ТЕМА 9
Моделі розподіленого лагу

В економіці багато явищ і процесів пов'язані із їх динамікою у часі. У зв'язку з цим постає необхідність включати до моделей лагові змінні, тобто змінні, зсунуті у часі на 1 та більше періодів.

Тема 9 описує особливості побудови дистрибутивно-лагових моделей:

– види моделей;
– методи оцінювання параметрів лагових моделей.

Основні питання, що розглядаються:

1. Поняття лагу і лагових змінних
2. Вивчення структури лагу і вибір виду моделі
3. Метод Койка
4. Моделі часткових пристосувань та адаптивних очікувань
5. Методи оцінювання параметрів лагової моделі
6. Метод Ейткена.

Основні терміни:

Лаг; лагова змінна; розподілено-лагова модель; взаємна кореляційна функція; модель часткових пристосувань; модель адаптивних очікувань; метод Койка; метод Ейткена

9.1. ПОНЯТТЯ ЛАГУ І ЛАГОВИХ ЗМІННИХ. ВЗАЄМНА КОРЕЛЯЦІЙНА ФУНКЦІЯ

При розгляді зв'язків економічних явищ часто доводиться на даний момент часу враховувати рівень економічного явища за попередній період. Якщо значення показника y змінюється через невеликий проміжок часу після зміни значення фактора x, то в рівнянні регресії повинні бути присутні відповідні фактори з відповідним ***лагом*** (запізненням). Модель, яка включає поточні і попередні значення змінних, називається ***розподілено-лаговою*** моделлю.

Нехай фактор x впливає на показник y із запізненням в p-періодів. Тоді рівняння регресії у випадку лінійної залежності матиме вигляд:

$$y_t = a + b_1 x_{t-p} + u_t\,.$$

Якщо характер впливу залишається незмінним у часі, то значення показника y може бути виражене через p попередніх значень факторної змінної:

$$y_t = a + b_0 x_t + b_1 x_{t-1} + b_2 x_{t-2} + ... + b_p x_{t-p} + u_t\,. \qquad (9.1)$$

де b_j – параметри моделі при лагових змінних; x_{t-j} – незалежна лагова змінна; p – часовий лаг; u_t – залишки, що розподілені нормально, тобто мають нульове математичне сподівання і сталу дисперсію.

Якщо в рівнянні (9.1) p – обмежене число, то така модель називається ***скінченною розподілено-лаговою*** моделлю.

Модель (9.1) говорить про те, що якщо в деякий момент часу t відбувається зміна незалежної змінної x, то ця зміна буде впливати на значення змінної y протягом p наступних моментів часу.

Коефіцієнт регресії b_0 при змінній x_t характеризує середню абсолютну зміну y_t при зміні x_t на 1 одиницю свого виміру в деякий фіксований момент часу t, без урахування впливу лагових значень фактору x. Цей коефіцієнт називають ***короткостроковим мультиплікатором.***

У момент $t+1$ сукупна дія факторної змінної x_t на результат y_t складе (b_0+b_1) умовних одиниць, у момент $t+2$ цей вплив можна охарактеризувати сумою $(b_0+b_1+b_2)$ тощо. Отримані таким чином суми називають ***проміжним мультиплікатором.***

З урахуванням кінцевої величини лагу можна сказати, що зміна змінної x_t в момент t на 1 умовну одиницю призведе до загальної зміни результату через p моментів часу на $(b_0+b_1+...+b_p)$ абсолютних одиниць.

Введемо таке позначення:

$$b_0+b_1+...+b_p = b.$$

Величину b називають ***довгостроковим мультиплікатором***, який показує абсолютну зміну в довгостроковому періоді $t+p$ результату y під впливом зміни на 1 од. фактору x.

Припустимо,

$$\beta_j = \frac{b_j}{b},\; j = 0:1.$$

Назвемо отримані величини ***відносними коефіцієнтами*** моделі з розподіленим лагом. Якщо всі коефіцієнти b_j мають однакові знаки, то для будь-якого j

$$0<\beta_j<1 \text{ та } \sum_{j=0}^{p} \beta_j = 1.$$

В цьому випадку відносні коефіцієнти β_j є вагами для відповідних коефіцієнтів b_j. Кожний з них вимірює частку загальної зміни результативної ознаки в момент часу $t+j$.

Знаючи величини β_j , за допомогою стандартних формул можна визначити ще дві важливі характеристики моделі множинної регресії: величину середнього і медіанного лагів. ***Середній лаг*** розраховується по формулі середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{p} = \sum_{j=0}^{p} j \cdot \beta_j$$

і являє собою середній період, протягом якого буде відбуватися зміна результату під впливом зміни фактору в момент часу *t*. Невелика величина середнього лагу свідчить про відносно швидке реагування результату на зміну фактору, тоді як велике його значення говорить про те, що дія фактору на результат буде виявлятися протягом тривалого періоду часу.

Медіанний лаг – це величина лагу, для якого $\sum_{j=0}^{p_{Me}} \beta_j \approx 0{,}5$. Це той період часу, протягом якого з моменту часу *t* буде реалізовано половину загального впливу фактору на результат.

Приклад. За результатами вивчення залежності обсягу продаж компанії в середньому за місяць від витрат на рекламу була отримана така модель з розподіленим лагом (млн грн):

$$y_t = -0{,}67+4{,}5\cdot x_t+3{,}0\cdot x_{t-1}+1{,}5\cdot x_{t-2}+0{,}5\cdot x_{t-3}.$$

У даній моделі короткостроковий мультиплікатор дорівнює 4,5. Це означає, що підвищення витрат на рекламу на 1 млн грн призводить до зростання обсягу продажу компанії на 4,5 млн грн в тому ж періоді. Під впливом збільшення витрат на рекламу обсяг продажу компанії зростає в момент часу $t+1$ – на 4,5 + 3,0 = 7,5 млн грн, $t+2$ – на 7,5+1,5 = 9,0 млн грн. Нарешті, довгостроковий мультиплікатор для даної моделі складе:

$$b=4{,}5+3{,}0+1{,}5+0{,}5=9{,}5.$$

У довгостроковій перспективі (наприклад, через 3 місяці) збільшення витрат на рекламу на 1 млн грн в даний момент часу призведе до загального зростання обсягів продажу на 9,5 млн грн.

Відносні коефіцієнти регресії в цій моделі дорівнюють:

$$\beta_1 = \frac{4{,}5}{9{,}5} = 0{,}474, \qquad \beta_2 = \frac{3{,}0}{9{,}5} = 0{,}316,$$

$$\beta_1 = \frac{1{,}5}{9{,}5} = 0{,}158 \qquad \beta_4 = \frac{0{,}5}{9{,}5} = 0{,}053.$$

Отже, 47,4 % загального збільшення обсягу продажу, що викликане зростанням витрат на рекламу, відбувається в поточний момент часу; 31,6 % – в момент $t+1$; 15,8 % – в момент $t+2$ та лише 5,3 % цього збільшення приходиться на момент часу $t+3$.

