Тема 5
Транспортна задача. Постановка, методи розв'язання та аналізу

Класична транспортна задача, яку вже розглядали раніше, полягає у пошуку оптимального плану перевезень однорідного вантажу з (m) пунктів відправлення A_1, A_2, …, A_m, у яких знаходиться відповідно a_1, $a_2,\ldots,a_m$ одиниць вантажу, у (n) пунктів призначення B_1, B_2, …, B_n, у кожний з яких потрібно завезти відповідно b_1, b_2, …, b_n. Вартість перевезення одиниць вантажу з пункту (A_i) відправлення у пункт (B_j) призначення відома і складає (C_{ij}).

Потрібно скласти такий план перевезень, при якому загальна вартість перевезень була б мінімальною, були б задоволені потреби споживачів.

Будемо вважати, що задача збалансована (закрита), тобто

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Незбалансована задача (відкрита) зводиться до збалансованої шляхом введення фіктивних постачальників або фіктивних споживачів у залежності від дефіциту потреб чи запасів. Вартість перевезень (відстань) від фіктивних постачальників або до фіктивних споживачів вважають рівною нулю.

Математична постановка транспортної задачі

Позначимо: x_{ij} – кількість одиниць вантажу, яку потрібно перевезти з пункту відправлення (A_i) до пункту призначення (B_j), щоб план перевезень був оптимальним.

Враховуючи вартість перевезень одиниці вантажу (C_{ij}), загальна вартість перевезення вантажу з пункту (A_i) до пункту (B_j) складає: $C_{ij} \cdot x_{ij}$. Загальна вартість перевезень всього вантажу складає:

$$z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij}; \to \min .$$

Система обмежень складається, виходячи з передумови, що загальна сума запасів, вивезених з (m) пунктів, дорівнює загальній сумі потреб у “j”-му пункті:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ \ n;$$

загальна кількість вантажу, вивезеного з “i”-го пункту, дорівнює наявності вантажу у “i”-му пункті:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, i = 1, \ 2, \ \ldots, \ \ m;$$

за умов, що кількість одиниць вантажу, вивезених з пункту (A_i) до пункту (B_j), невід’ємна:

$$x_{ij} \geq 0, i = 1, \ 2, \ \ldots, \ \ m; \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ \ n;$$

задача збалансована

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Математична постановка транспортної задачі полягає у знаходженні невід’ємних значень розв’язків системи рівнянь-обмежень, які забезпечують мінімальне значення лінійної форми

$$z(x_{ij}).$$

Умовою існування розв’язку транспортної задачі (наявності оптимального плану) є умова збалансованості транспортної задачі. Якщо усі (a_i) та (b_j) – цілі числа, тоді розв’язок транспортної задачі – оптимальний вектор, що має цілочисельні координати.

Ранг матриці системи функціональних обмежень транспортної задачі визначається за формулою

$$r = m + n - 1,$$

де: m – кількість пунктів відправлення; n – кількість пунктів споживання,

бо за умов виконання збалансованості транспортної задачі кількість лінійно незалежних рівнянь-обмежень на одне менше загальної кількості рівнянь. Таким чином, кількість базисних невідомих у транспортній задачі дорівнює завжди $m + n - 1$, а кількість вільних невідомих:

$$m \cdot n - (m + n - 1).$$

Отже, транспортна задача є задачею лінійного програмування у канонічній формі з деякими особливостями:

- Коефіцієнти при невідомих у всіх рівняннях-обмеженнях дорівнюють одиниці.
- Кожна невідома змінна зустрічається лише у двох функціональних рівняннях-обмеженнях; тому матриця коефіцієнтів при невідомих змінних (x_{ij}) побудована з одиниць та нулів; кожен стовпець матриці нараховує дві одиниці, а інші елементи – нулі.
- Система рівнянь-обмежень транспортної задачі симетрична відносно усіх змінних (x_{ij}).

Послідовність розв’язання транспортної задачі відповідає послідовності розв’язання звичайної задачі лінійного програмування:

1. Визначається опорний план (припустиме базисне рішення) транспортної задачі.
2. З’ясовується оптимальність опорного плану.
3. Здійснюється перехід від одного опорного плану до іншого, або завершується задача оптимізації.

