РОЗДІЛ 5

ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ І ЇХ ЕЛЕМЕНТИ. ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ 2-го І 4-го ПОРЯДКУ. ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ. ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З ОДНІЄЮ НАПРАВЛЯЮЧОЮ

Найбільш широке розповсюдження в техніці отримали поверхні обертання. Це пояснюється простотою їх виготовлення. Утворюються вони обертальним рухом навколо нерухомої прямої, так званою віссю поверхні.

Розглянемо приклад, коли твірна лінія – плоска крива і знаходиться в одній площині з віссю поверхні (рис. 102). У таких випадках твірна називається меридіаном.

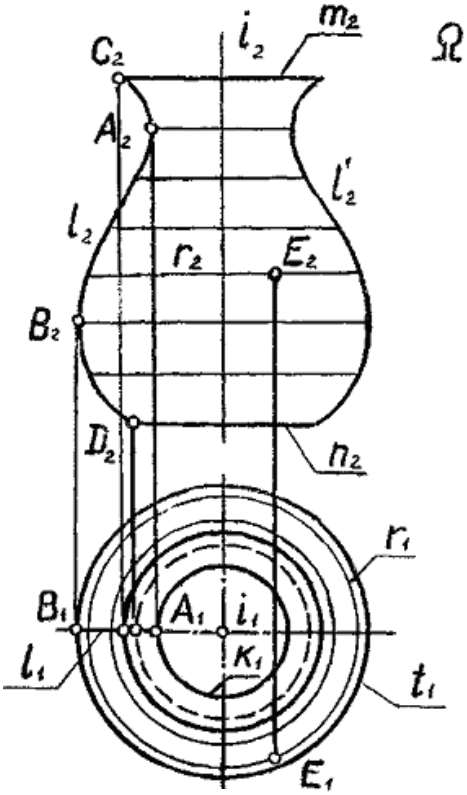

Рис. 102

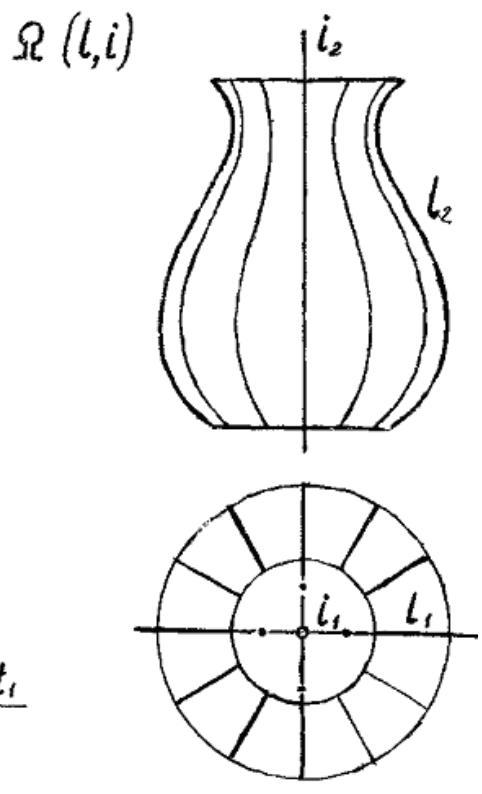

Рис. 103

Отже, віссю поверхні є горизонтально-проеціююча пряма ***i***, а твірною – плоска крива-меридіан ***l***. При повному повороті твірної ***l*** навколо осі ***i*** утвориться поверхня обертання **Ω**

загального виду.

Усі точки твірної кривої переміщаються при цьому по колах, що називаються паралелями.

Тому поверхню обертання **Ω** можна розглядати як суцільно заповнену сімейством кіл-паралелей. Згадаємо з попередньої лекції утворення поверхні конуса обертання (рис. 90, 91). Там мали справу з двома сімействами ліній, що утворюють неперервні каркаси поверхні.

І в розглянутому випадку поверхня обертання загального виду **Ω** має друге сімейство ліній – сімейство меридіанів (послідовні положення твірної кривої ***l***) – рис. 103.

При порівнянні рис. 102 і 103 неважко переконатися, що каркас кіл-паралелей має безсумнівну перевагу перед каркасом меридіанів. Він більш доступний для його зображення на комплексному рисунку. Тому будь-яку точку ***E*** на поверхні обертання **Ω** (та й узагалі на будь-якій поверхні обертання) звичайно задають за допомогою ліній першого каркаса, тобто кіл-паралелей. У даному випадку точка ***E*** задана за допомогою кола-паралелі ***r*** (рис. 102).

