ГЛАВА 6.

МОДЕЛІ СИСТЕМ МАСОВОГО ОБСЛУГОВУВАННЯ АСУ

6.1. Загальні відомості про моделі АСУ

Моделі АСУ повинні охоплювати все виробництво послуг підприємствами та установами, і тому вони можуть бути розділені за різними, досить чисельними напрямками людської діяльності. Але всі ці моделі мають єдину однакову мету (оптимізувати та інтенсифікувати виробництво, підвищити ефективність праці людини), і тому їх досить тяжко роз'єднувати для окремого аналізу.

Метою цього розділу є опис найбільш важливих напрямків моделювання, пов'язаних із статистичними методами дослідження.

Всі моделі АСУ можна умовно поділити на такі типи:

1. ***Виробничі.*** Сюди можна віднести моделі виробничих процесів (аналіз статичних та динамічних процесів в окремому виробі або в окремій лінії виробництва послуг з метою покращення їх якостей; моделі, спрямовані на випуск технічної документації, плануванні робіт, забезпечення виробництва сировиною, матеріалами, обладнанням, кадрами та ін.).

2. ***Економетричні*** моделі розглядають виробництво послуг у цілому і можуть охоплювати підприємство, установу, фірму, галузь виробництва, державне гоподарство з врахуванням впливу зовнішнього середовища – в першу чергу ринок, для якого призначені послуги, що виробляються.

3. ***Фінансові*** моделі стосуються, наприклад, бухгалтерських робіт та обслуговування банків, у тому числі і міжнародних банків.

4. ***Діловодство, або організаційні алгоритми,*** спрямовано на контроль листування, розпоряджень, виконання планових завдань;

супроводження послуг від початку їх виробництва до відправлення споживачу; організації нарад, реклами.

Охопити всі ці напрямки неможливо, і тому нижче розглядаються як приклади лише деякі виробничі та економетричні моделі.

Активне навчання на базі ЕОМ. Головними методами активного навчання є:

1. ***Ділові ігри*** – це відображення виробничої діяльності в системі управління та імітація процесів управління з врахуванням ринку. У загальному випадку складається з моделювання системи управління, наявності кількох гравців, з'єднаних однією метою (але з протиріччями і приватними інтересами); вузлів врахування ймовірнісних процесів, системи стимулювання гравців, з можливістю отримання компромісних рішень. Ділові ігри можуть бути спрямованими на розв'язання різних задач: збільшення прибутку, зміцнення економічного становища, отримання оптимальних рішень, аналіз конкретних ситуацій, ігрове проектування, стажування.

2. ***Аналіз конкретних ситуацій*** – опис ситуацій, який отримують всі гравці, завдання контрольних питань, керування обговоренням, оцінка результатів. Керівник вибирає та кількісно обгрунтовує найкращий варіант, а кожний варіант співставляє з найкращим.

3. ***Ігрове проектування*** – це орієнтація на інженерні задачі, пов'язані з пошуком оптимальної конструкції, раціональних засобів автоматизації і т.п.

4. ***Стажування*****:** стажер дублює визначену посаду в умовах моделювання функціонування складної системи. Рішення стажера контролюється дублером, або АСУ.

5. ***Проблемні лекції*** розкривають механізм отримання рішень із заданої теми у формі наявності альтернативних рішень, виникнення проблем, форм створення і рішення проблемних ситуацій з участю слухачів у рішенні проблеми. Широко використовуються гіпотези.

Імітаційне моделювання. Імітаційна модель – це програмний продукт, який звичайно стосується складних (людино-машинних) систем. У цьому випадку складна система роз'єднується на окремі модулі (частка з них може навіть бути реальними модулями АСУ). Загальною метою імітаційного моделювання є отримання алгоритму оптимального управління складною системою на базі узгодження параметрів та процесів в окремих її модулях. Програма має ієрархічну структуру взаємопов'язаних модулів: модуль повертає управління тій програмі, яка його визвала; модуль може визвати інший модуль, рівнем нижче.