Розглянемо послідовно розв’язання транспортної задачі на прикладі, який був наведений раніше.

Знаходження припустимого базисного рішення

Існує багато методів знаходження припустимого базисного рішення. Розглянемо два найпростіші.

Приклад 15

Метод північно-західного кута (діагональний метод)

Сутність методу полягає у тому, що, починаючи з якогось кута таблиці, заповнюють клітини таблиці, послідовно задовольняючи споживачів, а також вичерпуючи запаси постачальників. Розглянемо використання методу на прикладі (див. табл. 1). Задовольнимо потребу першого споживача (B_1) за рахунок першого постачальника (A_1), тобто відвеземо 30 одиниць вантажу; залишиться у першого постачальника 20 одиниць вантажу. Викреслимо перший стовпець. Якби не вистачило у першого постачальника вантажу, потребу першого замовника (споживача) задовольнили б за рахунок ще й другого постачальника, а викреслили б перший рядок. Залишок від першого постачальника передамо другому споживачу (B_2), але щоб його задовольнити (бо ресурси першого постачальника вже вичерпані), використаємо для споживача (B_2) 5 одиниць вантажу від другого постачальника (A_1); таким чином заповнимо всю таблицю (табл. 16). Як трапиться, що кількість заповнених (базисних) клітин буде меншою за ранг $m - n - 1$, так на-

Таблиця 16

Розв'язок задачі методом "північно-західного кута"

Перша ітерація:

	$\boldsymbol{B_1}$	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	**30**				~~50~~ 20
A_2					40
A_3					20
B_j	**30**	25	35	20	~~110~~ 80

Друга ітерація:

$\boldsymbol{A_1}$		**20**			**20**
A_2		**5**			~~40~~ 35
A_3					20
b_j		**25**	35	20	~~80~~ 55

Третя ітерація:

$\boldsymbol{A_2}$			**35**		**35**
A_3					20
b_j			**35**	20	~~55~~ 20

Четверта ітерація:

A_1	3 30	2 20	4	1 0	50
A_2	2	3 5	1 35	5	40
A_3	3	2	4	4 20	20
b_j	30	25	35	20	110

вмання обрані вільні клітини (вільні змінні) заповнюють нулями (умовні постачання), щоб кількість базових клітин дорівнювала $m - n - 1$.

Базисне припустиме рішення (опорний план) складає:

$$x_{11} = 30; x_{12} = 20; x_{14} = 0; x_{22} = 5; x_{23} = 35; x_{34} = 20;$$
$$z(x_{ij}) = 3 \cdot 30 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 35 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 20 = 260.$$

Метод найменшої відстані (найменшої вартості перевезень)

Метод характеризується послідовністю заповнення клітин таблиці – у першу чергу заповнюють клітини, де відстань (вартість) перевезень на кожному етапі є мінімальною. Розглянемо використання методу на попередньому прикладі. Найменша вартість перевезень у клітинах (A_1B_4) та (A_2B_3). Оберемо одну з них (A_1B_4), у яку запишемо 20 одиниць вантажу; у першого постачальника залишиться 30 одиниць вантажу, а четвертий замовник буде задоволений повністю. Викреслимо четвертий стовпчик. Здійснимо перевезення (A_2B_3) – 35 одиниць вантажу; у другого постачальника залишиться 5 одиниць; та викреслимо третій стовпчик. На наступному етапі здійснимо перевезення (A_3B_2) – 20 одиниць та (A_1B_2) – 5 одиниць вантажу і викреслимо другий стовпець. Можливості постачальника (A_3) використані повністю, тому викреслимо третій рядок. У постачальників (A_1) та (A_2) залишилось 25 та 5 одиниць відповідно. На останньому етапі здійснимо перевезення (A_1B_1) – 25 одиниць; (A_2B_1) – 5 одиниць і таким чином заповнимо всю таблицю (табл. 17):

Базисне припустиме рішення (опорний план) складає:

$$x_{11} = 25; x_{12} = 5; x_{14} = 20;$$
$$x_{21} = 5; x_{23} = 35; x_{34} = 20;$$
$$z(x_{ij}) = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 190;$$

$$190 < 260.$$

З'ясування оптимальності опорного плану

З цією метою розглянемо двоїсту задачу до транспортної задачі.