Мінімальне коло-паралель на поверхні обертання називається горлом поверхні, а максимальне – екватором. На рисунку ці кола утворюють обертові точки ***A*** і ***B*** кривої ***l***.

Отже, проекції заданої поверхні обертання загального виду **Ω** складаються з наступних елементів (рис. 102):

а) проекцій контурів (у фронтальній проекції – головний меридіан l_2 і $1_2'$, а в горизонтальній проекції – екватор t_1 і горло K_1);

б) проекцій ліній відсічення – кіл ***m*** і ***n.*** Їх утворять обертові точки ***C*** і ***D*** кривої ***l***.

ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ 2-го і 4-го ПОРЯДКУ

Розглянемо поверхні, утворені обертанням кривих другого порядку навколо їх осей (рис. 104-107).

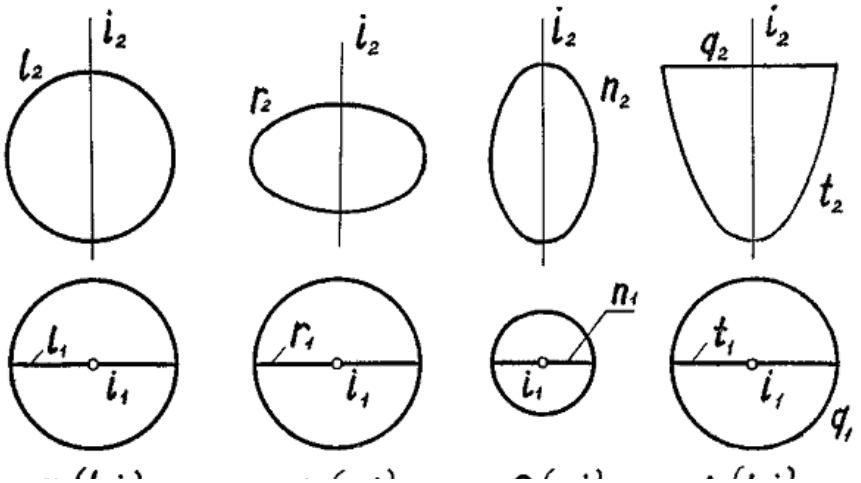

Рис. 104 **Рис. 105** **Рис. 106** **Рис. 107**

Рис. 104 Рис. 105 Рис. 106 Рис. 107

При обертанні кола ***l*** навколо її осі (діаметра) утвориться поверхня сфери **Г** (рис. 104).

При обертанні еліпса ***r*** навколо його малої осі утвориться поверхня стиснутого еліпсоїда **Δ** (рис. 105).

При обертанні еліпса ***n*** навколо його великої осі утвориться поверхня витягнутого еліпсоїда **Θ** (рис. 106).

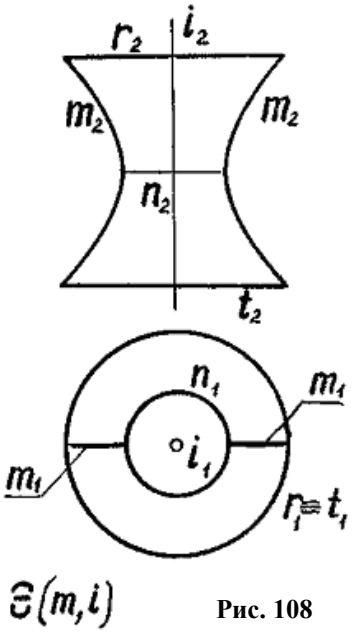

Рис. 108

При обертанні параболи ***t*** навколо її осі утвориться поверхня параболоїда обертання **Λ** (рис. 107).

При обертанні гіперболи ***m*** навколо її мнимої осі ***i*** утвориться поверхня однопорожнинного гіперболоїда обертання **Ξ** (рис. 108).

Поверхню двопорожнинного гіперболоїда обертання, утвореного обертанням гіперболи навколо її дійсної осі, ми розглядати не будемо.

Отже, розглянуті поверхні обертання є поверхнями другого порядку, тому що аналітично вони задаються рівняннями другого порядку. Графічно порядок поверхні визначається максимальним числом точок перетинання довільної прямої лінії з кожної з цих поверхонь. Це число дорівнює 2.

