

ПРАКТИЧНА РОБОТА № 1

Тема: Побудова гістограм випадкової величини, визначення характеристик випадкової величини та побудова щільностей розподілу ймовірностей значень випадкових величин.

Мета: Побудувати гістограму розподілу ймовірностей значень величини X .

Визначити математичне сподівання випадкової величини і середнє квадратичне відхилення випадкової величини від її математичного сподівання. Дані експерименту, які є значеннями випадкової величини, розташовані у векторі X , номери елементів якого $i: = 1...50$.

Порівняти свою гістограму з теоретичними щільностями розподілу ймовірностей значень випадкової величини, які побудовані слідом. Побудуйте відповідний графік із власними параметрами

Стислі теоретичні відомості

Випадкова величина – така величина X , яка внаслідок експерименту може прийняти значення x_i , не відоме заздалегідь. Весь діапазон значень випадкової величини, від максимальної до мінімальної, можна поділити на k інтервалів.

Визначення характеристик випадкових величин наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Головні характеристики випадкових величин

Характеристика	Визначення	Статистична оцінка та засоби отримання характеристики
Частота влучень випадкової величини X у i -й інтервал	$P_i^* = \frac{n_i}{N},$ де n_i – кількість влучень випадкової величини у i -й інтервал значень з шириною інтервалу Dx , N – загальна кількість значень випадкової величини	$P_i^* = \frac{n_i}{N}$

Продовження таблиці 1

Характеристика	Визначення	Статистична оцінка та засоби отримання характеристики
Ймовірність появи значення випадкової величини у i -му інтервалі значень	$P_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{n_i}{N}$	$P_i^* = \frac{n_i}{N}$ <p>– частота влучень випадкової величини X у i-й інтервал</p>
Гістограма розподілу ймовірностей значень випадкової величини X	Ступінчаста лінія, у якій площа сходинки відображає частоту появи випадкової величини у i -му інтервалі значень, а висота сходинки дорівнює частоті появи випадкової величини, поділеної на ширину інтервалу	У середовищі Mathcad це функція $\frac{\text{hist}(INT, X)}{N * \Delta x}$, де INT – вектор лівих меж інтервалів, X – вектор значень випадкової величини, N – загальна кількість значень, Δx – ширина інтервалу
Щільність (густина) розподілу ймовірностей значень випадкової величини	$f(x_i) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i < x < x_i + \Delta x)}{\Delta x}$ <p>– питома ймовірність, з якою випадкова величина приймає значення поблизу x_i</p>	Статистична оцінка – гістограма розподілу ймовірностей значень випадкової величини X . У середовищі Mathcad це функції відповідно закономірам розподілу ймовірностей
Математичне сподівання випадкової величини	Середнє вагоме значення випадкової величини, якщо вага є ймовірністю появи значень випадкової величини $M(x) = \frac{\sum_{i=1}^k p_i * x_i}{\sum_{i=1}^k p_i} = \sum_{i=1}^k p_i * x_i$ <p>де k – кількість інтервалів випадкової величини, p_i – ймовірність влучення в інтервал</p>	$M^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N}$ <p>У середовищі Mathcad обчислюється функцією $Mean(X)$</p>

Продовження таблиці 1		
Характеристика	Визначення	Статистична оцінка та засоби отримання характеристики
Дисперсія випадкової величини	Математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання $D(x) = M((x_i - M(x))^2);$ $D(x) = \sum_{i=1}^k p_i * (x_i - M(x))^2$	$D^*(x) = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N})^2}{(N-1)}$ <p>У середовищі Mathcad обчислюється функцією var(X)</p>
Середнє квадратичне відхилення випадкової величини	$\sigma = \sqrt{D(x)}$	$\sigma = \sqrt{D^*(x)}$
Функція розподілу, або інтегральна функція розподілу ймовірності значень неперервної випадкової величини	Ймовірність того, що $X < x_i$; $F(x_i) = P(X < x_i) = \int_{-\infty}^{x_i} f(x) * dx$	У середовищі Mathcad це функції відповідно законам розподілу ймовірностей
Мода випадкової величини	Таке значення випадкової величини, що $f(x_i) = \max$	

Таким чином, гістограма – ступінчаста лінія, у якій площа сходинки відображає частоту появи випадкової величини у i -му інтервалі значень і дорівнює $P_i^* = \frac{n_i}{N}$, де n_i – кількість влучень випадкової величини в i -й інтервал, N – загальна кількість випадкових величин. Висота сходинки дорівнює частоті появи випадкової величини, поділеної на ширину інтервалу Δx .