Таблиця 18

Розв'язок задачі методом найменшої відстані

Перша ітерація:

	B_1	B_2	B_3	$\boldsymbol{B_4}$	a_i
A_1				**20**	~~50~~ 30
A_2					40
A_3					20
b_j	30	25	35	**20**	~~110~~ 90

Друга ітерація:

A_1					30
A_2			**35**		~~40~~ 5
A_3					20
b_j	30	25	**35**		~~90~~ 55

Третя ітерація:

A_1		**5**			~~30~~ 25
A_2					5
$\boldsymbol{A_3}$		**20**			**20**
b_j	30	**25**			~~55~~ 30

Четверта ітерація:

A_1	3 25	2 5	4	1 20	50
A_2	2 5	3	1 35	5	40
A_3	3	2 20	4	4	20
b_j	30	25	35	20	110

Введемо двоїсті зміні

$$\alpha_1, \alpha_2, \ ..., \alpha_m; (i = 1,\ 2,\ ...,\ m)$$

до “m” перших обмежень задачі, а також

$$\beta_1, \beta_2, \ ..., \beta_n; (j = 1,\ 2,\ ...,\ n)$$

до “n” останніх обмежень задачі, які відповідають обмеженням на кількість вантажу, що постачається, A_1, A_2, …, A_m (i = 1, 2, ..., m) та вантажу, який споживається, B_1, B_2, …, B_n (j = 1, 2, …, n) відповідно. Нові введені змінні у двоїстій задачі до транспортної мають назву потенціалів, тому іноді і метод загалом має назву методу потенціалів. За правилом двоїстих задач система обмежень двоїстої до транспортної задачі має вигляд

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}, (i = 1,\ 2,\ ...,\ m;\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n);$$

де:

$$\alpha_i + \beta_j = C_{ij}$$

– для базисних клітинок;

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{ij}$$

Таблиця 18

Опорний план транспортної задачі

		$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 1$	a_i
		B_1	B_2	B_3	B_4	
$\alpha_1 = 0$	A_1	$C_{11} = 3$ $x_{11} = 30$	$C_{12} = 2$ − $x_{12} = 20$	$C_{13} = 4$ x_{13}	$C_{14} = 1$ + $x_{14} = 0$	50
$\alpha_2 = 1$	A_2	$C_{21} = 2$	$C_{22} = 3$ 5	$C_{23} = 1$ 35	$C_{24} = 5$	40
$\alpha_3 = 3$	A_3	$C_{31} = 3$	$C_{32} = 2$ + x_{32}	$C_{33} = 4$	$C_{34} = 4$ − 20	20
b_j		30	25	35	20	110

– для вільних клітинок (невідомих x_{ij}).

Цільова функція

$$\varphi(\alpha,\beta)=\sum_{1}^{m} a_i\alpha_i+\sum_{1}^{n} b_j\beta_j;\rightarrow \max .$$

Приклад 16

Для того, щоб опорний план був оптимальним, необхідно і достатньо, щоб обмеження двоїстої задачі виконувались як рівності. Повернемося до опорного плану прикладу транспортної задачі, отриманого діагональним методом (табл. 18).

Для базисних невідомих система обмежень двоїстої задачі має вигляд

$$\begin{cases}\alpha_1+\beta_1\le 3;\\ \alpha_1+\beta_2\le 2;\\ \alpha_1+\beta_4\le 1;\\ \alpha_2+\beta_2\le 3;\\ \alpha_2+\beta_3\le 1;\\ \alpha_3+\beta_4\le 4.\end{cases}$$

Ранг системи дорівнює (n + m – 1).

Загалом маємо 6 рівнянь та 7 невідомих. Одну з невідомих маємо взяти прізвище, наприклад, $\alpha_1 = 0$, тоді:

$$\beta_1=3;\ \beta_2=2;\ \beta_4=1;\ \alpha_2=1;\ \beta_3=0;\ \alpha_3=3.$$

Розрахуємо обмеження двоїстої задачі для вільних невідомих (вільних клітинок):

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_3 \le 4;\ 0 \le 4; \\ \alpha_2 + \beta_1 \le 2;\ 4 \le 2; \\ \alpha_2 + \beta_4 \le 5;\ 2 \le 5; \\ \alpha_3 + \beta_1 \le 3;\ 6 \le 3; \\ \alpha_3 + \beta_2 \le 2;\ 5 \le 2; \\ \alpha_3 + \beta_4 \le 4;\ 3 \le 4. \end{cases}$$

План не є оптимальним, тому що не виконуються умови – друга, четверта та п'ята.