Середній лаг у даній моделі визначається як

$$\bar{p} = 0\cdot 0{,}474 + 1\cdot 0{,}316 + 2\cdot 0{,}158 + 3\cdot 0{,}053 = 0{,}791\ \textit{міс}.$$

Невелика величина лагу (менше 1 місяця) ще раз підтверджує, що більша частина ефекту зростання витрат на рекламу проявляється одразу ж. Медіанний лаг у даному прикладі також складає трохи більше 1 місяця.

Викладені вище прийоми аналізу параметрів моделі з розподіленим лагом дійсні тільки за припущення, що всі коефіцієнти при поточному і лагових значеннях досліджуваного фактору мають однакові знаки. Це припущення повністю виправдано з економічної точки зору: вплив одного й того ж фактору на результат має бути однаково спрямованим незалежно від того, з яким часовим лагом вимірюється сила або тіснота зв’язку між цими ознаками. Однак на практиці отримати такі коефіцієнти в лаговій моделі досить важко.

При побудові скінченної розподілено-лагової моделі виникає проблема застосування довжини максимального лагу, який повинен бути включений в регресію. Це можна пояснити способом послідовного оцінювання: спочатку побудувати регресію y_t за x_t та оцінити невідомі параметри, потім регресію, яка включає вже додатковий фактор x_{t-1} і так далі. Ця послідовна процедура припиняється, коли параметри при лагових змінних x_t починають бути статистично незначущими або коефіцієнт хоча б однієї змінної змінює свій знак. Така методика призводить до двох статистичних ускладнень:

1. Із зростанням довжини лагу, зменшується кількість спостережень, що використовуються для оцінки параметрів моделі.
2. Між різними лаговими значеннями фактору *x* може існувати висока кореляція.

У зв’язку з цим розроблені методи оцінки параметрів регресії з лаговим значенням факторів.

Моделі розподілених лагів можуть задовільно описувати процеси лише у тому разі, коли забезпечена відносна стабільність умов, у яких ці процеси реалізуються. Може йтися про стабільність відповідних індексів цін, процентних ставок за кредити, норми амортизації, термінів будівництва, обсягу та структури ресурсів. Така стабільність далеко не завжди спостерігається для порівняно довгих проміжків часу, протягом яких формується сукупність спостережень. Усе це підводить до побудови узагальненої моделі розподіленого лагу, яка містить не лише лагові змінні, а й інші фактори – змінні, значення яких характеризують поточні умови функціонування економічних систем у період часу *t*.

Теоретично побудову розподілено-лагової моделі можна узагальнити на будь-яку кількість незалежних змінних $x_{t-\tau}$. Але практична реалізація такої моделі часто стикається з непереборними труднощами, що зумовлені великою кількістю факторів, істотною обмеженістю часових рядів і складністю їх внутрішньої структури.

9.2. ВИВЧЕННЯ СТРУКТУРИ ЛАГУ І ВИБІР ВИДУ МОДЕЛІ

Поточні та лагові значення факторної змінної спричиняють різний за силою вплив на результативну змінну моделі. Кількісно сила зв'язку між результатом і значеннями факторної змінної, що відносяться до різних моментів часу, вимірюється за допомогою коефіцієнтів регресії при факторних змінних. Якщо побудувати графік залежності цих коефіцієнтів від величини лагу, можна отримати графічне зображення структури лагу, або розподіл у часі впливу факторної змінної на результат. Структура лагу може бути різною (див. рис. 9.1.).

Якщо із зростанням величини лагу коефіцієнти при лагових значеннях змінної убувають у часі, то має місце лінійна (її також називають трикутна – рис. 9.1., *а*) або геометрична структура лагу (рис. 9.1., *б*). Якщо лагові впливи фактору на результат не мають тенденції до зменшення в часі, то має місце один з варіантів, показаних на рис. 9.1., *в-е*. Структуру лагу (див. рис. 9.1., *в*) називають «перегорнутою» *V*-подібною структурною. Основна її особливість – симетричність лагових впливів відносно деякого середнього лагу, який характеризується найбільш сильним впливом фактору на результат. Графіки, представлені на рис. 9.1., *г-е*, свідчать про поліноміальну структуру лагу.

Графічний аналіз структури лагу аналогічним чином можна проводити і за допомогою відносних коефіцієнтів регресії β_j.

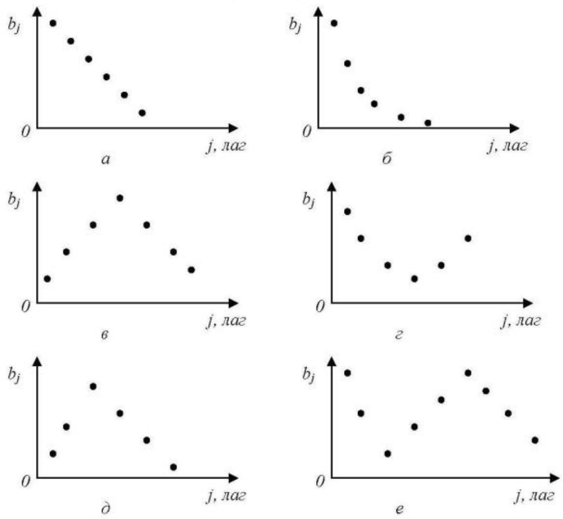

Рис. 9.1. Основні форми структури лагу:
а – лінійна; *б* – геометрична; *в* – перегорнута *V*-подібна;
г-е – поліноміальна

Розглянемо загальну модель з розподіленим лагом, що має кінцеву максимальну величину лагу *p*, яка описується відношенням (9.1). Припустимо, було встановлено, що в досліджуваній моделі має місце поліноміальна структура лагу, тобто залежність коефіцієнтів регресії b_i від величини лагу описується поліномом *k*-го степеня. Частковим випадком поліноміальної структури лагу є лінійна модель (див. рис. 9.1., *а*). Прикладами лагів, що утворюють поліном другого степеня, є варіанти рис. 9.1., *г* і *д*. Перегорнута *V*-подібна структура лагу також може бути апроксимована за допомогою полінома першого степеня. Нарешті, графік (див. рис. 9.1., *е*) є прикладом моделі лагів у формі полінома 3-го степеня. Лаги, структуру яких можна описати за допомогою поліномів, називаються також лагами Алмон, за ім'ям Ш. Алмон, яка вперше звернула увагу на таке представлення лагів.

Формально модель залежності коефіцієнтів b_j від величини лагу *j* у формі полінома можна записати так:

– для полінома першого степеня $b_j = c_0 + c_1 j$;
– для полінома другого степеня $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2$;
– для полінома третього степеня $b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + c_3 j^3$ і т. д.

