3.4. Системне застосування методів статистичного оцінювання

У практиці обробки даних, отриманих за допомогою проведення вимірів або спостережень, широко використовуються середні величини (вибіркове середнє, зважене середнє й ін.), що мають стійкість і здатні характеризувати різні сукупності даних. Однак необхідно вказати на той факт, що середні величини можуть характеризувати тільки однорідну сукупність даних, і якщо така середня отримана на якісно неоднорідному матеріалі або обрана неправильно, без обліку специфіки явища, що характеризується, або процесу, вона виявиться фіктивною.

Тому в таких умовах доцільно використовувати середні оцінки, стійкі до проявів неоднорідностей, джерелами яких може служити поява так званих "підозрілих" значень або таких, що "різко виділяються" у загальній сукупності досліджуваних даних.

Даній проблемі присвячено ряд робіт [16; 18; 28], у яких розглянуті різні середні оцінки, побудовані на основі одного з розділів непараметричної статистики, що одержав назву "порядкові статистики". Формування таких статистик виробляється за допомогою перетворення вихідного ряду даних виду $x_1, x_2, x_3, x_4,..., x_i,..., x_n$ (які можуть являти собою експертні висловлення, наприклад, в інтервальних шкалах), у варіаційний (ранжований) ряд виду $x_{(1)}$ ³ $x_{(2)}$ ³ ... ³ $x_{(i)}$ ³. ... ³ $x_{(n)}$ або $x_{(1)} \le x_{(2)} \le x_{(i)} \le x_{(n)}$.

Попередньо розглянемо техніку обчислення трьох груп оцінок за значеннями варіаційного ряду.

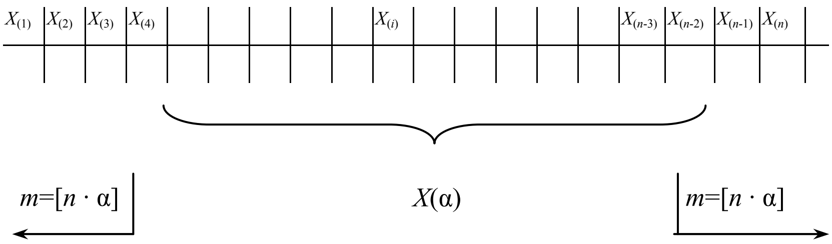
Оцінки на основі зважених порядкових статистик:

– Усічене середнє рівня α(0≤α≤0,5)

$$\mathrm{X}(\alpha) = \frac{1}{n-2m}\sum_{i=m+1}^{n-m} x_{(i)}, \qquad (3.20)$$

$m = [\alpha \cdot n]$ – рівень усікання, що являє собою найбільше ціле число, не переважаюче $\alpha \cdot n$, n – обсяг вибірки даних, α – константа усікання, значення якої можуть бути представлені у вигляді сітки значень α: 0,05; 0,1; 0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,35; 0,4; 0,45; 0,5.

Дана оцінка обчислюється за наступною схемою:



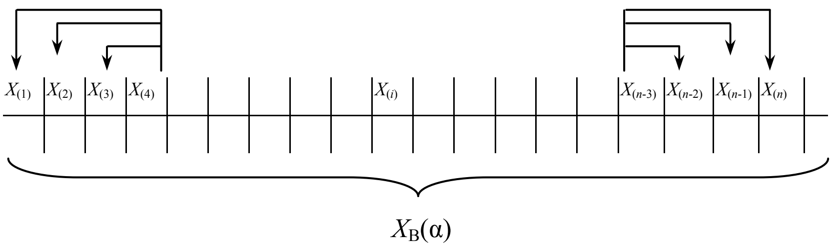
З обох кінців ряду віддаляється по [$\alpha \cdot n$] значень і середнє береться по частині ряду, яка залишилася.