Поверхні сфери й еліпсоїдів (рис. 104-106) є замкнутими і тому зображені цілком, тобто тільки проекціями своїх контурів.

Поверхні параболоїда й однопорожнинного гіперболоїда (рис. 107-108) – незамкнуті поверхні і представлені вони своїми відсіками. Кола ***q***, ***r*** і ***t*** є лініями відсікання цих поверхонь. Коло ***n*** – горло гіперболоїда.

Слід також зазначити, що меридіанами даних поверхонь є самі твірні – криві другого порядку.

Розглянемо ще одну поверхню, утворену обертанням кола навколо осі, розташованого в одній площині з колом, але не співпадаючого з його діаметром.

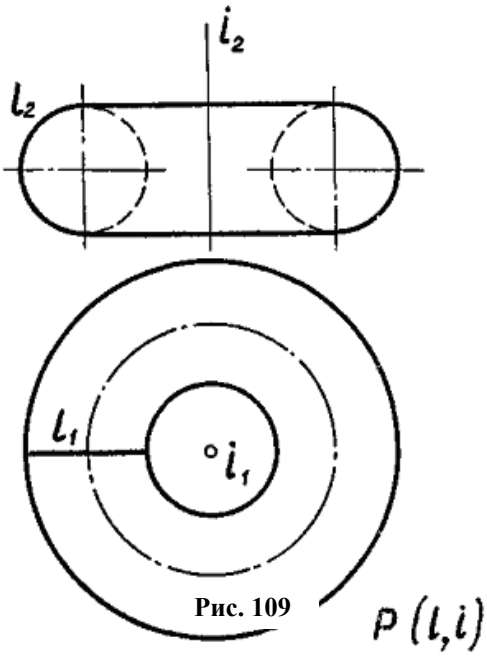

Рис. 109

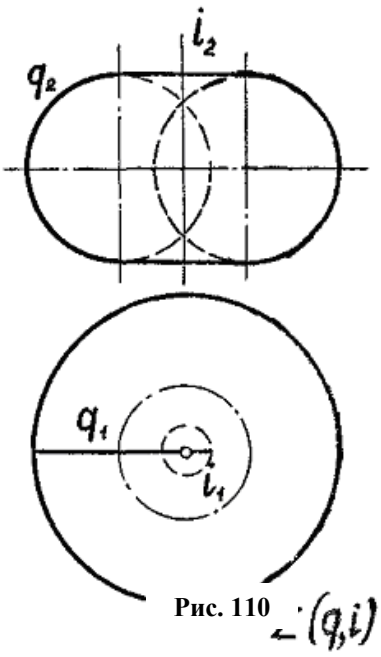

Рис. 110

Рис. 109

Рис. 110

На рис. 109 вісь обертання ***i*** не має загальних точок з твірним колом ***l*** (тобто не дотикається до нього і не перетинає). При обертанні кола ***l*** утворюється поверхня відкритого тора ***P*** (або кругове кільце).

Якщо ж вісь ***i*** дотична до твірної кола або перетинає його (рис. 110), то утвориться поверхня закритого тора **S**.

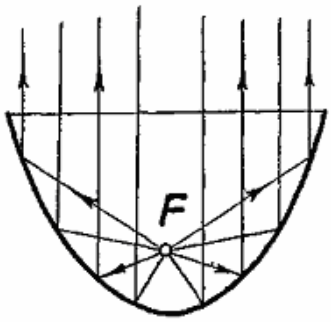

Рис. 111

Ці поверхні обертання мають четвертий порядок, тому що з довільною прямою лінією вони перетинаються максимум у чотирьох точках. Торові поверхні – замкнуті і можуть бути зображені цілком, тобто тільки проекціями своїх контурів.

Усі розглянуті поверхні обертання мають широке застосування в техніці. Особливо варто зупинитися на поверхні параболоїда обертання.

Якщо помістити джерело світла у фокусі ***F*** цієї поверхні (рис. 111), то відбиті від поверхні промені утворять прямолінійний пучок. І навпаки, приймаючи прямолінійний пучок променів, поверхня параболоїда концентрує їх в одній точці – фокусі ***F.***

Цю чудову особливість параболоїда обертання використовують при конструюванні рефлекторів прожекторів і радіотелескопів.

