

ТЕМА 8

Методи інструментальних змінних

Викривлення результатів моделювання може бути спричинене таким фактором, як наявність кореляції між незалежною змінною та помилками. Розв'язання цієї проблеми здійснюється за допомогою низки операторів оцінювання, що використовують інструментальні змінні.

Тема 8 описує алгоритм застосування методу інструментальних змінних та ставить завдання:

- ознайомитися з поняттям інструментальних змінних;
- вивчити основні види операторів оцінювання методом інструментальних змінних
- знати переваги і недоліки та межі застосування кожного оператора.

Основні питання, що розглядаються:

1. Сутність методу інструментальних змінних
2. Підходи до визначення параметрів моделі методами інструментальних змінних

Основні терміни:

Метод інструментальних змінних; оператор оцінювання Вальда; оператор оцінювання Бартлета; оператор оцінювання Дарбіна.

8.1. СУТНІСТЬ МЕТОДУ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗМІННИХ

Метод інструментальних змінних є альтернативним до звичайного методу найменших квадратів у випадку, коли кореляція між факторними (незалежними) змінними та залишками в регресії суттєва і, отже, існують перешкоди до застосування останнього. Як основний інструмент методу використовуються допоміжні змінні, які називають інструментальними.

Метод інструментальних змінних – найбільш важливий різновид методу найменших квадратів. Він полягає в частковій заміні непридатної пояснювальної змінної такою змінною, яка не корельована з випадковою величиною. Обмежимося випадком однофакторної регресії:

$$y = \alpha + \beta x + u.$$

Припустимо, що за якоїсь причини x має випадкову складову, що залежить від u . Також припустимо, що у великих вибірках $Var(x)$ прагне до кінцевої границі σ_x^2 . В таких умовах безпосереднє застосування МНК для побудови регресивної залежності y від x призвів би до неспроможності результатів з оцінки параметрів. Крім цього, використовуються припущення:

- математичне сподівання випадкової величини дорівнює нулю;
- дисперсія стала для всіх залишків.

Кореляція між x і залишками u може виникнути з різних причин, але основними вважаються три:

- 1) помилки вимірювання незалежних змінних;
- 2) побудова економетричної моделі за системою одночасних рівнянь;
- 3) наявність в економетричній моделі лагових змінних.

Тепер припустимо, що можна знайти іншу змінну Z , яка корелює з x , але не корелює з u . Покажемо, що заснована на використанні інструментальних змінних оцінка параметра β , що визначається як:

$$b_{I3} = \frac{\text{cov}(z, y)}{\text{cov}(z, x)}$$

є спроможною за умови, що при зростаючій кількості спостережень $\text{cov}(z, x)$ прагне до кінцевої, відмінної від нуля границі, яку ми позначимо як σ_{zx} . Що означає, що при великих вибірках b_{I3} прагне до істинного значення β . Використовуючи рівняння, ми можемо записати вираз для b_{I3} таким чином:

$$b_{I3} = \frac{\text{cov}(z, y)}{\text{cov}(z, x)} = \frac{\text{cov}(z, \alpha + \beta x + u)}{\text{cov}(z, x)} = \frac{\text{cov}(z, \alpha)}{\text{cov}(z, x)} + \frac{\text{cov}(z, \beta x)}{\text{cov}(z, x)} + \frac{\text{cov}(z, u)}{\text{cov}(z, x)} = \beta + \frac{\text{cov}(z, u)}{\text{cov}(z, x)},$$

оскільки $\text{cov}(z, \alpha)$ дорівнює нулю (α є постійною) і $\text{cov}(z, \beta x)$ дорівнює $\beta \text{cov}(z, x)$. Таким чином, можна помітити, що оцінка за методом інструментальних змінних дорівнює істинному значенню плюс помилка, яка дорівнює $\frac{\text{cov}(z, u)}{\text{cov}(z, x)}$.

