{R}_t = 3{,}594 - 0{,}044 G_t - 0{,}279 M_t,$$
$$\hat{Y}_t = 1{,}302 - 0{,}917 G_t - 0{,}074 M_t,$$
$$\hat{I}_t = 9{,}33 - 2{,}61 \hat{R}_t.$$

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Що являє собою система одночасних рівнянь? У яких економічних дослідженнях застосовують ці моделі?
2. Які форми моделі має СОР? Охарактеризуйте кожну з них.
3. Розкрийте сутність понять – точно ідентифіковане, зверхі-дентифіковане та неідентифіковане рівняння.
4. Які методи оцінки параметрів СОР вам відомі?
5. У чому сутність методу непрямих найменших квадратів?
6. Охарактеризуйте двокроковий метод найменших квадратів.
7. Надайте приклади застосування СОР у макроекономіці, мікроекономіці, фінансах.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1. Для оцінки параметрів якого з цих рівнянь системи можна застосувати непрямий метод найменших квадратів. Відповідь пояснити.

$$X_1 = \alpha_{10} + \beta_{12}X_2 + \alpha_{11}Z_1 + \alpha_{12}Z_2 + \varepsilon_1$$
$$X_2 = \beta_{21}X_1 + \alpha_{20} + \varepsilon_2$$

2. Нехай система одночасних рівнянь має вигляд:

$$X_1 = \alpha_{10} + \beta_{12}X_2 + \alpha_{11}Z_1 + \varepsilon_1$$
$$X_2 = \alpha_{20} + \beta_{21}X_1 + \alpha_{22}Z_2 + \varepsilon_2.$$

Отримані такі оцінки приведеної форми цієї системи:

$$X_1 = 1 + 2Z_1 + 3Z_2$$
$$X_2 = -2 + Z_1 + 4Z_2.$$

Знайдіть оцінки параметрів початкової системи.

3. Для моделі попиту і пропозиції грошей:

$$M_t^D = \beta_0 + \beta_1 Y_1 + \beta_2 R_t + \beta_3 P_t + u_{1t},$$
$$M_t^S = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + u_{2t}.$$

Визначте зведений вигляд моделі. Визначте метод оцінки системи.

4. Користуючись даними табл. 10.1., оцінити систему одночасних рівнянь:

$$C_t = \alpha_0 + \alpha_1 Y_t + \alpha_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{1t},$$
$$I_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + \beta_2 Y_{t-1} + \varepsilon_{2t},$$
$$Y_t = C_t + I_t + G_t.$$

ТЕСТИ

1. Найбільше поширення в економетричних дослідженнях отримали:

а) системи незалежних рівнянь;

б) системи рекурсивних рівнянь;
в) системи взаємозалежних рівнянь.

2. Ендогенні змінні – це:
а) змінні, що впливать на залежні змінні, але не залежать, у свою чергу, від останніх, позначаються через *x*;
б) залежні змінні, кількість яких дорівнює кількості рівнянь у системі і позначаються через *y*;
в) значення залежних змінних за попередній період часу.
3. Екзогенні змінні – це:
а) змінні, що впливать на залежні змінні, але не залежать, у свою чергу, від останніх, позначаються через *x*;
б) залежні змінні, кількість яких дорівнює кількості рівнянь у системі і позначаються через *y*;
в) значення залежних змінних за попередній період часу.
4. Для визначення параметрів структурну форму моделі необхідно перетворити в:
а) приведену форму моделі;
б) рекурсивну форму моделі;
в) незалежну форму моделі.
5. Модель ідентифікована, якщо:
а) кількість приведених коефіцієнтів менше кількості структурних коефіцієнтів;
б) кількість приведених коефіцієнтів більше кількості структурних коефіцієнтів;
в) кількість параметрів структурної моделі дорівнює кількості параметрів приведеної форми моделі.
6. Модель неідентифікована, якщо:
а) кількість приведених коефіцієнтів менше кількості структурних коефіцієнтів;
б) кількість приведених коефіцієнтів більше кількості структурних коефіцієнтів;
в) кількість параметрів структурної моделі дорівнює кількості параметрів приведеної форми моделі.
7. Модель зверхідентифікована, якщо:
а) кількість приведених коефіцієнтів менше кількості структурних коефіцієнтів;
б) кількість приведених коефіцієнтів більше кількості структурних коефіцієнтів;
в) кількість параметрів структурної моделі дорівнює кількості параметрів приведеної форми моделі.
8. Рівняння ідентифікується, якщо:
а) $D+1<H$;
б) $D+1=H$;
в) $D+1>H$.
9. Рівняння не ідентифікується, якщо:
а) $D+1<H$;
б) $D+1=H$;
в) $D+1>H$.
10. Рівняння зверхідентифікується, якщо:
а) $D+1<H$;
б) $D+1=H$;
в) $D+1>H$.
11. Для визначення параметрів точно ідентифікованої моделі:
а) застосовується двокроковий МНК;
б) застосовується непрямий МНК;
в) жоден із існуючих методів застосувати неможливо.
12. Для визначення параметрів зверхідентифікованої моделі:
а) застосовується двокроковий МНК;
б) застосовується непрямий МНК;
в) жоден із існуючих методів застосувати неможливо.
13. Для визначення параметрів неідентифікованої моделі:
а) застосовується двокроковий МНК;
б) застосовується непрямий МНК;
в) жоден із існуючих методів застосувати неможливо.
14. Симультативна модель складається з:
а) рівно n рівнянь та n невідомих;
б) одного лінійного регресійного рівняння;
в) одного нелінійного регресійного рівняння;
г) одного та більше регресійних рівнянь;
д) більше ніж одного рівняння.
15. Рівняння симультативної моделі:
а) завжди можна точно ототожнити;
б) завжди можна переототожнити;
в) завжди можна недоототожнити;
г) можливі будь-які варіанти.