Рекомендується самостійно задати по одній точці на кожній з розглянутих поверхонь обертання (рис. 104-110). При цьому прийдеться вирішувати наступне питання: лініями якого каркаса зручніше користуватися для побудови точки – каркаса меридіанів чи каркаса кіл-паралелей. Визначити видимість заданих точок.

ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ ОБЕРТАННЯ

Поверхні, утворені рухом прямої лінії, називаються лінійчатими. Найпростіша лінійчата поверхня – площина.

Розглянемо лінійчаті поверхні, отримані обертанням прямої лінії. В залежності від положення твірної стосовно осі обертання виходить три види поверхонь.

На рис. 112 твірна пряма лінія ***l*** перетинає вісь ***i*** у точці ***S***. При обертанні цієї прямої утвориться лінійчата конічна поверхня обертання **Т.** Вона має незамкнуті дві гілки, розташовані по обидві сторони від вершини ***S.*** Точки ***A*** і ***B*** належать лініям відсічення.

На рис. 113 твірна пряма ***q*** паралельна осі ***i***. При обертанні цієї прямої утвориться лінійчата циліндрична поверхня обертання **Ф**. Вона також є незамкнутою поверхнею, і точки ***C*** і ***D*** належать лініям відсікання.

Рис. 112 **Рис. 113**

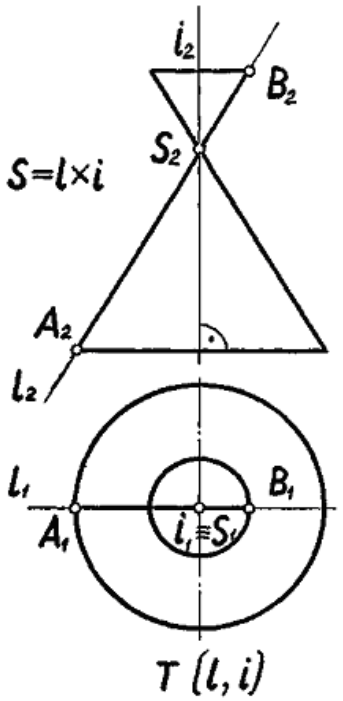

Рис. 112

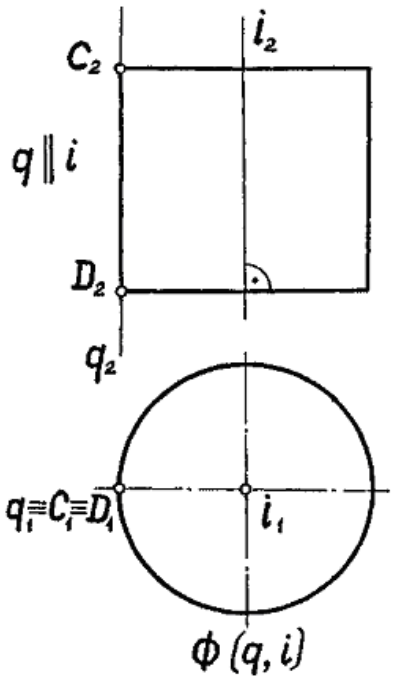

Рис. 113

На рис. 114 твірна пряма ***r*** мимобіжна осі ***i***. При обертанні цієї прямої навколо осі ***i*** утвориться вже знайома поверхня – однопорожнинний гіперболоїд обертання **Ψ**. Точки ***E*** і ***F*** утворять при обертанні лінії відсіка[illegible] ближча до осі ***i*** точка ***H*** утворить мінімальне коло-паралель, тобто горло поверхні.