У матричному вигляді оцінювання вектора B параметрів регресії за допомогою інструментальних змінних має вигляд:

$$B = (Z^T X)^{-1} Z^T Y.$$

Майже нічого неможливо сказати про розподіл оцінки b_{I3} на малих вибірках, але при збільшенні n її розподіл буде прагнути до нормального.

8.2. ПІДХОДИ ДО ВИЗНАЧЕННЯ ПАРАМЕТРІВ МОДЕЛІ МЕТОДАМИ ІНСТРУМЕНТАЛЬНИХ ЗМІННИХ

В економетричних дослідженнях пропонуються три методи визначення інструментальних змінних, на основі яких знайдені оператори оцінювання параметрів моделі:

- 1) оператор оцінювання Вальда;
- 2) оператор оцінювання Бартлета;
- 3) оператор оцінювання Дарбіна.

Оператори оцінювання Вальда і Бартлета застосовуються тоді, коли економетрична модель характеризує зв'язок двох змінних, тобто модель має вигляд $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + u_t$, а оператор оцінювання Дарбіна може бути застосованим і тоді, коли економетрична модель має більш ніж одну незалежну змінну.

Оператор оцінювання Вальда.

Нехай економетрична модель має вигляд: $Y_t = \alpha_0 + \alpha_1 X_t + u_t$.

У такому разі, якщо вибіркова сукупність містить парне число спостережень, то матриця інструментальних змінних Z матиме вигляд:

$$Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Щоб визначити другий рядок цієї матриці, необхідно виконати такі дії:

1. Знайти відхилення кожного елемента вектора X від медіани. Матриця незалежних змінних для цієї моделі матиме вигляд:

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{pmatrix}$$

Матриця інструментальних змінних на основі даної матриці замість рядка незалежної змінної міститиме рядок інструментальної.

2. Величини відхилень, що мають знак «плюс», замінюються на одиниці, а ті, що мають знак «мінус» – на одиниці з цим знаком.

Використовуючи ці інструментальні змінні в операторі оцінювання $B = (Z^T X)^{-1} Z^T Y$, отримаємо оцінки Вальда:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}_2 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_2 - \bar{X}_1}, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},$$

де \bar{X}_2 і \bar{X}_1 характеризують середні відхилення значень X відповідно вгору і вниз від медіани, а \bar{Y}_2 і \bar{Y}_1 – середні значення залежної змінної, які відповідають середнім \bar{X}_2 і \bar{X}_1 .

Коли вибіркова сукупність містить непарне число спостережень, то перш ніж розпочинати обчислення, необхідно відкинути середнє спостереження.

При загальних припущеннях оцінка, яка здобута методом Вальда, є обґрунтованою, але її вибіркова дисперсія може бути досить великою, тобто оцінка є неефективною.

Особливості оцінювання методом Бартлета

В операторі оцінювання Бартлета інструментальні змінні визначаються, як і в операторі Вальда. Проте Бартлет показав, що ефективність оцінки можна збільшити, якщо розбити впорядковані значення змінної X на три групи однакового розміру. Перша з них містить найменші значення змінної X , друга – середні, третя – найбільші. Вилучивши середню групу – $n/3$ спостережень, дістанемо оцінку для параметрів:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\bar{Y}_3 - \bar{Y}_1}{\bar{X}_3 - \bar{X}_1}, \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},$$

де \bar{X}_1 і \bar{X}_3 та \bar{Y}_1 і \bar{Y}_3 – середні значення змінних для спостережень першої та третьої груп.

Поділ вибіркової сукупності спостережень на три рівні групи має задовольняти вимоги прикладних досліджень, оскільки немає змоги дістати точну інформацію про закон розподілу значень X .

Оператор оцінювання Дарбіна

В операторі оцінювання Дарбіна інструментальні змінні визначаються так: значення вектора X упорядковуються в порядку зростання і за інструментальну змінну береться порядковий номер (ранг), тобто числа 1, 2, 3, 4, ..., n . Дарбін показав, що для великих вибіркової сукупностей ефективність застосування методу оцінювання досягає майже 96 % ефективності оцінок методу найменших квадратів, а для сукупностей $n = 20$ ефективність застосування такого методу оцінювання становить близько 86 %.