ЕОМ дозволяє використовувати різні економіко-математичні методи, швидко “програвати” різні ситуації, аналізувати результати варіантів керуючих рішень.

6.2. Модель черги на базі теорії системи масового обслуговування

6.2.1. Загальні відомості про систему масового обслуговування

Теорія системи масового обслуговування (СМО) вперше була розроблена датським математиком А.К. Ерлангом для запитів на телефонну станцію. Взагалі в СМО розглядаються черги: черга в магазині; черга в касі залізниці або телефонної станції; робота кількох операторів, які створюють “чергу” перед ЕОМ; протиповітряна оборона, яка “обслуговує” ворожі літаки, причому літаки створюють чергу “на обслуговування”; запити електронних приладів до іншого електронного “приладу обслуговування” і т.д. Звичайно чергу складають ряд вимог до обслуговуючого приладу: людині (касиру), ЕОМ, протиповітряній обороні і т.п. (рис. 6.2.1).

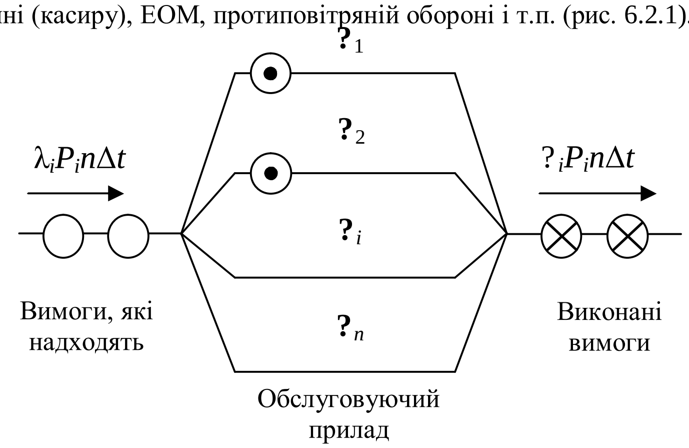

Рис. 6.2.1. Модель *n*-канальної СМО

Вимоги на виконання робіт надходять у випадкові моменти часу, обслуговуючі пристрої задовольняють вимоги (обробляють їх) за випадковий термін. ***Кількість вимог*** є статистично оціненою величиною.

Таким чином, СМО має дві головні ознаки: обслуговуючий пристрій і чергу.

СМО розрізняються:

1. За конструкцією обслуговуючого пристрою: одноканальна, багатоканальна.

2. За дисципліною черги. Найбільше розповсюджені правила:

▪ перший прийшов – перший обслуговуєшся;

▪ вимоги за пріоритетом;

▪ відсутність черги (якщо для обслуговування черги немає вільного каналу або якщо СМО зайнята, то вимога не задовольняється і зникає).

При аналізі СМО намагаються одержати такі характеристики: середню довжину черги; середній термін обслуговування; середній час, за який обслуговуючий пристрій не працює.

Для отримання математичної моделі СМО потрібно знати конструкцію СМО; математичний опис потоку вимог, які надходять до СМО; опис дисципліни черги, способу обслуговування; математичний опис обробки вимог.

При дослідженні СМО звичайно вважають, що вхідний потік вимог підпорядковується закону Пуассона, за яким розглядають відносно рідкі події. За законом Пуассона ймовірність появи точно *К* подій із *n* за проміжок часу *t*

$$P_n(k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}\Bigg|_{\substack{k=1\\ t=\Delta t}} = \frac{(\lambda \Delta t)^1 e^{-\lambda \Delta t}}{1!} \approx (\lambda \Delta t)^1 e^0 = \lambda \Delta t,$$

де $\lambda = 1/t_1$ – середнє число вимог (об'єктів), що надходять до СМО за одиницю часу (секунду, хвилину, годину, тиждень…); t_1 – середнє значення інтервалів часу між появами вимог, подій; k – кількість одночасних вимог.