Рис. 114

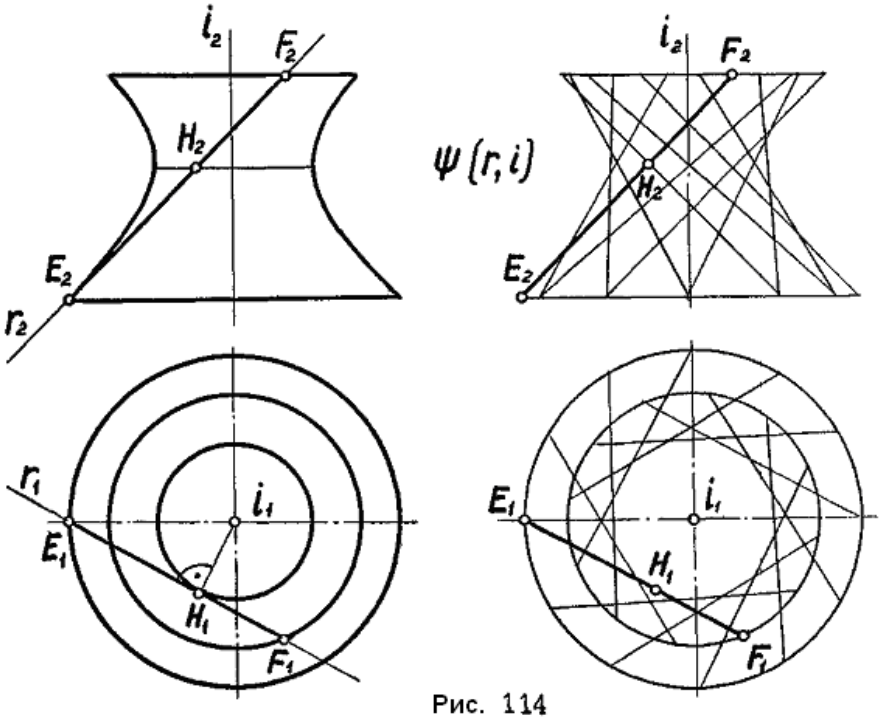

Рис. 114

Таким чином, сімейство прямолінійних твірних, що суцільно заповнюють поверхню гіперболоїда, є його третім неперервним каркасом (після каркаса кіл-паралелей і каркаса меридіанів).

Цей лінійчатий каркас блискуче застосував у сталевій конструкції знаменитої

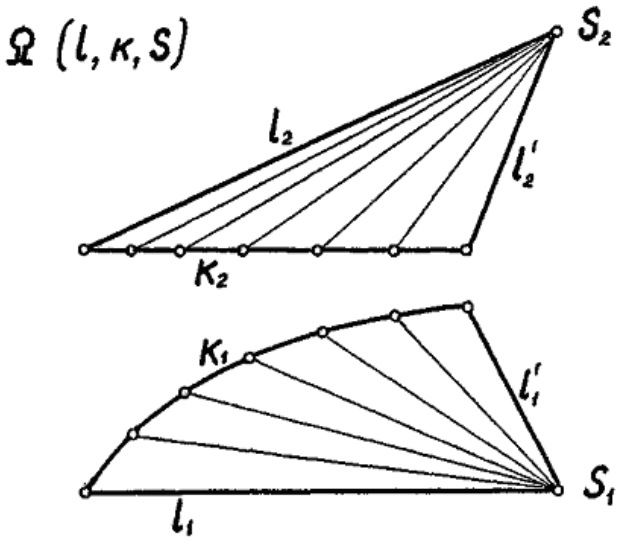

Рис. 115

радіощогли на Шаболовці в Москві відомий радянський інженер Шухов.

У Миколаєві, у районі старого автовокзалу, піднімається сталева конструкція водонапірної башти, при будівництві якої також використаний лінійчатий каркас однопорожнинного гіперболоїда. Ця чудова особливість лінійчатої поверхні використовується в будівельних конструкціях маяків і різних опор.

Рекомендується самостійно задати на кожній з розглянутих поверхонь (рис. 112-114) по одній точці і пояснити, чому для циліндричної поверхні **Ф** можна не користуватися лініями каркасів, для конічної поверхні **Т** зручні лінії обох каркасів, а для гіперболоїда **Ψ** зручні лінії тільки одного каркаса, і якого саме. Визначити видимість заданих точок.

ЛІНІЙЧАТІ ПОВЕРХНІ З ОДНІЄЇ НАПРАВЛЯЮЧОЇ

При утворенні найпростішої лінійчатої поверхні – площини направляючої слугувала пряма лінія (лекція 3). Якщо в якості направляючої взяти довільну криву лінію, то твірна пряма, переміщаючись по цій кривій, утворить криволінійну поверхню.

На рис. 115 лінійчата поверхня **Ω** утворена прямою лінією, що проходить через нерухому точку ***S*** і переміщається по направляючій кривій лінії ***K***.

Ця лінійчата поверхня називається конічною поверхнею загального виду. Точка ***S*** є вершиною поверхні.