Здійснення переходу від одного опорного плану до іншого. З метою переходу до нового опорного плану визначимо базисну змінну, яку потрібно перевести у вільну та, навпаки, вільну змінну, яку потрібно перевести у базисну. Вільну змінну знайдемо в одній з клітин, де порушується умова-обмеження: або (A_2B_1), або (A_3B_1), або (A_3B_2). Обе-

Таблиця 19

Другий опорний план транспортної задачі

β_j / α_i	β_1 = **3**	β_2 = **2**	β_3 = **0**	β_4 = **1**
α_1 = **0**	3 **-5** 30	2 **+5** 0	4	1 20
α_2 = **1**	2 **+5** x_{21}	3 **-5** 5	1 35	5
α_3 = **0**	3	2 20	4	4

ремо клітинку (A_3B_2). Вільну невідому змінну (x_{32}), яка дорівнювала нулю, потрібно збільшити і перевести у базисну. Це можливо зробити за рахунок зменшення до нуля (переведення у вільну змінну) будь-якої з базисних змінних. Але щоб рішення було припустимим (план – опорним) та ще й кращим за попереднє, необхідно не порушувати умови-обмеження основної (транспортної) задачі та підвищувати вільну змінну за рахунок базової, яка "коштує" більше (C_{ij} базової змінної повинно бути більше, ніж обраної вільної $C_{ij} \geq C_{32} = 2$). Коли підвищимо (x_{32}) за рахунок (x_{34}), то зменшимо вартість перевезень, бо ($C_{34} = 4$) > ($C_{32} = 2$). Умова-обмеження на наявність вантажу у третього постачальника не порушується, але порушені умови-обмеження у другого та четвертого споживачів. Щоб виконати ці умови, від базового значення невідомої (x_{12}) до базового значення невідомої (x_{14}) вздовж першого рядка передамо відповідну кількість вантажу, не порушуючи умови-обмеження на наявність вантажу у першого постачальника.

Невідомі змінні (x_{12}) та (x_{14}) залишаються базовими змінними, у той час як (x_{34}) перетворюється на вільну змінну ($x_{34} = 0$), та одночасно базовою змінною стає (x_{32}), яка була вільною. Умови-обмеження не

Таблиця 20

Оптимальне рішення

α_i \ β_j	$\beta_1 = 3$	$\beta_2 = 2$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 1$	a_i
$\alpha_1 = 0$	3 / 25	2 / 5	4	1 / 20	50
$\alpha_2 = -1$	2 / 5	3	1 / 35	5	40
$\alpha_3 = 0$	3	2 / 20	4	4	20
b_j	30	25	35	20	110

порушено, вартість перевезень зменшена, ітерація завершена, нове припустиме рішення має вигляд у табл. 19.

Нові значення потенціалів (α) та (β) знайдені з рівнянь-обмежень для нових базових змінних, враховуючи:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 \le 3; \\ \alpha_1 + \beta_2 \le 2; \\ \alpha_2 + \beta_2 \le 3; \\ \alpha_2 + \beta_3 \le 1; \\ \alpha_3 + \beta_2 \le 2; \\ \alpha_1 + \beta_4 \le 1, \end{cases}$$

що

$$\alpha_1 = 0;\ \beta_1 = 3;\ \beta_2 = 2;\ \alpha_2 = 1;\ \alpha_3 = 0;\ \beta_4 = 1.$$

Для вільної невідомої змінної (x_{21})

$$\left.\begin{array}{l} 1 + 3 \le 2; \\ \alpha_2 + \beta_{1j} \le C_{21} \end{array}\right\}$$

– не виконується умова, бо 4 > 2; і рішення не є оптимальним. Знов утворимо цикл перерахунку. Нове припустиме рішення має вигляд у табл. 20.