Модель Дарбіна не має вільного члена. Щоб застосувати його метод для оцінювання всіх параметрів моделі, у тому числі й для вільного члена, матриці змінних подамо у вигляді:

$$Z^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

$$X^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \dots & x_n \end{pmatrix},$$

де x_i – характеризують відхилення від середнього значення x , які впорядковують за зростанням. Оператор оцінювання має вигляд:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{k=1}^n kY_k}{\sum_{k=1}^n kX_k}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X},$$

де k – порядковий номер (інструментальна змінна).

Метод Дарбіна можна застосовувати і тоді, коли модель містить кілька незалежних змінних. У такому випадку спочатку знаходяться відхилення значень кожної змінної від відповідного середнього значення. Потім ці відхилення упорядковуються за зростанням і кожному з них присвоюється порядковий номер.

Що слід робити при неможливості знайти інструментальну змінну, яка достатньо тісно корелює з x ? Тоді можна використати метод найменших квадратів.

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

1. В яких випадках для оцінки параметрів регресійного рівняння застосовуються інструментальні змінні?
2. Які оператори оцінювання параметрів регресії застосовуються в методі інструментальних змінних?
3. Які особливості застосування оператора оцінювання Вальда?
4. Охарактеризуйте оператор Бартлета. Які його відмінності від оператора Вальда? Які можливості застосування?
5. Розкрийте сутність та послідовність виконання обчислень із знаходження параметрів регресії при застосуванні оператора оцінювання Дарбіна.
6. Здійсніть порівняльний аналіз операторів оцінювання.

ПРАКТИЧНІ ЗАВДАННЯ

1. За наведеними даними побудуйте просту лінійну регресію та перевірте, чи наявна кореляція між факторною ознакою та залишком. У разі наявності, використайте один з операторів для знаходження інструментальної змінної та побудуйте нову модель. Перевірте отримані нові помилки на кореляцію з фактором x .

Вихідні дані до задачі 1

y	12	18	10	3	15	14	6	9	8	11	13
x	0,6	0,7	0,6	0,1	0,8	0,3	0,2	0,3	0,3	0,5	0,6

2. У таблиці наведено дані щодо споживання цигарок у США по 48 штатах за 1985 рік та 1995 рік.

Вихідні дані до задачі 2

Штат	1985 рік		1995 рік	
	Кількість придбаних блоків на одну особу	Середня ціна за блок, дол США	Кількість придбаних блоків на одну особу	Середня ціна за блок, дол США
AL	116,5	104,3	101,1	158,4
AR	128,5	101,5	111,0	175,5
AZ	104,5	114,5	72,0	198,6

Закінчення таблиці

CA	100,4	107,8	56,9	210,5
CO	113,0	94,3	82,6	167,4
CT	109,3	128,0	79,5	218,3
DE	143,9	102,5	124,5	165,6
FL	122,2	113,3	93,1	187,7
GA	127,2	97,0	97,5	156,6
IA	113,7	101,8	92,4	190,9
ID	103,0	102,9	74,8	179,6
IL	123,2	104,4	83,3	198,5
IN	137,6	96,2	134,3	154,5
KS	116,7	98,9	88,8	175,2
KY	186,0	87,0	172,6	146,0
LA	127,6	108,4	105,2	167,8
MA	115,7	112,2	76,6	217,1
MD	121,0	92,0	77,5	186,0
ME	128,1	107,0	102,5	197,2
MI	128,0	104,9	81,4	240,8
MN	112,9	113,6	82,9	220,3
MO	130,4	96,3	122,5	157,2
MS	117,0	105,3	105,6	169,2
MT	104,3	99,3	87,2	156,2
NC	155,3	85,0	121,5	150,0
ND	105,5	106,8	79,8	192,2
NE	107,4	104,6	87,3	182,2
NH	198,0	95,5	156,3	166,6
NJ	116,5	106,2	80,4	203,1
NM	88,7	102,8	64,7	176,1