– Середнє по Вінзору

$$X_{\text{В}}(\alpha) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=m+2}^{n=m-1} x_{(i)} + m\left(x_{(m+1)} + x_{(n-m)}\right)\right). \tag{3.21}$$

Обчисленню даної оцінки відповідає заміна [$\alpha \cdot n$] крайніх лівих спостережень (значень) ряду на $X_{(\alpha \cdot n+1)}$ і [$\alpha \cdot n$] крайніх правих спостережень на $X_{(n-\alpha n)}$ з наступним обчисленням середньої модифікованої вибірки, що вийшла, при наступному рівні:

$$(0 \le \alpha \le 0{,}5). \tag{3.22}$$



Ідея, що стоїть за такою послідовністю дій, полягає в тому, щоб, не "відкидаючи" зовсім $[\alpha \cdot n]$ крайніх правих значень, як при обчисленні $X(\alpha)$, лише скоротити їх вплив на значення більш помірної порядкової статистики.

– Вибіркова медіана

$$X_{Med} = \begin{cases} x_{\left(n+1/2\right)}, \text{ якщо } n - \text{непарне}; \\ \dfrac{1}{2}\left[x_{\left(n/2\right)} + x_{\left(n/2\right)+1} \right], \text{ якщо } n - \text{парне}. \end{cases} \qquad (3.23)$$

Використання перерахованих оцінок виробляється в процесі виконання ітераційної процедури, що складається з наступних кроків:

1-й крок. Перевіряється виконання наступної умови:

$$\begin{cases} \left| \bar{x} - x(\alpha_1) \right| \le \delta; \\ \left| \bar{x} - x_B(\alpha_1) \right| \le \delta; \\ \left| \bar{x} - x_{Med} \right| \le \delta. \end{cases} \qquad (3.24)$$

де $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ – середнє по всьому ряду, а $\delta \ge 0$ – досить мала величина, що не перешкоджає встановленню знака рівності між значеннями отриманих оцінок (покладемо $\delta \ge 0{,}05$). Величина α_1 задається як одне із значень, узяте з вищевказаної сітки. При виконанні умови (3.24) робиться висновок про те, що вибірка однорідна. При невиконанні хоча б одного з елементів умови (3.24) робиться висновок про те, що у вибірці даних маються так звані “підозрілі” або “дані, які різко виділяються”, що є ознакою появи неоднорідностей.

2-й крок. Для ідентифікації таких даних оцінка $\overline{x}$ виводиться з розгляду і виконується наступна перевірка:

$$\begin{cases} \left| x(\alpha_1) - x(\alpha_2) \right| \le \delta; \\ \left| x(\alpha_1) - x_{\text{B}}(\alpha_2) \right| \le \delta; \\ \left| x(\alpha_1) - x_{Med} \right| \le \delta. \end{cases} \tag{3.25}$$

Виконання умови (3.25) говорить про те, що після чергового усікання ряду за рівнем α_2, що залишилася, частина його є однорідною. Якщо дані умови не виконуються, то це свідчить про те, що рівень усікання $[\alpha \cdot n]$ недостатній, щоб виділити всі “лишні” значення ряду.

3-й крок. У тому випадку задається чергова константа усікання α_3 і процедура повторюється аналогічно (3.24) і (3.25). Процес такого аналізу ряду закінчується при досягненні величини $\alpha = 0{,}5$, що відповідає вибірковій медіані x_{Med}.

Необхідно відзначити, що медіана є найбільш стійкою з усіх розглянутих оцінок і витримує рівні усікання, аж до $\alpha \le 0{,}5$.

Рекурентні процедури стійкого оцінювання. Дані процедури засновані на такому перетворенні варіаційного (ранжованого) ряду, при якому виділяється його стійка частина, обумовлена мінімальним значенням дисперсії або середньоквадратним відхиленням σ.

Розглянемо два види рекурентного оцінювання:
“пропускаючі” (skipped estimates) і “ті, що складаються” (folded estimates) оцінки [28]:

– Перша процедура складається у виборі деяких опорних крапок h_1 і h_2, що являють собою квантили (квартили, децили) ряду. Після цього для частини вибірки, що залишилася, підраховуються значення вибіркового середнього і вибіркової дисперсії за формулами:

$$\overline{X} = \frac{1}{n-2h} \sum_{i=h_1+1}^{h_2} x_{(i)}; \qquad \sigma^2 = \frac{1}{n-2h-1} \sum_{i=h_1+1}^{h_2} (x_i - \overline{x})^2. \tag{3.26}$$