У найбільш загальному вигляді для полінома *k*-го степеня маємо:

$$b_j = c_0 + c_1 j + c_2 j^2 + ... + c_k j^k.$$

Тоді кожен з коефіцієнтів b_j моделі (9.1) можна виразити таким чином:

$$\begin{aligned} &b_0 = c_0; \\ &b_1 = c_0 + c_1 + ... + c_k; \\ &b_2 = c_0 + 2c_1 + 4c_2 + ... + 2^k c_k; \\ &b_3 = c_0 + 3c_1 + 9c_2 + ... + 3^k c_k; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &b_p = c_0 + pc_1 + p^2 c_2 + ... + p^k c_k. \end{aligned} \qquad (9.2)$$

Підставивши знайдені вирази в модель (9.1) та провівши перегрупування й заміну змінних, отримуємо модель:

$$y_t = a + c_0 \cdot z_0 + c_1 \cdot z_1 + c_2 \cdot z_2 + ... + c_k \cdot z_k + \varepsilon_t, \qquad (9.3)$$

де

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + \ldots + x_{t-p} = \sum_{j=0}^{p} x_{t-j};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + \ldots + p \cdot x_{t-p} = \sum_{j=1}^{p} j \cdot x_{t-j};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + \ldots + p^2 \cdot x_{t-p} = \sum_{j=1}^{p} j^2 \cdot x_{t-j}; \qquad (9.4)$$

....

$$z_k = x_{t-1} + 2^k \cdot x_{t-2} + 3^k \cdot x_{t-3} + \ldots + p^k \cdot x_{t-p} = \sum_{j=1}^{p} j^k \cdot x_{t-j}.$$

Процедура застосування методу Алмон для розрахунку параметрів моделі з розподіленим лагом має такий вигляд:

1. Визначається максимальна величина лагу p.
2. Визначається степінь полінома k, що описує структуру лагу.
3. За співвідношенням (9.4) розраховуються значення змінних $z_0, \ldots, z_k$.
4. Визначаються параметри рівняння лінійної регресії (9.3).
5. За допомогою співвідношень (9.2) розраховуються параметри вихідної моделі з розподіленим лагом.

Застосування методу Алмон пов’язане з рядом проблем.

По-перше, величина лагу p має бути відома заздалегідь. При її визначенні краще виходити з максимально можливого лагу, ніж обмежуватися лагами невеликої довжини. Вибір меншої величини лагу порівняно з його реальним значенням призведе до того, що в моделі регресії не буде врахований фактор, що спричиняє значний вплив на результат, тобто до невірної специфікації моделі. Вплив цього фактору в такій моделі може бути виражений у залишках. Тим самим у моделі не будуть дотримуватися припущення МНК про випадковість залишків, а отримані оцінки її параметрів виявляться неефективними і зміщеними. Вибір більшої величини лагу порівняно з її реальним значенням буде означати включення в модель статистично незначущого фактору і зниження ефективності отриманих оцінок, однак ці оцінки все ж будуть незміщеними.

Для визначення величини лагу доцільно застосовувати інформаційні критерії Шварца, Акаїке, Хеннана-Куїна. Однак найбільш простим способом є вимірювання тісноти зв’язку між результатом і лаговими значеннями фактору.

Як правило, до моделі входять такі змінні x_{t-p}, для яких лаги обґрунтовані теоретично і перевірені емпірично. Для обґрунтування лагів доцільно використовувати ***взаємну кореляційну функцію***. Ця функція характеризує тісний зв’язок кожного елемента вектора залежної змінної y_t з елементом вектора незалежної x_t, зсунутим один відносно одного на часовий лаг p.

$$r_{(p)} = \frac{(n-p)\sum_{t=1}^{n-p} y_t x_{t+p} - \sum_{t=1}^{n-p} y_t \sum_{t=1}^{n-p} x_{t+p}}{\sqrt{\left[(n-p)\sum_{t=1}^{n-p} y_t^2 - (\sum_{t=1}^{n-p} y_t)^2\right]\left[(n-p)\sum_{t=1}^{n-p} x_{t+p}^2 - (\sum_{t=1}^{n-p} x_{t+p})^2\right]}}.$$

Для різних значень τ на основі взаємної кореляційної функції можна дістати n+1 значення $r_{(p)}$. Якщо p=0, то маємо парний коефіцієнт кореляції. Значення $r_{(p)}$ містяться на множині (– 1; 1). Найбільше значення $r_{(p)}$ за модулем (найближче до одиниці) визначає зрушення, або часовий лаг. Якщо серед множини значень $r_{(p)}$ є кілька таких, що наближаються до одиниці, то це означає, що запізнення впливу змінної x_t відбувається протягом певного проміжку часу і в результаті маємо кілька часових лагів для двох взаємопов’язаних часових рядів. Знайшовши часові лаги для визначення взаємозв’язку між економічними показниками, можна побудувати економетричну модель розподіленого лагу.

По-друге, необхідно встановити степінь полінома k. Зазвичай на практиці обмежуються розглядом поліномів другого і третього степеня, застосовуючи таке просте правило: обрана степінь полінома k повинна бути на одиницю більше числа екстремумів у структурі лагу. Якщо апріорну інформацію про структуру лагу отримати неможливо, величину k простіше визначити шляхом порівняння моделей, побудо-ваних для різних k, і вибору найкращої моделі.

По-третє, змінні z, які розраховуються як лінійні комбінації вихідних змінних x, будуть корелювати між собою у випадках, коли спостерігається високий зв’язок між самими вихідними змінними. Тому оцінку параметрів моделі (9.3) приходиться проводити в умовах мультиколінеарності факторів. Однак мультиколінеарність факторів $z_0, \ldots, z_k$ в моделі (9.3) виявляється на оцінках параметрів $b_0, \ldots b_p$ у меншій мірі, ніж якби ці оцінки були отримані шляхом звичайного МНК безпосередньо до моделі (9.3.) в умовах мультиколінеарності факторів $x_t, \ldots, x_{t-p}$.

Метод Алмон має дві основних переваги:

– він достатньо універсальний і може бути застосований для моделювання процесів, які характеризуються різноманітними структурами лагів;

– при відносно більшій кількості змінних у (9.3) (зазвичай обирають $k = 2$ або $k = 3$), яке не призводить до втрати значної кількості ступеней вільності; за допомогою методу Алмон можна побудувати моделі з розподіленим лагом будь-якої довжини.

Приклад. У табл. 9.1 представлені дані про обсяг випуску продукції у бізнес-секторі економіки США (у % до рівня 1982 р.) і загальній сумі витрат на придбання нових заводів і обладнання в промисловості за 1959-1990 рр. (млрд дол США).

Побудуємо модель з розподіленим лагом p=4 за припущення, що структура лагу описується поліномом другого степеня. Загальний вид цієї моделі:

$$Y_t = a + b_0 \cdot x_t + b_1 \cdot x_{t-1} + b_2 \cdot x_{t-2} + b_3 \cdot x_{t-3} + b_4 \cdot x_{t-4} + \varepsilon_t.$$

Для полінома другого степеня маємо:

$$b_j = c_0 + c_1 \cdot j + c_2 \cdot j^2,\ j=0:4.$$

Для розрахунку параметрів цієї моделі необхідно перетворювати вихідні дані в нові змінні z_0, z_1, z_2.

Ці перетворення відповідно до (9.4) виглядають таким чином:

$$z_0 = x_t + x_{t-1} + x_{t-2} + x_{t-3} + x_{t-4};$$

$$z_1 = x_{t-1} + 2 \cdot x_{t-2} + 3 \cdot x_{t-3} + 4 \cdot x_{t-4};$$

$$z_2 = x_{t-1} + 4 \cdot x_{t-2} + 9 \cdot x_{t-3} + 16 \cdot x_{t-4}.$$

Значення змінних z_0, z_1, z_2 наводяться в табл. 9.1. Відмітимо, що кількість спостережень, за якими проводився розрахунок цих змінних, склала 28 (чотири спостереження було втрачено внаслідок зсуву факторної ознаки x на чотири моменти часу).