Конічна поверхня відноситься до незамкнутих поверхонь. На рисунку показаний її відсік, обмежений крайніми положеннями ***l*** і ***l′*** твірної, направляючої ***K*** і вершиною ***S.*** Для кращого сприйняття поверхні на неї іноді наноситься кілька ліній каркаса. Звичайно тут користуються тільки прямолінійним каркасом.

Рис. 116

Рис. 117

Якщо ляючу криву взяти коло ***t***, то в загальному випадку утвориться поверхня еліптичного конуса (рис. 116).

Площина **Ф,** перпендикулярна осі ***SO*** такого конуса, перетинає його поверхню по еліпсу (звідси і назва – “еліптичний”).

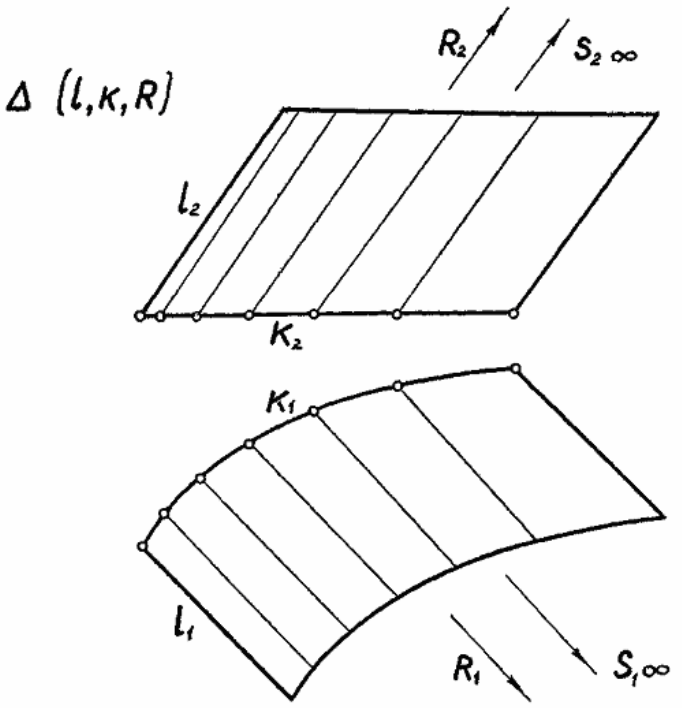

Рис. 118

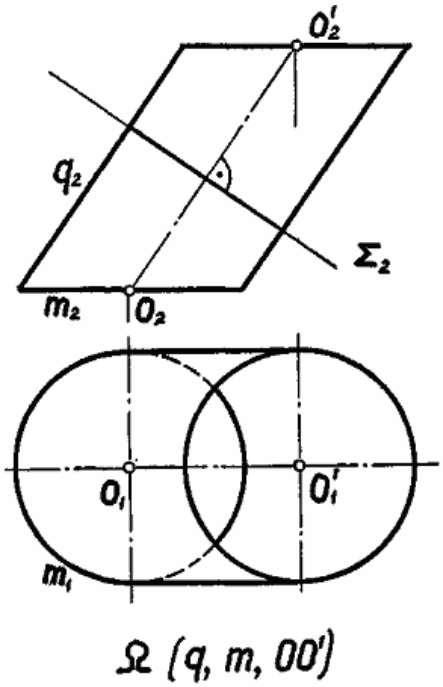

Рис. 119

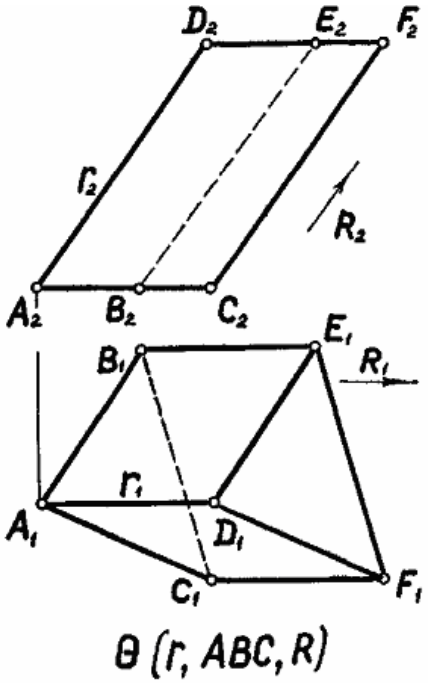

Рис. 120

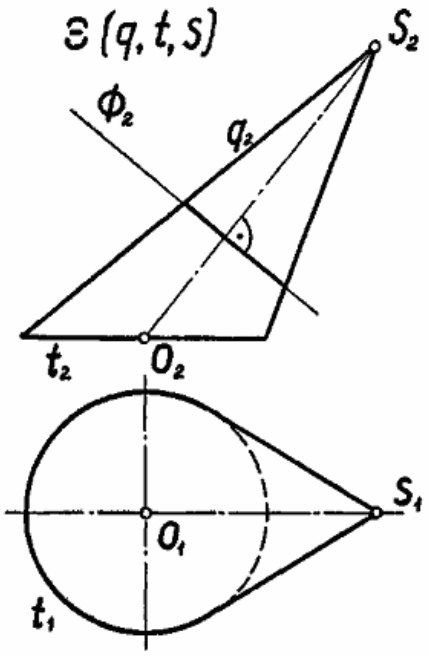

Рис. 116

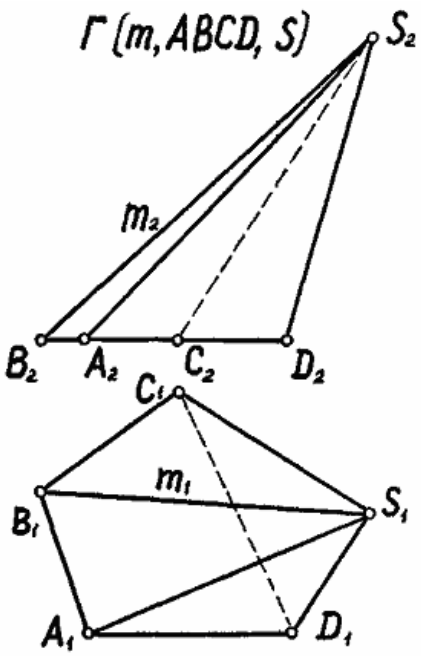

Рис. 117

Якщо криву напрямну замінити ламаною лінією (нехай це буде плоский чотирикутник ***ABCD***), утвориться гранна поверхня **Г** (рис. 117). Складається з відсіків площин – граней, що, перетинаючись між собою, утворять ребра ***SA, SB, SC, SD***). Точка ***S*** – вершина поверхні.

У даному випадку гранна поверхня **Г** називається пірамідальною. Відноситься до незамкнутих поверхонь, і на рисунку показаний її відсік, обмежений направляючим чотирикутником ***ABCD*** і вершиною ***S***.