Ймовірність появи однієї вимоги в інтервалі від t до $t + \Delta t$ дорівнює $\lambda \cdot \Delta t$ та не залежить від t, а ймовірність появи у цьому інтервалі більше однієї вимоги дуже мала (дорівнює нулю).

Обслуговування теж підкоряється експоненціальному закону. Термін обслуговування окремої вимоги є випадковим з експоненціальним законом розподілу і з інтенсивністю обслуговування ? = $1/t_1$, де t_2 середній термін обслуговування однієї вимоги одним каналом обслуговування. Ймовірність закінчення обслуговування в інтервалі від t до $t + \Delta t$ дорівнює $\mu \cdot \Delta t$ і не залежить від *t.*

Ми будемо розглядати n-канальну СМО без черги з роботою процесора АСУ в режимі розподілу часу: черги немає; інтенсивність потоку вимог від оператора дорівнює λ; стан S СМО дорівнює кількості зайнятих каналів; АСУ за рахунок перемикачів розглядає лише одну вимогу операторів, і тому інтенсивність його потоку обслуговування m не залежить від кількості прийнятих замовлень.

6.2.2. Граф станів системи масового обслуговування “оператори – апаратно-програмний комплекс”

Апаратно-програмний комплекс (АПК) на рис. 6.2.2.1 розглядається як обслуговуючий прилад по відношенню до N операторів Оп1…ОпN.

Кожний оператор у середньому витрачає час $T_{оп}$ на прийняття, обробку та передачу однієї вимоги і тоді інтенсивність потоку завдань від одного оператора дорівнює $\lambda = 1/T_{\text{оп}}$. Вважаємо, що кожний оператор вводить інформацію у свою віртуальну машину (отже, вони можуть працювати паралельно), але АПК на базі однієї ЕОМ працює у режимі розподілу часу і у середньому витрачає час T_{EOM} на прийняття, обробку та передачу інформації по одній вимозі. Тоді інтенсивність потоку інформації від ЕОМ до операторів дорівнює ? = $1/T_{\text{EOM}}$. Будемо вважати, що завдання знаходиться ***у пультовій фазі,*** якщо його обробляє оператор, і у ***системній фазі,*** якщо його обробляє АПК (ЕОМ). Стан СМО S_j (J = 0, 1, 2, …, n) визначається кількістю вимог операторів у системній фазі, що обробляє ЕОМ (АПК). Тобто ми маємо (n + 1) станів $S_{0,}$ $S_{1,}$ …, S_n з ймовірністю існування $P_{0,}$ $P_{1,}$ …, $P_{n.}$ Ці стани означають:

S_0 – у системній фазі немає жодного завдання, всі завдання знаходяться в операторів (у пультовій фазі);

S_1 – одне завдання знаходиться у системній фазі;

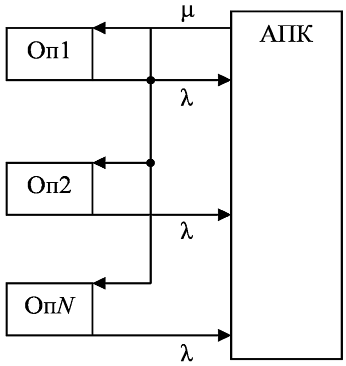

Рис. 6.2.2.1. СМО “оператори – АПК”

Таким чином, ми вважаємо дану СМО як багатоканальну при введенні інформації операторами та одноканальну при обробці інформації.