Розрахунок параметрів регресії (9.3) звичайним МНК для нашого прикладу приводить до таких результатів:

$$\hat{y}_t = 300{,}010 + 1{,}922 \cdot z_0 - 0{,}921 \cdot z_1 + 0{,}184 \cdot z_2; \quad R^2 = 0{,}990.$$

(66,200) (0,205) (0,299) (0,073)

У дужках вказані значення стандартних похибок коефіцієнтів регресії. Користуючись знайденими коефіцієнтами регресії при змінних z_i, $i = 0, 1, 2$, і співвідношеннями (9.2) розрахуємо коефіцієнти регресії вихідної моделі:

$$b_0 = 1{,}922;$$

$$b_1 = 1{,}922 - 0{,}921 + 0{,}184 = 1{,}185;$$

$$b_2 = 1{,}922 + 2 \cdot (-0{,}921) + 4 \cdot 0{,}184 = 0{,}814;$$

$$b_3 = 1{,}922 + 3 \cdot (-0{,}921) + 9 \cdot 0{,}184 = 0{,}811;$$

$$b_4 = 1{,}922 + 4 \cdot (-0{,}921) + 16 \cdot 0{,}184 = 1{,}176.$$

Модель з розподіленим лагом має вигляд:

$$\hat{y}_t = 300{,}010 + 1{,}922 \cdot x_t + 1{,}185 \cdot x_{t-1} + 0{,}814 \cdot x_{t-2} + 0{,}811 \cdot x_{t-3} + 1{,}176 \cdot x_{t-4}; \quad R^2 = 0{,}990.$$

(66,200) (0,205) (0,100) (0,142) (0,096) (0,208)

У дужках вказано стандартні похибки коефіцієнтів регресії. Представимо отримані значення у вигляді графіку (рис. 9.2).

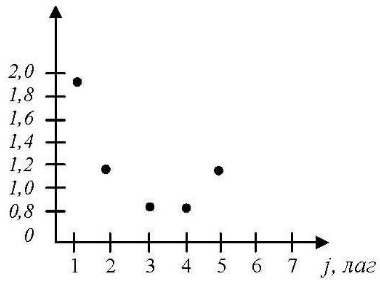

Рис. 9.2. Структура лагу в моделі залежності обсягу ВВП від обсягу інвестицій в економіку

Аналіз цієї моделі вказує, що зростання інвестицій в економіку США на 1 млрд дол в поточному періоді призведе через 4 роки до зростання ВВП в середньому на 5,908 млрд дол США (1,922 + 1,185 + 0,814 + 0,811 + 1,176).

Визначимо відносні коефіцієнти регресії:

$$\beta_0 = 1{,}922/5{,}908 = 0{,}325; \quad \beta_1 = 1{,}185/5{,}908 = 0{,}200;$$

$$\beta_2 = 0{,}814/5{,}908 = 0{,}138; \quad \beta_3 = 0{,}811/5{,}908 = 0{,}138;$$

$$\beta_4 = 1{,}176/5{,}908 = 0{,}199.$$

Більше половини впливу фактору на результат реалізується з лагом в 1 рік, причому 32,5 % цього впливу реалізується одразу ж, в поточному періоді.

Середній лаг у даній моделі складає:

$$\bar{p} = 0{,}325 + 0{,}200 \cdot 1 + 0{,}138 \cdot 2 + 0{,}138 \cdot 3 + 0{,}199 \cdot 4 = 1{,}686.$$

У середньому збільшення інвестицій в економіку США призведе до збільшення ВВП через 1,69 року.

Для порівняння наведено результати застосування звичайного МНК для розрахунку параметрів цієї моделі:

$$\hat{y}_t = 296{,}56 + 2{,}082 \cdot x_t + 0{,}784 \cdot x_{t-1} + 1{,}298 \cdot x_{t-2} + 0{,}428 \cdot x_{t-3} + 1{,}323 \cdot x_{t-4}; \quad R^2 = 0{,}991$$

(67,7) (0,314) (0,428) (0,439) (0,432) (0,324)

Незважаючи на те, що коефіцієнт детермінації по моделі, параметри якої були розраховані звичайним МНК, дещо вище, однак стандартні похибки коефіцієнтів регресії у моделі, отриманій з урахуванням обмежень на поліноміальну структуру лагу, значно знизилися. Крім того, модель, отримана звичайним МНК, має більш суттєвий недолік: коефіцієнти регресії при лагових змінних цієї моделі x_{t-1} та x_{t-3} не можна вважати статистично значущими.

9.3. МЕТОД КОЙКА

Метод Койка використовується в тих випадках, коли факторна змінна має нескінченну лагову структуру і лагові параметри регресії володіють однаковим законом зміни. Зокрема, Койк припустив, що вони змінюються в геометричній прогресії: $b_k = b_0\lambda^k,\ k = 1, 2, \ldots,$ де λ такі, що 0<λ<1 – темп зменшення розподіленого лагу, а (1-λ) – швидкість пристосування. Тоді модель можна записати у вигляді:

$$y_t = a + b_0 x_t + b_0\lambda x_{t-1} + b_0\lambda^2 x_{t-2} + \ldots + u_{t.} \qquad (9.5)$$

Далі, згідно з підходом Койка, вводиться затримка на один період:

$$y_{t-1} = a + a_0 x_{t-1} + b_0\lambda x_{t-2} + b_0\lambda^2 x_{t-3} + \ldots + u_{t-1.} \qquad (9.6)$$

Віднявши від (9.5) величину (9.6), помножену на λ, отримаємо:

$$y_t = a(1-\lambda) + b_0 x_t + \lambda y_{t-1} + (u_t - \lambda u_{t-1}). \qquad (9.7)$$

Тепер для оцінки невідомих параметрів використовуємо метод найменших квадратів.

Перетворенням Койка розподілено-лагова модель (9.5) зведена до авторегресивної моделі (9.7), тобто моделі, в яку включене одне або більше попередніх значень залежної змінної *y*.

Перетворена модель може мати ряд статистичних проблем: серійну кореляцію між лаговими значеннями залишків та залежність між розподілом y_t та u_t.