Для кожної вільної змінної (вільної клітини) виконується умова

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{ij},$$

тобто знайдено оптимальне рішення.

$$\varphi_{\min} = 3 \cdot 25 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 5 + 1 \cdot 35 + 2 \cdot 20 = 190.$$

Циклом перерахунку називається замкнена ламана лінія, яка починається у вільній клітині (вільній змінній), що перетворюється на базисну клітину (змінну); інші вершини ломаної лінії розміщені у базисних клітинах (одна з яких перетворюється на вільну). Відрізки ламаної лінії розташовані вздовж рядків та стовпців матриці перевезень. Жодні три сусідні вершини (базові змінні) не лежать на одній прямій. Вільній клітині (змінній) надається знак “ + ”, іншим за чергою – “–” та “ + ”. У зв’язку з тим, що у будь-якому рядку і стовпчику присутня однакова кількість додатних і від’ємних вершин циклу, зсув по циклу перерахункунку на постійне число перетворює один розв'язок системи обмежень транспортної задачі в інший розв'язок (інше припустиме рішення) тієї самої задачі. Зсув можливий не більш ніж на найменше базове значення, що є у циклі перерахунку.

Приклад 17

Таблиця 21

Незбалансована задача

Замовники / Постачальники	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	4	10	5	3	60
A_2	6	7	2	8	100
A_3	8	9	12	11	70
b_j	50	55	70	45	230 / 220

Розглянемо приклад розв'язання транспортної задачі, яка є незбалансованою (відкритою).

При виконанні однієї з умов

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j;$$

або

Таблиця 22

Опорний план

	Замовн. / Постач.	$\beta_1 = 4$	$\beta_2 = 5$	$\beta_3 = 0$	$\beta_4 = 3$	$\beta_5 = -4$	
		B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	a_i
$\alpha_1=0$	A_1	4 15	10	5	3 45	0	60
$\alpha_2=2$	A_2	6 30	7	2 70	8	0	100
$\alpha_3=4$	A_3	8 5	9 55	12	11	0 10	70
	b_j	50	55	70	45	10	230

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$$

маємо незбалансовану модель.

У першому випадку створюється фіктивний ($m + 1$) постачальник із запасами

$$a_{m+1} = \sum_{ji=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i,$$

усі тарифи на перевезення вважають нульовими:

$$C_{m+1},\ j = 0;\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

У другому випадку створюється фіктивний ($n + 1$) замовник з потребою

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

$$C_{i,\ n+1} = 0; i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ m.$$

Розглянемо конкретний приклад, дані якого наведені у табл. 21.

Введемо фіктивного замовника

$$b_5 = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{4} b_j = 230 - 220 = 10;$$

$$C_{i5} = 0; i = 1,\ 2,\ 3.$$

Опорний план задачі побудуємо у табл. 22 за методом мінімальної вартості.

Перевіримо опорний план на оптимальність методом потенціалів. Для базисних клітин ($m + n - 1$) = 3 + 5 – 1 = 7 побудуємо рівняння потенціалів:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 4; \ \ \beta_1 = 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 3; \ \ \beta_4 = 3; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 6; \ \ \alpha_2 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 2; \ \ \beta_3 = 0; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 8; \ \ \alpha_3 = 4; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 9; \ \ \beta_2 = 5; \\ \alpha_3 + \beta_5 = 0; \ \ \beta_5 = -4; \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Для всіх вільних клітин (вільних змінних) перевіримо нерівності

$$\alpha_i + \beta_j \le C_{ij};$$

$$i = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots, m;\ j = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Таблиця 23

Опорний план задачі

Замовники / Постачальники		$\beta_1 = 2$ **B**$_1$	$\beta_2 = 1$ **B**$_2$	$\beta_3 = 2$ **B**$_3$	$\beta_4 = 0$ **B**$_4$	a_i
$\alpha_1 = 0$	A_1	4	1 35	2 5	5	40
$\alpha_2 = 1$	A_2	3 + 20 10	2	3 − 40 50	7	60
$\alpha_3 = 2$	A_3	4 − 25 35	4	5	+ 2 65 55	90
$\alpha_4 = 0$	A_3	0	0	0 + 10	− 0 0 10	10
b_j		45	35	55	65	200

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 0 + 5 \le 10; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 0 + 0 \le 5; \\ \alpha_1 + \beta_5 = 0 + (-4) \le 0; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 2 + 5 \le 7; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 2 + 3 \le 8; \\ \alpha_2 + \beta_5 = 2 + (-4) \le 0; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 4 + 0 \le 12; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 4 + 3 \le 11. \end{cases}$$

Матриця $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ складає:

$$\begin{pmatrix} 0 & 5 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

і від'ємних значень немає.