Надалі описана процедура повторюється доти, поки з первісного ряду не виділиться стійка частина з мінімальною величиною дисперсії. Формалізуємо це у вигляді наступної розбивки ряду:

$$X = \begin{cases} \left[x_{(1)}, x_{(h_1)}\right], \left[x_{(h_1+1)}, x_{h_2}\right], \left[x_{(h_2+1)}, x_{(n)}\right] .., \sigma_1^2 < \sigma_0^2 \\ \left[x_{(1)}, x_{(h_3)}\right], \left[x_{(h_3+1)}, x_{(h_4)}\right], \left[x_{(h_4+1)}, x_{(n)}\right] .., \sigma_2^2 < \sigma_1^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[x_{(1)}, x_{(h_m)}\right], \left[x_{(h_m+1)}, x_{(h_{k*m})}\right], \left[x_{(h_{k+1})}, x_{(n)}\right], \sigma_k^2 \to \min. \end{cases} \tag{3.27}$$

Тут σ_0 – дисперсія вихідного ряду.

– Процедури другого типу засновані на перетворенні ряду, що зменшують його обсяг. Для цього від вихідного ряду $x_{(1)},..., x_{(n)}$ переходять до нового з наступним набором даних:

$$\begin{cases} \dfrac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}, \dfrac{x_{(2)} + x_{(n-1)}}{2}, ..., \dfrac{x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}}{2}, \text{якщо } n - \text{парне;} \\ \dfrac{x_{(1)} + x_{(n)}}{2}, \dfrac{x_{(2)} + x_{(n-1)}}{2}, ..., x_{(n/2)}, \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases} \tag{3.28}$$

Така операція “складання” виконується кілька разів з перевіркою на кожному кроці величини дисперсії σ^2. За аналогією з першою процедурою стійка частина вибірки також буде визначатися мінімальною величиною σ^2. Представимо описану процедуру в наступному вигляді:

$$x = \begin{cases} \left[x_{(1)}^{(1)}, x_{(m)}^{(1)}\right], \sigma_1^2 < \sigma_0^2 \\ \left[x_{(1)}^{(2)}, x_{(k)}^{(2)}\right], \sigma_2^2 < \sigma_1^2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \left[x_{(1)}^{(d)}, x_{(l)}^{(d)}\right], \sigma_n^2 \to \min. \end{cases} \tag{3.29}$$

Оцінки на основі використання коефіцієнтів асиметрії (As) і ексцесу (Ex)

Такі оцінки будуються з використанням усічених аналогів коефіцієнтів асиметрії (As^*) і ексцесу (Ex^*):

$$As^* = \frac{\left[M(0{,}05) - L(0{,}05)\right]}{\left[M(0{,}5) - L(0{,}5)\right]}, \qquad Ex^* = \frac{\left[M(0{,}02) - L(0{,}02)\right]}{\left[M(0{,}5) - L(0{,}5)\right]}. \tag{3.30}$$

Тут $M(0{,}02)$, $M(0{,}05)$, $M(0{,}5)$ – середнє $[\alpha \cdot n]$ старших членів ранжованого ряду з константами усікання $\alpha_1 = 0{,}02$; $\alpha_2 = 0{,}05$; $\alpha_3 = 0{,}5$. $L(0{,}02)$, $L(0{,}05)$, $L(0{,}5)$ – середнє $[\alpha \cdot n]$ молодших членів ранжованого ряду з тими ж значеннями α.

У залежності від отриманих величин As^* і Ex^* можна реалізувати дві адаптивні процедури побудови і вибору усічених середніх з різними значеннями α.