Незважаючи на нескінченне число лагових змінних в моделі (9.5), геометрична структура лагу дозволяє визначити величину середнього і медіанного лагів у моделі Койка. Оскільки сума коефіцієнтів регресії у моделі (9.5) – це сума геометричної прогресії, тобто

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j = b_0 + b_0\cdot\lambda + b_0\cdot\lambda^2 + b_0\cdot\lambda^3 = b_0\cdot(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots) = b_0\cdot\frac{1}{1-\lambda},$$

то середній лаг визначається як

$$\overline{p} = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} j\cdot b_j}{\sum_{j=0}^{\infty} b_j} = \frac{b_0\cdot\lambda\cdot(1+2\cdot\lambda^2+3\cdot\lambda^3+\ldots)}{b_0\cdot\frac{1}{1-\lambda}} = \frac{b_0\cdot\lambda\cdot\frac{1}{(1-\lambda)^2}}{b_0\cdot\frac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}.$$

Неважко помітити, що при λ = 0,5 середній лаг $\overline{p} = 1$, а при λ <0,5 середній лаг $\overline{p} < 1$, тобто вплив фактору на результат в середньому займає менше одного періоду часу. Величину (1- λ) інтерпретують як швидкість, з якою відбувається адаптація результату в часі до зміни факторної ознаки. Для розрахунку медіанного лагу в моделі Койка використовують таку формулу:

$$p_{Me} = \frac{\ln 0{,}5}{\ln\lambda}. \qquad (9.8)$$

Приклад. Досліджуючи взаємозв’язок реальної заробітної плати та рівня безробіття, Дж. Сакс і М. Бруно використали таку модель[1]:

$$U_t = \delta_0 + \delta_1\cdot U_{t-1} + \delta_2\cdot t + \delta_3\cdot w_t + \varepsilon_t,$$

де U_t, U_{t-1} – відповідно рівень безробіття в періоді *t* і *t-1*;

$\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ – параметри моделі;

w_t – перевищення реальної заробітної плати над її рівнем в умовах повної зайнятості;

t – час;

ε_t – помилка.

Значення змінної w_t були отримані розрахунковим шляхом.

Для економіки Канади заданими 1961-1981 рр. автори отримали таке рівняння регресії:

$$U_t = \delta_0 + 0{,}63\cdot U_{t-1} + 0{,}07\cdot t + 15{,}72\cdot w_t,\ R^2 = 0{,}85.$$

t-критерій (5,46)   (2,82) (2,23)

Змінна w_t в цій моделі є одним з факторів, що визначає попит на працю. Якщо припустити, що змінна w_t спричиняє вплив на рівень безробіття з нескінченним часовим лагом в умовах геометричної структури лагу, то відповідно до методу Койка ми отримаємо таку модель з розподіленим лагом:

$$U_t = a + b_0\cdot w_t + b_0\cdot\lambda\cdot w_{t-1} + b_0\cdot\lambda^2\cdot w_{t-2} + \ldots + c\cdot t + \varepsilon_t.$$

[1] Bruno M., Sachs J. D. Economics of Worldwide Stagflation. – USA : Harvard University Press, Cambridge, Mass, 1985. – P. 185.

Дана модель відрізняється від моделі (9.5) тим, що, окрім поточного і лагового значень факторної ознаки, вона враховує фактор часу t. Проводячи алгебраїчні перетворення відповідно до методу Койка, неважко переконатися, що ця модель зводиться до такої моделі авторегресії:

$$U_t = (a \cdot (1-\lambda) + \lambda \cdot c) + (1-\lambda) \cdot U_{t-1} + c \cdot (1-\lambda) \cdot t + b_0 \cdot w_t + u_t,$$

тобто $\delta_0 = a \cdot (1-\lambda) + \lambda \cdot c;\ \delta_1 = 1-\lambda;\ \delta_2 = c \cdot (1-\lambda);\ \delta_3 = b_0.$

У моделі Сакса і Бруно λ = 0,63.

Розрахуємо параметри моделі Койка:

$c = 0{,}07/(1-0{,}63) = 0{,}189;$

$a = \delta_0/(1-0{,}63) + 0{,}189 \cdot 0{,}63 = 0{,}119 + 2{,}703 \cdot \delta_0;$

$b_0 = 15{,}72;$

$b_1 = 15{,}72 \cdot 0{,}63 = 9{,}904;$

$b_2 = 15{,}72 \cdot (0{,}63)^2 = 6{,}239;$

$b_3 = 15{,}72 \cdot (0{,}63)^3 = 3{,}931.$

Модель Койка має вигляд:

$$\hat{U}_t = (0{,}119 + 2{,}703 \cdot \delta_0) + 15{,}72 \cdot w_t + 9{,}904 \cdot w_{t-1} + 6{,}239 \cdot w_{t-2} + 3{,}931 \cdot w_{t-3} + \ldots + 0{,}189 \cdot t.$$

Середній лаг у цій моделі складає:

$$\bar{p} = 0{,}63/(1-0{,}63) = 1{,}703.$$

Величину медіанного лагу відповідно до формули (9.8) можна визначити як:

$$p = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}63} = \frac{-0{,}69314}{-0{,}46203} = 1{,}500203$$

Таким чином, у середньому вплив різниці між реальною заробітною платою в економіці Канади і її величиною в умовах повної зайнятості проявляється протягом відносно короткого проміжку часу – 1,7 років, причому половина цього впливу реалізується протягом перших 1,5 років з моменту зміни w_t.

9.4. МОДЕЛІ ЧАСТКОВИХ ПРИСТОСУВАНЬ ТА АДАПТИВНИХ ОЧІКУВАНЬ

Існують і інші моделі, у правій частині яких фігурують лагові значення залежної змінної. Добре відомими моделями такого типу є модель часткових пристосувань і модель адаптивних очікувань.

Коли відсутнє повне уявлення про об’єкт, його інерційність, тобто швидкість зміни його показників з часом, то застосовується метод часткових пристосувань.

Розглянемо модель вигляду:

$$y_t^* = \alpha + \beta x_t + u_t. \qquad (9.9)$$

У цьому рівнянні y_t^* розглядається як оптимальне значення y_t, яке відповідає x_t. Так, наприклад, y_t^* – оптимальна в довгостроковому періоді кількість капіталу, необхідна для того, щоб виробляти певну кількість продукції при даному рівні технології, відсотковій ставці тощо.

Нехай величина випуску x_t різко змінюється (збільшується чи зменшується). При цьому рівень капіталу y_t може не змінитись адекватно зміні випуску з різних причин: певна інерційність, недостатня інформація, договірні умови тощо. Оскільки бажаний рівень не можна спостерігати явно, Нерлоу запропонував гіпотезу:

$$y_t - y_{t-1} = \gamma(y_t^* - y_{t-1}), \quad 0 \le \gamma \le 1, \qquad (9.10)$$

де γ – коефіцієнт пристосувань; $y_t - y_{t-1}$ – фактична змінна, $y_t^* - y_{t-1}$ – бажана змінна.

Оскільки $y_t - y_{t-1}$, зміна запасу капіталу між двома періодами є інвестуванням, то (9.10) можна переписати у вигляді:

$$I_t = \gamma(y_t^* - y_{t-1}), \qquad (9.11)$$

де I_t – інвестування за період t.

Рівняння (9.11) показує, що фактична зміна в запасі капіталу (інвестиціях) у будь-який період часу t є певною часткою γ від бажаної зміни за цей період.

Значення величини γ міститься між двома екстремальними значеннями γ = 1 (фактична зміна обсягу капіталу дорівнює бажаній) і γ = 0 (рівень капіталу такий самий, як і в попередній період). Насправді перехід до бажаного рівня капіталу найчастіше буває неповним через інертність, контрактові зобов’язання тощо. Звідси зрозуміла назва моделі, що описує подібні явища – модель часткових пристосувань.