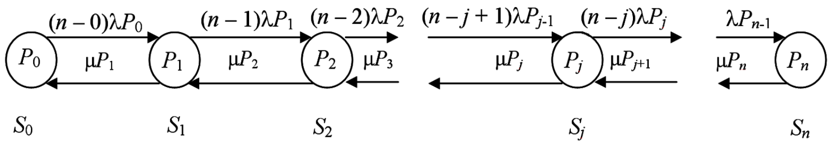

Рис. 6.2.2.2. Граф станів СМО S_0 – S_n

Відповідний граф станів СМО має вигляд, що наведений на рис. 6.2.2.2. Показаний граф станів має такі особливості:

1. Інтенсивність потоків переходу із стану S_j в стан S_{j+1} (або із пультової фази у системну) визначається добутком $(n - j) * \lambda$, тобто залежить від числа операторів пультовій фазі $(n - j)$.

2. Інтенсивність потоків переходу із стану S_{j+1} в стан S_j (або із системної у пультову фазу) вважаємо постійною. Тобто вважаємо, що процесор АСУ працює в режимі розподілу часу, і тому інтенсивність зворотного потоку інформації однакова для всіх станів і дорівнює ? = const.

3. Для кожного із станів S_j вказуємо ймовірність його існування P_j.

Слід визначити, що якщо б кожний оператор мав свій окремий, незалежний канал обслуговування, то інтенсивність зворотного потоку інформації дорівнювала б добутку j?.

6.2.3. Диференціальні рівняння і розрахунок ймовірності станів системи масового обслуговування

Систему диференціальних рівнянь складають по графу станів відносно невідомих ймовірностей P_j існування станів S_j. При цьому використовують такі правила:

1. Число рівнянь дорівнює $(n + 1)$ – числу станів S_j в графі.

2. В лівій частині рівняння стоїть похідна ймовірності по часу, а в правій частині – члени, пов’язані з дугами, які виходять та входять у вершину даного стану S_j.

3. Кожний член правої частини береться зі знаком «+», якщо входить у вершину S_j, і зі знаком «–», якщо виходить з неї. Кожний член правої частини дорівнює добутку інтенсивності потоку інформації на ймовірність того стану, звідки ***виходить дуга.***

4. Одне з отриманих рівнянь є зайвим і замінюється рівнянням суми ймовірностей повної групи для взаємно несумісних подій.

З графу станів отримуємо рівняння

$$\frac{dP_0}{dt} = -n\lambda P_0 + \text{м}\ P_1;$$

$$\frac{dP_1}{dt} = -(n-1)\lambda\ P_1 + \text{м}P_2 + n\lambda P_0 - \text{м}P_1;$$

$$\frac{dP_2}{dt} = -(n-2)\lambda\ P_2 + \text{м}P_3 + (n-1)\lambda P_1 - \text{м}P_2;$$

. . . .

$$\frac{dP_n}{dt} = \lambda\ P_{n-1} - \text{м}\,P_n;$$

Останнє рівняння замінюємо на суму ймовірностей повної групи

$$\sum_{i=0}^{n} P_i = 1.$$

Далі отримуємо іншу систему рівнянь:

$$\frac{dP_0}{dt} = -n\lambda\ P_0 + \text{м}\ P_1 = 0;$$

$$\frac{dP_0}{dt} + \frac{dP_1}{dt} = -(n-1)\text{л}\ P_1 + \mu\ P_2 = 0;$$

$$\frac{dP_0}{dt} + \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt} = -(n-2)\lambda\ P_2 + \mu\ P_3 = 0;$$

. . . .

$$\sum_{j=0}^{n} P_j = 1.$$

$$\frac{dP_0}{dt}+\frac{dP_1}{dt}+\ldots+\frac{dP_j}{dt}=-(n-j)\lambda\ P_j+\mu\ P_{j+1}=0;$$

У статичному режимі всі похідні дорівнюють нулю, і тому отримуємо:

$j=\overline{0,n}.$

$$n\lambda\ P_0=\text{м}\ P_1;\quad (n-1)\lambda\ P_1=\text{м}\ P_2;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(n-j)\lambda\ P_j=\text{м}\ P_{j+1};\quad \sum_{j=0}^{n}P_j=1,$$