Маємо:
$$X_{(As^*)} = \begin{cases} x^0\left(\frac{1}{4}\right) \ldots \text{якщо} \ldots As^* < 2{,}0; \\ x(0) \ldots \text{якщо} \ldots 2{,}0 \le As^* \le 4{,}0; \\ x\left(\frac{1}{4}\right) \ldots \text{якщо} \ldots 4{,}0 < As^* \le 5{,}5; \\ x\left(\frac{1}{2}\right) \ldots \text{якщо} \ldots As^* > 5{,}5. \end{cases} \tag{3.31}$$

Тут $x^0\left(\frac{1}{4}\right)$ – середнє $[\alpha \cdot n]$ найбільших і $[\alpha \cdot n]$ найменших членів ранжованого ряду; $x(0)$ – вибіркове середнє по всьому ряду; $x\left(\frac{1}{4}\right)$ – – середнє внутрішніх членів ряду; $x\left(\frac{1}{2}\right)$ – вибіркова медіана.

$$X_{(Ex^*)} = \begin{cases} x\left(\frac{1}{8}\right) \ldots \text{якщо} \ldots Ex^* < 1{,}81; \\ x\left(\frac{1}{6}\right) \ldots \text{якщо} \ldots 1{,}81 \le Ex^* \le 1{,}87; \\ x\left(\frac{3}{8}\right) \ldots \text{якщо} \ldots Ex^* > 1{,}87. \end{cases} \tag{3.32}$$

Тут $x\left(\frac{1}{8}\right)$, $x\left(\frac{1}{6}\right)$, і $x\left(\frac{3}{8}\right)$ – усічене середнє з константами усікання, рівними, відповідно: $\alpha_1 = 0{,}125$; $\alpha_2 = 0{,}25$; $\alpha_3 = 0{,}375$.

Системне застосування розглянутих оцінок трьох груп повинне ґрунтуватися на використанні визначених критеріїв, у якості яких можна розглянути незміщеність і ефективність оцінок.

Критерій незміщеності оцінок визначається як різниця між математичним очікуванням (E) ряду оцінок $\hat{x}_i$ і дійсним значенням оцінюваного параметра θ, тобто

$$D(x_1) = E(x_1) - \theta, \tag{3.33}$$

де D – величина зсуву x_1 оцінки; θ – оцінюваний параметр, наприклад, центральне значення вибірки даних.

Даний критерій гарантує одержання незміщеної оцінки θ, однак не враховує величину її розсіювання.

Для аналізу цього явища доцільно використовувати критерій ефективності, що націлений на вибір оцінки з найменшою дисперсією, тобто найбільш ефективної. Можна зробити, що оцінка $\hat{x}_i$ більш ефективна, ніж оцінка $\hat{x}_i$, якщо для всіх θ дотримується умова

$$E\left[(x_i-\theta)^2\right]<E\left[(x_j-\theta)^2\right]. \tag{3.34}$$

Перетворюючи цей вираз, одержимо

$$E\left[(x_i-E(x_i))^2\right]+\left[D(x_i)\right]^2 \prec E\left[(x_j-E(x_j))^2\right]+\left[D(x_j)\right]^2. \tag{3.35}$$

Нерівність (3.35) показує, що оцінка x_i більш ефективна, ніж оцінка експерта x_j, якщо відхилення від її значення плюс квадрат зсуву менше, ніж та ж величина x_j.

Дані міркування покладені в основу схеми системного представлення і вибору розглянутих вище оцінок (рис. 3.6). Тут як додаткові критерії вибору оцінок розглядаються асиметрія й ексцес.

У табл. 3.3-3.6 представлені результати чисельних досліджень розглянутих оцінок, для чого були використані чотири види вибірок даних: вибірка однорідних даних (табл. 3.3); вибірка даних з наявністю "підозрілих" значень (табл. 3.4); вибірка даних, до складу якої були введені "різковиділені" значення (табл. 3.5), і комбінована вибірка даних, у якій присутні вищевказані дані обох типів (табл. 3.6). З розгляду зазначених таблиць видно, що оцінка вибіркового середнього $\bar{X}$ і значення всієї сукупності запропонованих оцінок, отриманих по вибірці однорідних даних, практично збігаються ($\bar{x}_1=4{,}92$, а діапазон зміни стійких оцінок лежить у межах від 4,58 до 5,0).