Якщо підставити (9.10) в (9.11), то одержимо:

$$y_t = \alpha\gamma + \beta\gamma x_t + (1-\gamma) y_{t-1} + \gamma u_t \qquad (9.12)$$

Запис (9.12) має назву ***модель часткових пристосувань***.

Модель (9.9) відображає довгостроковий або рівноважний попит на обсяг необхідного капіталу, модель у вигляді (9.12) представляє *короткостроковий* попит на капітал, у короткостроковому періоді наявний обсяг капіталу не обов’язково відповідає обсягу капіталу в довгостроковому періоді.

Модель адаптивних очікувань характеризує зв’язок змінної y з очікуваним рівнем змінної x. Позначимо x_t^* – очікуване значення x_t, яке сформоване в поточний момент часу. Розглянемо модель

$$y_t = \alpha + \beta x_t^* + u_t \qquad (9.13)$$

де y – попит на гроші; x^* – точка рівноваги, оптимум, очікувана довгострокова або звичайна відсоткова ставка; u – випадкова величина.

Рівняння (9.13) показує, що попит на гроші є функцією від *очікуваної* відсоткової ставки.

Оскільки очікувану змінну x^* не можна спостерігати безпосередньо, то вводиться гіпотеза формування очікування:

$$x_t^* - x_{t-1}^* = \delta(x_t - x_{t-1}^*), \quad 0 \le \delta \le 1, \tag{9.14}$$

де δ – коефіцієнт очікування.

Гіпотеза (9.14) передбачає, що «сили, задіяні в економіці, пристосовують свої очікування до попереднього досвіду, і зокрема вчаться на своїх попередніх помилках», тобто (9.14) стверджує, що очікування кожного періоду коригується на частку δ від розриву між поточним значенням змінної та її попереднім очікуваним значенням. Зокрема для розглядуваного випадку це означає, що очікування щодо відсоткової ставки кожного проміжку часу коригуються на частку δ від розходження між відсотковою ставкою у поточному періоді і її очікуваним значенням у попередньому періоді.

Запишемо (9.14) у вигляді:

$$x_t^* = \delta x_t + (1-\delta)x_{t-1}^*. \tag{9.15}$$

Це показує, що очікуване значення відсоткової ставки в момент часу t є зваженим середнім фактичного значення відсоткової ставки в момент t і його очікуваного значення в попередній період. Якщо δ = 1, то очікування справджуються негайно і повністю, тобто в поточний період часу. Якщо δ = 0, очікування незмінні, тобто «умови, що є сьогодні, зберігатимуться й у наступні періоди».

Підставляючи (9.15) у (9.3), маємо:

$$y_t = \alpha + \beta\delta x_t + \beta(1-\delta)x_{t-1}^* + u_t. \tag{9.16}$$

Затримаємо (9.13) на один період, помноживши його на (1 – δ*)* і віднімемо добуток від (9.16). У результаті отримаємо:

$$y_t = \delta\alpha + \delta\beta x_t + (1-\delta)y_{t-1} + u_t - (1-\delta)u_{t-1}. \tag{9.17}$$

Модель (9.17) має назву ***модель адаптивних очікувань***.

Незважаючи на зовнішню схожість, модель адаптивних очікувань і модель часткових пристосувань відрізняються. Перша базується на невизначеності (майбутні ціни, ставки відсотків тощо), а остання залежить від технічних і інституціональних обмежень, інерції, вартості обміну тощо.

9.5. МЕТОДИ ОЦІНЮВАННЯ ПАРАМЕТРІВ ЛАГОВОЇ МОДЕЛІ

Коли схема формування вагових коефіцієнтів задовольняє припу-щення Койка, модель часткового коригування або модель адаптивних сподівань, то у правій частині економетричної моделі виникає і лагове значення залежної змінної *Y*. Це зумовлює певні проблеми при оцінюванні параметрів такої моделі. Розглянемо ці проблеми.

Нехай економетрична модель має вигляд:

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + v_t. \tag{9.18}$$

Як ми вже переконалися, методи оцінювання параметрів моделі залежать від гіпотез, які будуть прийняті щодо залишків v_t.

***Гіпотеза* 1.** Залишки – випадкові величини і розподіляються нормально.

***Гіпотеза* 2.** Залишки виражені через параметр λ, тобто

$$v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, \quad 0 \le \lambda \le 1:$$

а) v_t – нормально розподілені залишки;

б) $u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, ε_t – нормально розподілені залишки.

***Гіпотеза* 3.** Залишки $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t$, $|\rho| < 1$, ε_t – нормально розподілені залишки.

Перша гіпотеза найпростіша, а тому єдина складність в оцінюванні параметрів моделі пов'язується з наявністю в правій частині лагової змінної y_{t-1}.

Друга гіпотеза відповідає схемі Койка і моделі адаптивних сподівань. При цьому розглядаються два варіанти:

а) залишки u_t незалежні;

б) залишки u_t описуються авторегресійною моделлю першого порядку.

Третя гіпотеза не пов'язується ні зі схемою Койка, ні з моделлю адаптивних очікувань. Згідно з цією гіпотезою, величина залишків v_t, описується авторегресійною схемою першого порядку (найпростіший випадок).

Розглянемо особливості оцінки параметрів моделі при різних гіпотезах відносно залишків.

***Гіпотеза* 1а.** Оскільки залишки не корельовані між собою, то оцінка параметрів може бути зроблена методом найменших квадратів. Цей метод дасть зміщену оцінку, бо залишки не можна вважати незалежними від лагової змінної y_{t-1}. Оскільки $M(u_t, y_t) \ne 0$, то і $M(u_t, y_t) \ne 0$ для τ ≥ і t = 1,2,..., n.

Щоб знайти величину зміщення розглянемо таку модель:

$$y_t = a y_{t-1} + u_t,$$

де |a|<1 і послідовні значення u_t некорельовані. Для такої моделі оцінка параметрів a на основі методу найменших квадратів дає:

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} y_t^2}.$$

В економетричній літературі доведено, що в такому разі зміщення параметра a

$$M(a) - a \approx \frac{-2a}{n}. \qquad (9.19)$$

Альтернативною оцінкою параметра a може слугувати коефіцієнт автокореляції першого порядку для y, тобто:

$$r = \frac{\frac{1}{1-n}\sum_{t=2}^{n} y_t y_{t-1} \frac{1}{(1-n)^2}(\sum_{t=2}^{n} y_t)(\sum_{t=2}^{n} y_{t-1})}{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{1}{n^2}(\sum_{t=2}^{n} y_t)^2}. \qquad (9.20)$$

Зміщення тоді визначатиметься так:

$$M(r)-a \approx n^{-1}(1+3a), \qquad (9.21)$$

тобто обидві оцінки мають тенденцію до завищення параметра a, причому рівень зміщення параметра r більший, ніж параметра a.

За допомогою методу Монте-Карло було досліджено оцінки параметрів a у моделі $y_t=ay_{t-1}+u_t$, із застосуванням таких прийомів:

а) визначення параметра r;

б) використання параметра r, скоригованого на величину зміщення в (9.21);

в) застосування методу найменших квадратів.

При цьому виявилось, що оцінка параметрів a на основі методу найменших квадратів має найменшу середньоквадратичну помилку.