NV	142,0	114,2	93,5	206,6
NY	116,7	107,0	70,8	221,9
OH	127,6	100,4	111,4	165,9
OK	127,1	101,5	108,7	170,1
OR	119,5	102,3	92,2	190,3
PA	117,7	109,1	95,6	176,2
RI	132,8	100,9	92,6	224,5
SC	127,2	95,2	108,1	152,8
SD	106,6	97,1	97,2	168,0
TN	129,8	100,2	122,3	167,1
TX	115,1	107,4	73,1	198,2
UT	68,0	112,2	49,3	181,0
VA	134,0	91,6	105,4	166,7
VT	145,3	101,0	122,3	175,6
WA	96,2	129,5	65,5	239,1
WI	107,9	114,6	92,5	201,4
WV	112,8	108,9	115,6	166,5
WY	129,4	98,6	112,2	158,5

Необхідно:

1. Знайти еластичність споживання цигарок за ціною за кожен рік за допомогою побудови регресії, що виражається залежністю між обсягом споживання (y) та ціною (x). Інтерпретуйте коефіцієнти регресії. Чи змінилася еластичність за 10 років? Про що це може свідчити?

2. Перевірте дані на наявність кореляції між змінною x та залишком e . Застосуйте інструментальну змінну для знаходження параметрів регресії методом найменших квадратів. Порівняйте отримані коефіцієнти із знайденими в попередній регресії. Чи є відмінність між ними суттєвою? Яке це має значення для прийняття економічних рішень?

ТЕСТИ

- Причинами виникнення кореляції між x та залишками e є:
 - помилки вимірювання незалежних змінних;
 - побудова економетричної моделі за системою одночасних рівнянь;
 - наявність в економетричній моделі лагових змінних;
 - вірні відповіді а) та в);
 - усі відповіді вірні.
- Метод інструментальних змінних використовується для оцінки параметрів регресії при:
 - мультиколінеарності;
 - гетероскедастичності;
 - кореляції між незалежною змінною та залишками;
 - кореляції між залежною і незалежною змінною;
 - автокореляції залишків.
- Метод інструментальних змінних:
 - полягає у частковій заміні залежної змінної на значення незалежної;
 - полягає у частковій заміні непридатної пояснювальної змінної на змінну, що не корелює із залишками;
 - полягає у повній заміні непридатної пояснювальної змінної на іншу пояснювальну змінну;
 - усі відповіді вірні.
- Оператор оцінювання Вальда використовується для:
 - моделей, що містять більше однієї незалежної змінної;
 - моделей, що містять будь-яку кількість незалежних змінних;
 - моделей, що містять тільки одну незалежну змінну.
- Для розрахунку оператора оцінювання Вальда використовується:
 - мода ряду незалежних змінних;
 - середнє арифметичне ряду незалежних змінних;
 - математичне сподівання ряду незалежних змінних;
 - медіана ряду незалежних змінних;
 - будь-яка з наведених величин.
- Для розрахунку оператора Бартлета використовується:
 - ряд, що ділиться націло на 3;
 - ряд, що ділиться націло на 2;
 - ряд, що містить медіану;
 - ряд, що містить середнє арифметичне;
 - немає вірної відповіді.
- Оператор оцінювання Дарбіна використовується для:
 - моделей, що містять більше однієї незалежної змінної;
 - моделей, що містять будь-яку кількість незалежних змінних;
 - моделей, що містять тільки одну незалежну змінну.

8. У матричному вигляді оцінювання вектора B параметрів регресії за допомогою інструментальних змінних має вигляд:

а) $B = (Z^{-1}X)^T X^T Y$;

б) $B = (Z^T X)^{-1} X^T Y$;

в) $B = (Z^T X)^{-1} Z^T Y$;

г) $B = (Z^{-1}X)^T Y$;

д) $B = (Z^T X)^{-1} X^{-1} Y$.