Поява в складі аналізованих вибірок неоднорідних даних (табл. 3.4, 3.5) приводить до великого зсуву величини $\bar{X}$ ($\bar{x}_2=7{,}68$; $\bar{x}_3=13{,}08$; $\bar{x}_4=14{,}12$). У той же час запропоновані оцінки справляються з різними видами неоднорідних даних і діапазони їхніх значень досить близько відповідають величині $\bar{X}_1$: у табл 3.4 [4,85 – 6,0]; у табл. 3.5 [4,23 – 5,0]; у табл. 3.6 [4,7 – 5,84].

Отримані результати дозволяють зробити наступні висновки:

- запропоновані оцінки типу “середнє”, побудовані на основі порядкових статистик, дозволяють працювати з різними неоднорідними вибірками даних і одержувати при цьому незміщені (малозміщені) й ефективні оцінки;
- системне застосування даних оцінок на основі запропонованих критеріїв їхнього оптимального вибору створює всі передумови для створення уніфікованого пакета прикладних програм, що зможе знайти широке застосування в різних галузях техніко-економічної діяльності.

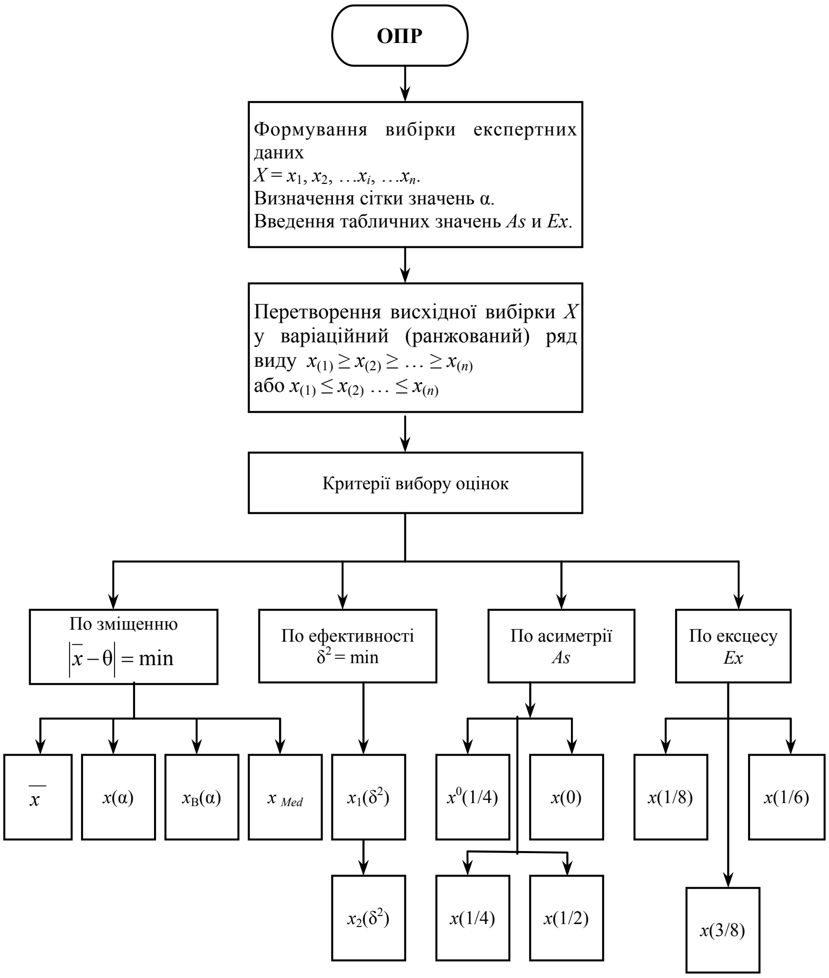


Рис. 3.6. Схема системного представлення і вибору оцінок типу "середнє" на основі порядкових статистик ОПР – особа, що приймає рішення; $\underline{x}$ – загальне позначення оцінки

Таблиця 3.3

Результат. вибірка N_1=25	2	2	4	3	3	5	8	8	8	6	6	6	7	7	5	5	4	2	4	3	4	4	5	5	7
Ранжований ряд	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	6	7	7	7	8	8	8