***Гіпотеза* 2а**. Коли в економетричній моделі серед незалежних змінних є лагове значення залежної змінної, застосування критерію Дарбіна-Уотсона для виявлення серійної кореляції залишків призводить до зміщення його оцінок. Тому Дарбін розробив методи перевірки автокореляції залишків, які можна застосувати і для моделей з лаговими змінними, що побудовані на базі великих сукупностей спостережень (n). Цей критерій має вигляд:

$$h = \hat{\rho}\sqrt{\frac{n}{1-n\cdot D(a_1)}}, \qquad (9.22)$$

де $\hat{\rho}$ – оцінка параметра в автокореляційній моделі першого порядку

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$

$D(a_1)$ – оцінка вибіркової дисперсії параметра a_1, який знаходиться при лаговій змінній y_{t-1}. Оцінку параметра ρ можна дістати з такого співвідношення:

$$\hat{\rho} \approx r = \frac{\sum_{t=2}^{n} u_t u_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} u_{t-1}^2}. \qquad (9.23)$$

Для перевірки нульової гіпотези, обчислені величини h порівнюються з критичними значеннями (односторонній критерій) нормального розподілу (χ^2) при вибраному рівні значущості. З формули для цього критерію видно, що коли $D(a_1) \geq 1$, то його використовувати не можна. Для критерію h виконується така сама перевірка, як і в разі стандартного нормального відхилення, тобто коли при рівні значущості α = 0,05 h>1,645, то гіпотеза про нульову автокореляцію відхиляється.

Розглянемо особливості оцінки параметрів, коли залишки мають форму для моделі адаптивних сподівань і схеми Койка, тобто $v_t = u_t - \lambda u_{t-1}, 0 \leq \lambda \leq 1, v_t$ – нормально розподілені залишки.

Тоді математичне сподівання залишків дорівнюватиме нулю $M(v_t) = 0$ для всіх t, а дисперсія матиме вигляд: $D(v_t) = \sigma_u^2(1+\lambda^2)$ для всіх t. А це означає, що для оцінювання параметрів моделі в даному разі можна використати узагальнений метод найменших квадратів:

$$A = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y.$$

Оскільки дисперсія залишків пропорційна до величини $(1+\lambda^2)$, тоді як коваріація для $\tau = \pm 1$ дорівнює $-\lambda\sigma_u^2$, а для $|\tau| \geq 2$ вона дорівнює нулю, то матриця V має вигляд

$$V = \sigma_u^2 \begin{pmatrix} 1+\lambda^2 & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & 1+\lambda^2 & -\lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}, \tag{9.24}$$

а матриця X містить лагову змінну y_{t-1}.

Врахувавши, що параметр a при y_{t-1} дорівнює λ, дійдемо висновку: коли λ відома, модель спрощується і має вигляд

$$y_t - \lambda y_{t-1} = a_0 + a_2 x_t + v_t. \tag{9.25}$$

Тоді матриця X складатиметься лише з двох стовпців, перший з яких утворюється одиницями, а другий – спостереженнями над X. Вектор Y в такому разі складається з перетворених даних $y_t - \lambda y_{t-1}$. Як бачимо, проблема оцінювання параметрів у цьому випадку зводиться до знаходження параметра λ.

Зельнер і Гейсел запропонували вибирати значення параметра з інтервалу 0<λ<1. Це означає, що довільно вибирається параметр λ, на основі якого формується матриця V з (9.24). Ця матриця у свою чергу дає змогу знайти оцінки параметрів узагальненим методом найменших квадратів. Вибирається те значення параметра λ, яке дає змогу мінімізувати суму квадратів залишків $v^T V^{-1} v$, а звідси і стандартну помилку параметрів. Тобто використовується поступовий перебір значень λ на певному інтервалі, доки не буде знайдено той параметр, який забезпечує найкращий розв'язок.

***Гіпотеза* 2б**. Згідно з цією гіпотезою, залишки мають вигляд:

$v_t = u_t - \lambda u_{t-1},\ 0 \le \lambda \le 1,$,

$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,\ |\rho| < 1,\ \varepsilon_t$, – нормально розподілені залишки.

Зельнер і Гейсел запропонували процедуру пошуку параметрів λ і ρ для цієї моделі. Запишемо економетричну модель (9.25) у вигляді:

$$y_t = a_0 + \lambda y_{t-1} + a_2 x_t + u_t - \lambda u_{t-1}.$$

Визначимо $w_t = y_t - u_t$. Отже,

$$w_t - \rho w_{t-1} = y_t - y_{t-1} - u_t - \rho u_{t-1}.$$

Перепишемо це рівняння так:

$$w_t(\rho) = y_t(\rho) - u_t(\rho),$$

де $w_t(\rho) = w_t - \rho w_{t-1}$.

Оскільки

$$y_t(\rho) = a_0(1-\rho) + \lambda y_{t-1}(\rho) + a_2 x_t(\rho) + u_t(\rho) - \lambda u_{t-1}(\rho),$$

то

$$w_t(\rho) = a_0(1-\rho) + \lambda w_{t-1}(\rho) + a_2 x_t(\rho).$$

Шляхом послідовних підстановок можна записати $y_t(\rho)$

$$\begin{aligned} y_t(\rho) &= \lambda w_0(\rho) + a_0(1-\rho)(1+\lambda+\lambda^2+\lambda^3+\ldots+\lambda^{t-1}) + \\ &+ a_2 [x_t(\rho) + \lambda x_{t-1}(\rho) + \ldots + \lambda^{t-1} x_1(\rho)] + \varepsilon_t. \end{aligned} \tag{9.26}$$

Якщо λ і ρ відомі, то (9.26) визначає Y як лінійну функцію від трьох невідомих параметрів $w_0(p)$, $a_0(1-\rho)$ і a_2 плюс випадкове відхилення. Тоді ці параметри можна відшукати на основі методу найменших квадратів. Матриця вихідних даних $X(\rho)$ матиме вигляд:

$$X(\rho) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & x_1(\rho) \\ \lambda^2 & 1+\lambda & x_2(\rho) + \lambda x_1(\rho) \\ \lambda^2 & 1+\lambda+\lambda^2 & x_3(\rho) + \lambda x_2(\rho) + \lambda^2 x_1(\rho) \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda^n & 1+\lambda+\lambda^2+\lambda^{n-1} & x_n(\rho) + \lambda x_{n-1}(\rho) + \ldots + \lambda^{n-1} x_1(\rho) \end{pmatrix}.$$

Для випадку, коли λ і ρ невідомі, Зельнер і Гейсел запропонували вибирати значення λ і ρ довільно на проміжку 0<λ<1; – 1<ρ<1. Для кожної пари λ і ρ послідовно обчислюються значення $y_t(\rho)$ і залишки. У кінці процедури вибираються ті значення λ і ρ, які забезпечують мінімальну суму квадратів відхилень.

Як бачимо, процедура оцінювання параметрів при гіпотезах **2а** і **2б** досить громіздка. Тому використовувати її слід лише тоді, коли є впевненість, що залишки мають ту специфікацію, яка визначає особливості прийнятої гіпотези.

