

---

**Тема 6**  
**Задача дробово-лінійного програмування.**  
**Постановка задачі, методи розв'язання**

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 2 \leq 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 0 \leq 5; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 + 1 \leq 2; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 1 + 0 \leq 7; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 2 + 1 \leq 4; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 + 2 \leq 5; \\ \alpha_4 + \beta_1 = -2 + 2 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_2 = -2 + 1 \leq 0; \\ \alpha_4 + \beta_4 = -2 + 0 \leq 0. \end{cases}$$

Матриця  $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$  складає:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

від'ємних значень немає.

Оптимальний план знайдено.

Загальною задачею дробово-лінійного програмування називає задача знаходження максимального (мінімального) значення функції

$$z = \frac{\sum_{j=1}^n C_j x_j}{\sum_{j=1}^n d_j x_j} = \frac{z_1}{z_2}; j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

за умов функціональних обмежень

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i; i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

якщо:  $C_j; d_j; b_j; a_{ij}$  – постійні числа,

$$\sum_{j=1}^n d_j x_j > 0;$$

Таблиця 25		
Витрати часу на виготовлення пального		
Тип обладнання	Витрати часу на 1 т пального	
	Бензин (А)	Бензин (В)
I	2	8
II	1	1
III	12	3
Витрати на виробництво 1 т пального, у.г.о.	2	3

а також нефункціональних обмежень:

$$x_j \geq 0; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Зведення задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування здійснюється введенням позначення

$$y_0 = \left( \sum_{j=1}^n d_j x_j \right)^{-1}$$

та нових змінних

$$y_j = y_0 x_j; j = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Знаходиться максимум функції

$$z' = \sum_{j=1}^n C_j y_j; j = 1, 2, 3, \dots, n;$$

за умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0; i = 1, 2, 3, \dots, m;$$

$$\sum_{j=1}^n d_j y_j = 1; y_j \geq 0; y_0 \geq 0.$$

#### Приклад 19

Задача дробово-лінійного програмування. Виробництво двох різновидів пального (бензин "А" та бензин "В") здійснюється на трьох типах технологічного обладнання. Термін обробки на кожному з типів обладнання кожного з різновидів пального наданий у табл. 25.

Обладнання I та III типів підприємство може використовувати не більш як 26 та 39 годин. Обладнання типу II доцільно використовувати не менш ніж 4 години.

Потрібно визначити, скільки тонн кожного різновиду пального потрібно виготовити підприємству, щоб собівартість тонни пального була мінімальною.

#### Розв'язок задачі

Припустимо, що підприємство виготовляє  $x_1$  тонн бензину "А" та  $x_2$  тонн бензину "В". Загальні витрати на виробництво складають  $2x_1 + 3x_2$ , собівартість тонни пального складає

$$z = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}.$$

Обмеження на час використання обладнання складають

$$2x_1 + 8x_2 \leq 26; \quad (1)$$

$$x_1 + x_2 \geq 4; \quad (2)$$

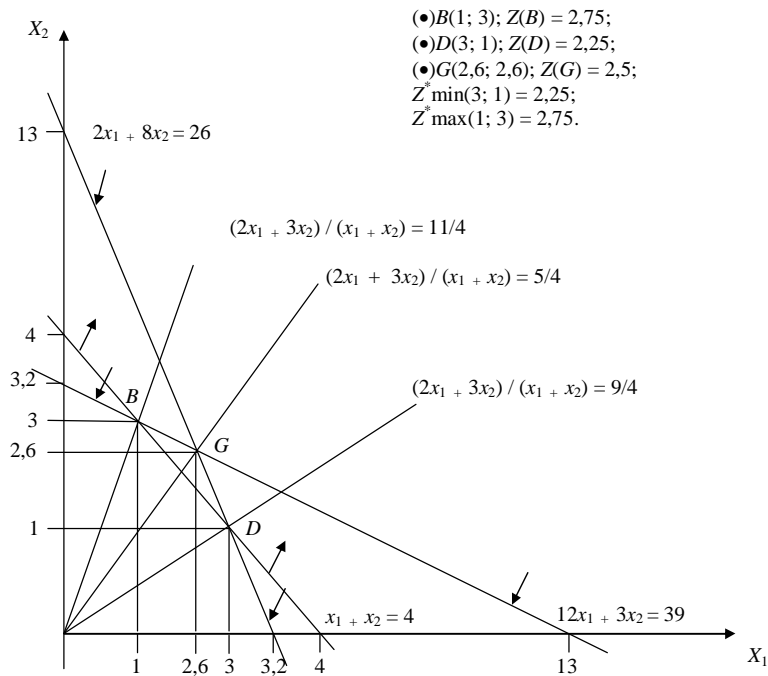
$$12x_1 + 3x_2 \leq 39. \quad (3)$$

Позначимо  $y_0 = (x_1 + x_2)^{-1}$  та введемо нові змінні

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2};$$

$$y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}.$$

Цільова функція набуває вигляду:



**Рис. 11. Графічний розв'язок задачі дробово-лінійного програмування**