Оцінки

По зміщенню $\lvert\bar{x}-\theta\rvert=\min$ $(\bar{x}_1=4{,}92)$				По ефективності δ^2=min; $[x_{(9)}, x_{(15)}]$		По асиметрії *As**				По ексцесу *Ex**		
α \\ $\bar{x}$	$x(\alpha)$	$x_B(\alpha)$	x_{med}	$x_1(\delta^2)$	$x_2(\delta^2)$	x^0 (1/4)	$x(0)$	$x(1/4)$	$x(1/2)$	$x(1/8)$	$x(1/6)$	x(3/8)
α_1=0,1	4,9	4,92	5,0	4,58	4,62	5,0	4,92	–	5,0	4,89	–	–
α_2=0,2	4,86	4,92	5,0									
α_3=0,3	4,82	4,92	5,0									

Таблиця 3.4

Результат. вибірка N_2=25	2	2	4	3	3	15	8	17	8	6	12	6	2	17	5	5	4	2	4	3	4	4	16	14	7
Ранжований ряд	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	6	6	7	8	8	12	14	15	16	17	17	21

Оцінки

По зміщенню $\lvert \overline{x}-\theta \rvert = \min$ $(\overline{x}_1 = 7{,}68)$				По ефективності δ^2=min; $[x_{(9)}, x_{(15)}]$		По асиметрії As^*				По ексцесу Ex^*		
α \ $\overline{x}$	$x(\alpha)$	$x_B(\alpha)$	x_{med}	$x_1(\delta^2)$	$x_2(\delta^2)$	$x^0(1/4)$	$x(0)$	$x(1/4)$	$x(1/2)$	$x(1/8)$	$x(1/6)$	$x(3/8)$
α_1=0,1	7,14	7,52	5,0									
α_2=0,2	6,26	7,16	5,0	4,85	5,0	–	–	6,0	5,0	–	–	5,28
α_3=0,3	5,54	5,8	5,0									

17 – “підозрілі дані” $\overline{x}$ – оцінка

Таблиця 3.5

Результат. вибірка N_3=25	2	2	4	3	3	5	8	56	8	6	6	6	72	7	5	5	4	2	4	3	4	4	5	96	7
Ранжова-ний ряд	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	6	6	6	7	7	8	8	56	72	96

Оцінки

По зміщенню $\lvert\bar{x}-\theta\rvert=\min$ $(\bar{x}_1=13{,}08)$				По ефективності δ^2=min; $[x_{(9)}, x_{(15)}]$		По асиметрії As^*				По ексцесу Ex^*		
α \ $\bar{x}$	$x(\alpha)$	$x_{\text{В}}(\alpha)$	x_{med}	$x_1(\delta^2)$	$x_2(\delta^2)$	$x^0(1/4)$	$x(0)$	$x(1/4)$	$x(1/2)$	$x(1/8)$	$x(1/6)$	$x(3/8)$
α_1=0	10,6	10,96	5,0									
α_2=0,2	5,0	5,0	5,0	4,58	4,88	–	–	4,23	–	–	–	4,57
α_3=0,3	4,9	4,72	5,0									

72 – дані, що різко виділяються $\bar{x}$ – оцінка

Таблиця 3.6

Результат. вибірка N_4=25	2	2	4	3	3	15	8	56	8	6	12	6	72	17	5	5	4	2	4	3	4	4	5	96	7
Ранжований ряд	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	6	6	7	8	8	12	15	17	56	72	96

Оцінки

По зміщенню $\lvert \bar{x}-\theta \rvert = \min$ $(\bar{x}_1 = 14{,}12)$				По ефективності δ^2=min; $[x_{(9)}, x_{(15)}]$		По асиметрії As^*				По ексцесу Ex^*		
α \ $\bar{x}$	$x(\alpha)$	$x_B(\alpha)$	x_{med}	$x_1(\delta^2)$	$x_2(\delta^2)$	$x^0(1/4)$	$x(0)$	$x(1/4)$	$x(1/2)$	$x(1/8)$	$x(1/6)$	$x(3/8)$
α_1=0,1	8,6	12,12	5,0	4,7	4,75	–	–	5,38	–	–	–	5
α_2=0,2	5,66	6,4	5,0									
α_3=0,3	5,27	5,84	5,0									