Якщо $N \rightarrow \infty$, $\Delta x \rightarrow 0$, то гістограма переходить у плавну криву і має назву “щільність розподілу ймовірності випадкової величини X ”. Щільність розподілу ймовірності випадкової величини X дорівнює

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow \infty, \Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x_i < X < x_i + \Delta x)}{\Delta x},$$

де $P(x_i < X < x_i + \Delta x)$ – ймовірність влучень випадкової величини у маленький інтервал шириною Δx поблизу точки x_i .

Найчастіше зустрічаються такі закони розподілу ймовірності випадкової величини: нормальний, рівномірний, експоненціальний. Відповідно у середовищі пакета Mathcad щільності розподілу ймовірності випадкових величин описуються функціями:

- $dnorm(x, m, \sigma)$ – для нормального закону розподілу ймовірності, де x – поточне значення випадкової величини, m – математичне сподівання, σ – середнє квадратичне відхилення;
- $dexp(x, \lambda)$ – для експоненціального закону розподілу ймовірності, де λ – параметр закону, який дорівнює $1/m$;
- $dunif(x, lower, upper)$ – для рівномірного закону розподілу ймовірності випадкової величини від мінімального значення $lower$ до максимального $upper$.

Інтегральні функції розподілу ймовірності випадкових величин описуються функціями:

- $pnorm(x, m, \sigma)$ – для нормального закону розподілу ймовірності випадкової величини;
- $pexp(x, \lambda)$ – для експоненціального закону розподілу ймовірності випадкової величини;
- $punif(x, lower, upper)$ – для рівномірного закону розподілу ймовірності випадкової величини.

Приклад виконання завдання у середовищі пакета Mathcad наведений на рис. 1.

Контрольні запитання

1. Що таке гістограма значень випадкових величин? Як вона будується у пакеті Mathcad?
2. Що таке щільність розподілу ймовірностей значень випадкових величин, та як вона пов'язана з гістограмою?
3. Що показує інтегральна функція розподілу ймовірностей значень випадкових величин?

4. Що таке гістограма значень випадкових величин ? Як вона будується у пакеті Mathcad?
5. Що таке щільність розподілу ймовірностей значень випадкових величин, та як вона пов'язана з гістограмою?
6. Що показує інтегральна функція розподілу ймовірностей значень випадкових величин?
7. Які закони розподілу ймовірностей значень випадкових величин ви знаєте?
8. Що таке математичне сподівання випадкової величини?
9. Що таке дисперсія випадкової величини?
10. Який вигляд мають точкові оцінки математичного сподівання та дисперсії випадкових величин?
11. Якими функціями пакету Mathcad визначаються точкові оцінки математичного сподівання та дисперсії?
12. Що таке середнє квадратичне відхилення випадкової величини?
13. Чому дорівнюють математичне сподівання й дисперсія невідповідної величини?

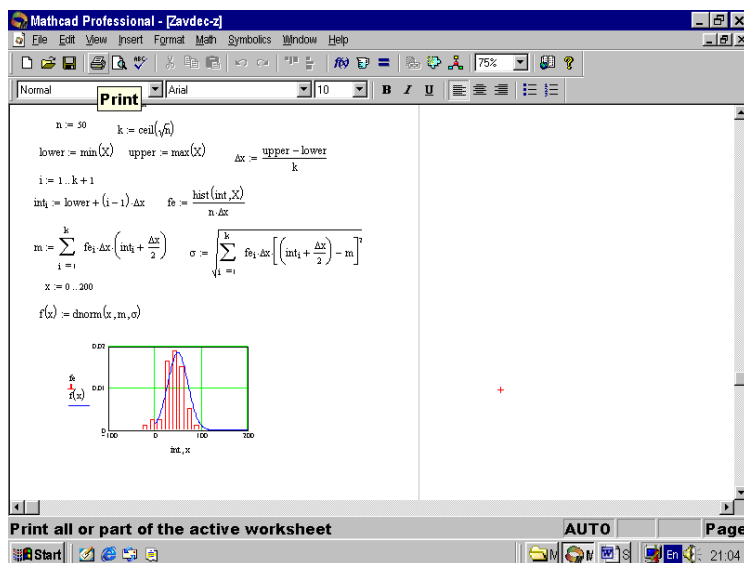


Рис. 1