де

Рішення цієї системи рівнянь для статики має вигляд:

$$P_1=\frac{n\lambda\ P_0}{\text{м}};\quad P_2=\frac{(n-1)\lambda\ P_1}{\text{м}}=\frac{(n-1)n\lambda^2P_0}{\text{м}^2};\ \ldots;$$

$$P_j=(n-j+1)\ldots(n-2)(n-1)n\left(\frac{\lambda}{\text{м}}\right)^j=\frac{n!}{(n-j)!}\left(\frac{\lambda}{\text{м}}\right)^j P_0.$$

Звідси отримуємо ймовірність простоювання СМО (коли кількість вимог $i = 0$):

$$1=\sum_{j=0}^{n}P_i=P_0\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!}\left(\frac{\lambda}{\text{м}}\right)^j;\quad P_0=\frac{1}{\sum\limits_{j=0}^{n}\frac{n!}{(n-j)!}\left(\frac{\lambda}{\text{м}}\right)^j}.$$

АПК зайнятий обробкою запитів (вимог) операторів з ймовірністю

$$P_{\text{зан}}=1-P_{0},$$

де P_0 – ймовірність відсутності вимог.

Якщо АПК зайнятий, то він обслуговує ? програм в одиницю часу.

Тому пропускна спроможність АПК АСУ дорівнює

$$A = (1 - P_0)?.$$

Середній потік запитів до АПК

$$A = \lambda\,(n - w),$$

де (n – w) – середня кількість операторів, що знаходяться у пультовій фазі; w – середня кількість операторів у системній фазі.

Цей потік повинен дорівнювати пропускній спроможності АПК, і тому

$$(1 - P_0)\,\text{м} = \lambda(n - w),$$

звідки середня кількість операторів у системній фазі

$$w = n - (1 - P_0)\frac{\text{м}}{\lambda}.$$

$n = 5 + \sqrt{N/2}$

На кожний із w запитів АПК витрачає час $T_{обс}$. Тому середній час відгуку апаратно-програмного комплексу $T_{відг} = wT_{обс}$.

Розраховані дані дозволяють скласти вимоги до параметрів АПК. $\lambda = 1/\sqrt{N}$

$\text{м} = 1/\sqrt{(N/2+3)}.$

Контрольні завдання

1. Проаналізувати початкові диференціальні рівняння СМО (похідні ймовірностей знаходження системи в стані S_0 – S_n по часу, $n = 3 + \sqrt{(N/2 \pm 10)}$ = ціле число) для аналізу черги в багатоканальній системі “оператор – автоматизована система управління” без черги з загальною кількістю станів черги S_0 – S_n, потоком інформації від одного оператора $\lambda = 1/\sqrt{(N+3)}$ та потоком інформації від автоматизованої системи управління $\text{м} = 1/\sqrt{(N/2+6)}$, Тут N – порядковий номер студента у групі. Скласти граф станів для своєї СМО. Розрахувати пропускну спроможність СМО та середній час відгуку СМО.

2. Проаналізувати початкові диференційні рівняння СМО (похідні ймовірностей знаходження системи в стані S_0 – S_n по часу, = ціле число) для аналізу черги в багатоканальній системі “оператор – автоматизована система управління” без черги з загальною кількістю станів черги S_0 – S_n, потоком інформації від одного оператора та потоком інформації від

автоматизованої системи управління де N – порядковий номер студента у групі. Скласти граф станів для своєї СМО. Розрахувати пропускну спроможність СМО та середній час відгуку СМО.

3. Скласти граф-схему, отримати диференціальні рівняння для черги з n елементів при:

- ***Група* № 1:** кількість станів СМО n = 4 + 0,2 * $M = \sqrt{N}$; N = ціле число; потік інформації від одного оператора λ = 0, N; потік інформації від СМО ? = 0,6 + 0, N.