Чотирикутник ***ABCD*** можна вважати лінією відсікання. Але іноді його розглядають як плоску грань-основу. Тоді перед нами геометричне тіло – багатогранник, обмежений з усіх боків площинами. У даному випадку багатогранник ***SABCD*** є пірамідою. Елементами багатогранника є: вершини (їх тут 5), ребра (8) і грані (5).

Сукупність усіх ребер багатогранника називають його сіткою. На рис. 117 піраміда ***SABCD*** задана своєю сіткою.

Тепер повернемося до рис. 115 і представимо, що вершина ***S*** поверхні вилучена в нескінченність за напрямком ***R.*** Тоді твірна ***l*** у всіх своїх положеннях утворить неперервний каркас з паралельних прямих ліній (рис. 118).

Ця лінійчата поверхня **Δ** називається циліндричною поверхнею загального виду. Також є незамкнутою поверхнею, і на рисунку показаний її відсік.

Якщо як направляючу криву взяти коло ***m***, то в загальному випадку утвориться поверхня еліптичного циліндра (рис. 119). Площина **S**, перпендикулярна осі ***OO′*** такого циліндра, перетинає його поверхню по еліпсу.

Якщо криву напрямляючу ***K*** замінити ламаною лінією (наприклад, трикутником ***ABC***), то утвориться гранна поверхня **Θ**, що у даному випадку називається призматичною поверхнею (рис. 120).

Поверхня ця також незамкнута, і на рисунку показаний її відсік, обмежений лініями відсікання, що розташовані в паралельних площинах рівня.

Якщо ж трикутники ***ABC*** і ***DEF*** розглядати як плоскі грані – основи, то перед нами