***Гіпотеза* 3а.** Згідно з цією гіпотезою, специфікується модель:

$$y_t = a_0 + a_1 y_{t-1} + a_2 x_t + v_t,$$

де $v_t = \rho v_{t-1} + \varepsilon_t,\ |\rho| < 1,\ \varepsilon_t$ – нормально розподілені залишки.

Ця гіпотеза не пов'язується ні зі схемою Койка, ні з моделлю адаптивних сподівань. Ідеться про оцінку параметрів моделі, яка має серед незалежних змінних лагове значення залежної змінної і одночасно має автокорельовані залишки.

9.6. МЕТОД ЕЙТКЕНА

Якщо ρ відоме, то можна записати матрицю

$$M(vv^T) = \sigma_v^2 S = \sigma_v^2 \begin{pmatrix} 1 & \rho & \rho^2 & \dots & \rho^{n-1} \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots \\ \rho^{n-1} & \rho^{n-2} & \rho^{n-3} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

і оцінити параметри моделі за методом Ейткена:

$$\hat{A} = (X^T V^{-1} X)^{-1} X^T V^{-1} Y \,,$$

де

$$X = \begin{pmatrix} 1 & y_0 & x_1 \\ 1 & y_1 & x_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}.$$

Така процедура наближено еквівалентна застосуванню методу найменших квадратів до моделі

$$y_t - \rho y_{t-1} = a_0(1-\rho) + a_1(y_{t-1} - \rho y_{t-2}) + a_2(x_t - \rho x_{t-1}) + \varepsilon_t \,,$$

відносно перетворених даних. У результаті дістаємо обґрунтовані і асимптотично ефективні оцінки параметрів, але через присутність лагового значення залежної змінної у правій частині, вони будуть зміщеними для кінцевих вибірок.

Якщо значення параметра ρ невідоме, то можна скористатись процедурою пошуку, запропонованою для гіпотези **2**.

Як альтернативу вищенаведеному методу можна застосовувати й ітеративний метод.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. Розкрийте поняття лагу та дистрибутивно-лагової моделі.
2. Як перевіряється обґрунтованість лагів?
3. В яких випадках застосовується метод Койка?
4. У чому сутність моделей часткових пристосувань? Назвіть приклади.
5. Яке призначення моделей адаптивних очікувань? Яка їх відмінність від моделей часткових пристосувань?
6. Якими методами здійснюється оцінювання параметрів лагових моделей?
7. Охарактеризуйте метод Ейткена.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1. Для процесу $x_t = 0{,}1+0{,}5x_t^{-1}+0.1z_t+0.2z_t^{-1}+\varepsilon_t$ запишіть довгострокову залежність між x та z.
2. Процес з геометричним лагом заданий формулою:

$$x_t = 1 + \frac{1}{2} z_t + \frac{1}{4} z_t^{-1} + \frac{1}{8} z_t^{-2} + \ldots + \varepsilon.$$

Застосуйте до нього перетворення Койка.

3. У таблиці наведені дані з відомої статті С. Алмон щодо промислових підприємств США по капітальним видаткам та асигнуванням.

Вихідні дані до задачі 4

Квартал	Витрати	Асигнування	Квартал	Витрати	Асигнування
1953.1	2 072	1 660	1957.1	3 446	3 476
1953.2	2 077	1 926	1957.2	3 466	2 993
1953.3	2 078	2 181	1957.3	3 435	2 262
1953.4	2 043	1 897	1957.4	3 183	2 011
1954.1	2 062	1 695	1958.1	2 697	1 511
1954.2	2 067	1 705	1958.2	2 338	1 631
1954.3	1 964	1 731	1958.3	2 140	1 990
1954.4	1 981	2 151	1958.4	2 012	1 993
1955.1	1 914	2 556	1959.1	2 071	2 520
1955.2	1 991	3 152	1960.2	2 192	2 804
1955.3	2 129	3 763	1960.3	2 240	2 919
1955.4	2 309	3 903	1960.4	2 421	3 024
1956.1	2 614	3 912	1961.1	2 639	2 725
1956.2	2 896	3 571	1961.2	2 733	2 321
1956.3	3 058	3 199	1961.3	2 721	2 131
1956.4	3 309	3 262	1961.4	2 640	2 552

а) Побудуйте графіки обох рядів. Що можна сказати по них про ряди? Чи видно залежність між рядами (в той же період або з запізненням)?

б) Побудуйте взаємну кореляційну функцію для лагів – 12, ..., 0, ..., 12. Зробіть висновки.

в) Використовуючи дані, оцініть модель розподіленого лагу з довжиною лагу $p = 6$ для залежності витрат від асигнувань як поліном другого степеня.

ТЕСТИ

1. Лагові змінні – це:

а) змінні, що впливають на залежні змінні, але не залежать, у свою чергу, від останніх, позначаються через x;

б) залежні змінні, кількість яких дорівнює кількості рівнянь у системі і позначаються через y;

в) значення залежних змінних за попередній період часу.

2. Розподілено-лагові моделі містять:

а) лагові значення залежної змінної y;

б) лагові значення незалежної змінної x;

в) лагові значення помилок e;

г) лагові значення будь-якої величини.

3. Взаємна кореляційна функція дозволяє визначити:

а) лаг, з яким найбільше впливає незалежна змінна x на залежну змінну y;

б) лаг, на який слід зсунути значення залежної змінної y, щоб отримати найкращу модель;

в) кореляцію між поточними значеннями x та y;

г) кореляцію між поточними значеннями x_1 та x_2.

4. Метод Койка використовується для:

а) скінченних лагових моделей;

б) лагових моделей, що мають нескінченну лагову структуру;

в) лагових моделей, що мають нескінченну лагову структуру і лагові параметри яких володіють однаковим законом зміни;

г) авторегресивних моделей;

д) моделей ковзного середнього.

5. Основною проблемою перетворених лагово-дистрибутивних моделей може бути:

а) гетероскедастичність;

б) мультиколінеарність;

в) серійна кореляція між лаговими значеннями залишків;

г) неефективність оцінок параметрів регресії;

д) усі відповіді вірні.

6. Модель часткових пристосувань використовується при:

а) інерційних економічних процесах;

б) відсутності повного уявлення про об'єкт дослідження;

в) невизначеності щодо майбутніх значень економічних показників;

г) вірні відповіді а) та б);

д) вірні відповіді б) та в).

7. Модель адаптивних очікувань використовується при:

а) інерційних економічних процесах;

б) відсутності повного уявлення про об'єкт дослідження;

в) невизначеності щодо майбутніх значень економічних показників;

г) вірні відповіді а) та б);

д) вірні відповіді б) та в).

8. При оцінці параметрів лагових моделей необхідними припущеннями є:

а) залишки є випадковими величинами;

б) залишки є нормально розподіленими величинами;

в) залишки не корельовані між собою;

г) немає вірної відповіді;

д) вірні відповіді а) – в).

9. Метод Ейткена дозволяє отримати:

а) необґрунтовані оцінки;

б) неефективні оцінки;

в) обґрунтовані та асимптоматично ефективні оцінки;

г) зміщені оцінки для кінцевих виборок;

д) вірні відповіді а) та б);

е) вірні відповіді в) та г).