Виконання умов-обмежень стосовно всіх вільних клітин (невідомих) дозволяє стверджувати, що план перевезень є оптимальним. Вартість перевезень становить:

$$z^*_{\min} = 4 \cdot 15 + 3 \cdot 45 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 70 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 55 + 0 \cdot 10 = 1050;$$

$$x^* = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 & 45 & 0 \\ 30 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 55 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix}.$$

Приклад 18

Розглянемо приклад створення циклу перерахування незбалансованої транспортної задачі. Опорний план задачі наданий у табл. 23.

Рівняння потенціалів для базисних клітин:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1; \ \beta_2 = 1; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2; \ \beta_3 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3; \ \beta_1 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3; \ \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 4; \ \alpha_3 = 2; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 2; \ \beta_4 = 0; \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Таблиця 24

Новий опорний план задачі

Постач. \ Замовн.		$\beta_1 = 2$	$\beta_2 = 1$	$\beta_3 = 2$	$\beta_4 = 0$	
		***B*₁**	***B*₂**	***B*₃**	***B*₄**	a_i
$\alpha_1 = 0$	***A*₁**	4	1 / 35	2 / 5	5	40
$\alpha_2 = 1$	***A*₂**	3 / 20	2	3 / 40	7	60
$\alpha_3 = 2$	***A*₃**	4 / 25	4	5	2 / 65	90
$\alpha_4 = 0$	***A*₄**	0	0	0 / 10	0	10
b_j		45	35	55	65	200

Для всіх вільних клітин рівняння потенціалів складає:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 = 0 + 2 \le 4; \\ \alpha_1 + \beta_4 = 0 + 0 \le 5; \\ \alpha_2 + \beta_2 = 1 + 1 \le 2; \\ \alpha_2 + \beta_4 = 1 + 0 \le 7; \\ \alpha_3 + \beta_2 = 2 + 1 \le 4; \\ \alpha_3 + \beta_3 = 2 + 2 \le 5; \\ \alpha_4 + \beta_1 = 0 + 2 \le 0; \\ \alpha_4 + \beta_2 = 0 + 1 \le 0; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0 + 2 \le 0. \end{cases}$$

Матриця $C_{ij} - \alpha_i - \beta_j$ складає:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

останній рядок матриці містить від'ємні значення.

Оберемо, наприклад, вільну клітину $i = 4$, $j = 3$, $C_{43} = -2$ і перетворимо вільну x_{43} на базисну шляхом створення циклу перерахунку. У клітину (4, 3) надамо знак (+) і створимо між цією клітиною та іншими базисними замкнений цикл перерахунку:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} (4,3) & \to & (2,3) & \to & (2,1) & \to & (3,1) & \to & (3,4) & \to & (4,4) & \to & (4,3), \\ (+) & & (-) & & (+) & & (-) & & (+) & & (-) & & (+) \end{array}$$

який зображений у таблиці.

Побудуємо нову (табл. 24), яка містить новий опорний план, та перевіримо його на оптимальність.

Перевіримо опорний план на оптимальність. Базисні клітини:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \beta_2 = 1; \ \beta_2 = 1; \\ \alpha_1 + \beta_3 = 2; \ \beta_3 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_1 = 3; \ \beta_1 = 2; \\ \alpha_2 + \beta_3 = 3; \ \alpha_2 = 1; \\ \alpha_3 + \beta_1 = 4; \ \alpha_3 = 2; \\ \alpha_3 + \beta_4 = 2; \ \beta_4 = 0; \\ \alpha_4 + \beta_3 = 0; \ \alpha_4 = -2; \\ \alpha_1 = 0. \end{cases}$$

Для всіх вільних клітин: