ГЛАВА 3.

ЙМОВІРНІСТЬ БЕЗВІДМОВНОЇ РОБОТИ АСУ ТА ЇЇ ЕЛЕМЕНТІВ

2.1. Надійність: ймовірність безвідмовної роботи АСУ при паралельному та послідовному з’єднанні елементів

Проблеми забезпечення надійності АСУ. Проектування систем тільки з метою забезпечення інформаційно-функціональних вимог не задовольняє ні проектантів, ні користувачів. Одним з основних додаткових вимог є забезпечення надійності виконання виробничих функцій. Технічні системи охоплюють електричні, електронні, радіотехнічні, енергетичні, механічні підсистеми, у які також входять як скадові частини програмне забезпечення, оператори та технічне обслуговування. Всі ці частини потрібно розглядати у сукупності їх взаємодії з точки зору забезпечення надійності фукціонування АСУ в усіх можливих режимах. Надійність виконання всіх функцій АСУ залежить від надійності та умов взаємодії різнорідних елементів, що складають систему, від умов експлуатації, обслуговування, відновлення. З поняттям забезпечення надійності тісно пов’язані також співвідношення між витратами на забезпечення надійності та отриманим економічним ефектом за рахунок підвищення надійності.

Проблема надійності пов’язана з такими основними поняттями та кількісними показниками надійності:

Надійність – властивість системи зберігати у часі спроможність до виконання заданих функцій з заданою ефективністю. Надійність має такі основні властивості: безвідмовність, ремонтопридатність, довготривалість.

Безвідмовність – властивість системи зберігати працездатність протягом заданого терміну (наробки) без проміжних відмов.

Ремонтопридатність – властивість системи у пристосуванні до попереджень, виявленні та усуненні відмов.

Довготривалість – властивість системи зберігати працездатність протягом довгого терміну до настання граничного стану з необхідними перервами для технічного обслуговування та ремонту.

Працездатність – стан системи, при якому вона спроможна виконувати покладені на неї функції з заданою ефективністю.

Відмова – подія, що призводить до порушення працездатності. З відмовою тісно пов’язані відновлювальні елементи (вони відновлюють працездатність після заміни комплектуючих, ремонту, технічного обслуговування і т.д.) та невідновлювальні елементи (після їх відмови працездатність системи не може відновитись).

Збій – відмова, яка самоусувається, а система сама відновлює працездатність після відмови.

Часткова відмова – зниження ефективності виконання функцій (зниження продуктивності, збільшення витрат ресурсу і т.д.).

Ймовірність відмови – ймовірність того, що елемент відмовить протягом заданого часу:

$$p(t) = n(t)/N_0,$$

де $n(t)$– кількість елементів, яка відмовила протягом часу (0 – t); N_0 – кількість елементів, яка бере участь в іспитах.

Ймовірність відновлення – ймовірність того, що система буде відновлена протягом заданого інтервалу часу:

$$V(ф) = m(ф) / M_0,$$

де $m(\tau)$ – кількість відновлених елементів на момент часу τ; M_0 – загальна кількість однотипних несправних елементів, поставлених на ремонт.

Показники надійності по продуктивності – продуктивність або кількість продукції, отриманої в одиницю часу без врахування простоїв обладнання (для одного цикла функціонування системи, за час виконання встановленого об’єму робіт, за визначений календарний період часу).

Ймовірність безвідмовної роботи – ймовірність того, що у межах заданої наробки відмови технологічної системи (ТС) по продуктивності не відбудеться.

Середня наробка на відмову – це відношення часу роботи ТС до математичного очікування числа її відмов протягом цього часу роботи:

$$t_{\text{ВІДМОВ}} = \frac{t_{\text{Р}}}{M(t_{\text{Р}})},$$

де $M(t_p)$– математичне очікування кількості відмов ТС протягом часу t_p.

Середній час відновлення працездатного стану – відношення загального сумарного терміну відновлення ТС до кількості відновлень (відмов):

$$T_{\text{В}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\tau_i,$$

де τ_i – час відновлення i-ї відмови; – кількість відновлень (відмов) за період спостереження.

Коефіцієнт готовності – відношення часу знаходження ТС у робочому стані до часу, що розглядається (за вилученням простоїв на технічне обслуговування, планові ремонти і через організаційні причини, які не враховуються у нормах часу):

$$K_{\Gamma} = \frac{\bar{t}_{\text{Р}}}{t_g - t_{\text{ОРГ}}},$$

де $\bar{t}_P$– середній підсумковий час роботи ТС за проміжок часу, що розглядається; $t_g = t_{\text{Н}} - t_{\text{Т0}}$ – дійсний фонд часу; $t_{\text{Н}}$ – номінальний фонд часу; $t_{\text{Т0}}$ – підсумковий термін планового технічного обслуговування та ремонту за календарний проміжок часу, що розглядається; $t_{\text{ОРГ}}$ – час простоїв ТС через організаційні причини.

Коефіцієнт технічного використання – відношення часу знаходження ТС у працездатному стані до проміжка часу, що розглядається (за вилученням простоїв з організаційних причин):

$$K_{\text{ТВ}}(t) = \frac{\bar{t}_{\text{Р}}}{t_{\text{Н}} - t_{\text{ОРГ}}}.$$

Коефіцієнт використання – відношення підсумкового часу працездатного стану ТС за проміжок часу, що розглядається, до величини цього проміжка:

$$K_{\text{В}}(t) = \frac{\bar{t}_{\text{Р}}}{t_{\text{Н}}}.$$

Цілі та критерії забезпечення надійності. Підвищення рівня надійності ТС оцінюється коефіцієнтом економічної ефективності, який враховує як прибуток, отриманий за рахунок підвищення рівня надійності, так і витрати на підвищення надійності:

$$E_{\text{ЕФ}} = Ц_{\Sigma} - (C_{\Sigma} + E_{\text{Н}} K),$$

де $Ц_{\Sigma}$ – підсумкова вартість виробленої продукції; C_{Σ} – підсумкові витрати на вироблення продукції; $E_{\text{Н}}$ – нормативний коефіцієнт економічної ефективності капітальних витрат; K – капітальні витрати.

Зі зростанням капітальних витрат на забезпечення надійності знижуються експлуатаційні витрати і збільшується об'єм продукції, що випускається. Тому існує оптимальний рівень надійності.

У цілому низький або підвищений рівень надійності призводять до створення нерентабельної системи внаслідок її низької продуктивності та підвищення витрат на надійність системи, які не окуплюються. Таким чином, існує оптимальний рівень надійності ТС. При цьому оптимальний рівень надійності ТС визначається максимальним значенням коефіцієнта економічної ефективності.

Надійність ТС забезпечується як при проектуванні, так і при експлуатації. На стадії проектування намагаються забезпечити максимальне значення коефіцієнта економічної ефективності за рахунок складових у формулі $E_{\text{ЕФ}}$. На стадії експлуатації намагаються створити такий режим експлуатації, щоб співвідношення між витратами ресурсів на підвищення рівня надійності і збільшенням продуктивності за рахунок підвищення надійності збільшувало б коефіцієнт економічної ефективності.

Наслідками відмов можуть бути такі додаткові витрати, які зменшують коефіцієнт економічної ефективності:

1. Скорочується об'єм випуску продукції.
2. Виробляється продукція низького сорту.
3. Вимагаються витрати на відновлення та заміну обладнання (у тому числі з апаратного резервування) або на реалізацію функції, яка була відмовлена.
4. Витрати на планове технічне обслуговування та ремонт.
5. Капітальні витрати на забезпечення надійності на стадії проектування.

Отримання оптимальної надійності обладнання забезпечується не лише на стадії проектування, а й у процесі експлуатації. ТС, як і будь-яка інша система, змінюється у процесі експлуатації – замінюється обладнання, режим експлуатації, система управління;

виникає проблема врахування реального технічного стану елементів ТС. Стратегія експлуатації полягає в експлуатації елементів ТС до вичерпання проектного ресурсу та, по можливості, в подальшій експлуатації у залежності від фактичного технічного стану.

У процес управління надійністю, оснований на аналізі процесів функціонування виробництва, входять наступні положення:

1. Оптимізація норм та регламентів, вид і періодичність технічного обслуговування, ремонтів, заміни обладнання.
2. Вимоги до кваліфікації обслуговуючого персоналу.
3. Оцінка показників надійності по продуктивності обладнання.
4. Аналіз залежності економічної ефективності від надійності.
5. Оптимального резервування, оптимізації запасів інструментів і приладів (ЗІП).
6. Оптимізація структури системи з урахуванням регламентів обслуговування, ремонтів та відновлення.
7. Обмеження на інтенсивність та режими використання обладнання.

Надійність: ймовірність безвідмовної роботи АСУ при паралельному та послідовному з'єднанні елементів

Надійність P_j $(0 \leq R_j \leq 1)$ – це статистична характеристика працездатності елемента, блока або АСУ, яка визначається ***ймовірністю*** того, що елемент (блок, АСУ) буде працювати без відмов за визначений термін часу (за рік, за весь термін роботи – 7 років).

Ненадійність $P_j = 1 - P_j$ $(0 \leq R_j \leq 1)$ – це ймовірність того, що елемент, прилад, блок, АСУ відмовляє у роботі за заданий інтервал часу.

Розглянемо ***послідовне з'єднання елементів.*** У цьому випадку надійність всієї системи забезпечується при одночасній надійності всіх її елементів. Позначимо через A11, A12, …, A1*i*, ..., A1*n* послідовно з'єднані елементи (рис. 3.1.1, а).

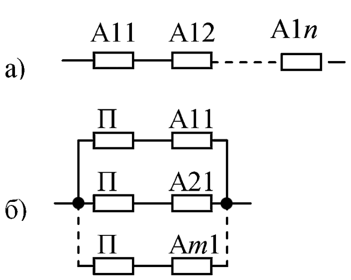

Рис. 3.1.1. Послідовне (а) та паралельне (б) з'єднання елементів

Для визначення надійності послідовно з’єднаних елементів ми повинні використати правило множення ймовірностей для незалежних подій:

$$P_{1,n} = \prod_{i=1}^{n} P_{1i} \,,$$

де – надійність елемента А1*i*.

Якщо надійність всіх елементів А1i однакова, то $P_{1,n} = P^n$.

Оскільки $P < 1$, із наведених формул видно, що при заданій надійності елементів або блоків різко знижується надійність системи.

Розглянемо ***паралельне з’єднання елементів.*** У цьому випадку надійність всієї системи забезпечується, якщо хоч один з її елементів знаходиться у робочому стані. Позначимо через А11, А21, …, А*j*1, …, А*m*1 паралельно з’єднані елементи, що вмикаються через перемикачі П (рис. 3.1.1, б), надійність яких $P_{\Pi} = 1$. Якщо якийсь елемент системи виходить з ладу, то на його місце за допомогою перемикача П вмикається інший працездатний елемент.

При паралельному з’єднанні елементів система надійно працює, якщо може працювати хоча б один елемент А*m*1. Події А*j*1 сумісні, бо одночасно можуть бути у робочому стані кілька елементів А*j*1. Тому використання правила складання для несумісних подій з метою розрахунку надійності *Pm*,1 була б незаконною.

Для отримання надійності паралельно з’єднаних елементів Pm,1 позначимо ненадійність (подію, протилежну А*j*1) через Ā*j*1 як подію, яка полягає в тому, що елемент Аj1 відмовляє у роботі за заданий інтервал часу. Ненадійність одного елемента

$$\overline{P_{j1}} = 1 - P_{j1}.$$

Тоді ненадійність всієї системи (вихід її з ладу) забезпечується при одночасній ненадійності (відмові у роботі) всіх її елементів. Подія ненадійності елемента Аj1 є незалежною, тому можна записати:

$$\overline{P_{m,1}} = \prod_{j=1}^{m} \overline{P_{j1}} = \prod_{j=1}^{m} (1 - P_{j1}).$$

Але, у свою чергу, надійність всієї системи протилежна ненадійності

$$P_{m,1} = 1 - \overline{P_{m1}} = 1 - \prod_{j=1}^{m} (1 - C_{j1}).$$

Якщо надійність всіх елементів однакова, то

$$P_{m,1} = 1 - (1 - P)^m .$$

Із наведених формул видно, що паралельне з'єднання елементів різко збільшує надійність системи.

3.2. Ймовірність безвідмовної роботи АСУ

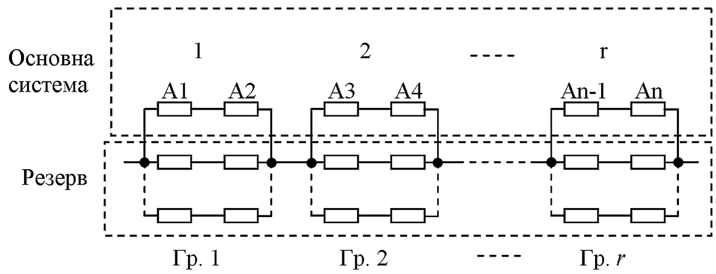

Рис. 3.2.1. Схема резервування елементів

Ми розглядаємо основну систему з послідовно з'єднаних елементів Аj, (j = 1, n) з однаковою надійністю P для кожного елемента.

Цю основну систему ми ділимо на r груп з кількістю $S = n/r$ елементів у групі. Кожна група має резерв (розглядається найпростіший приклад одноразового резервування з надійністю перемикача, яка дорівнює “1”).

Таким чином, загальні характеристики основної системи:

p – надійність одного елемента;

n – загальна кількість послідовно з'єднаних елементів основної системи;

r – кількість груп з послідовно з'єднаними елементами;

$S = n/r$ – кількість послідовно з'єднаних елементів у групі.

Переходимо тепер до визначення ймовірності безвідмовної роботи АСУ, її надійності:

p^S – надійність однієї гілки групи з $S = n/r$ послідовно з'єднаними елементами;

m – кількість паралельно з'єднаних гілок;

$(1 - p^S)^m$ – ненадійність паралельно з'єднаних m гілок (m = 2) або ймовірність виходу з ладу однієї групи;

$Pr = [1 - (1 - p^S)^m]$ – надійність будь-якої групи;

$Pm,r = [1 - (1 - p^S)^m]^r$ – надійність всієї системи із r послідовно з'єднаних елементів.

У крайніх випадках (для $m = 2 = \text{const}$):

1. При $r = 1$, $S = n / r = n / 1 = n$ (тобто резервується система в цілому і $S = n$)

$$p_{2,1} = 1-(1-p^n)^2 = 1-1+2p^n - p^{2n} \approx 2p^n.$$

2. При $r = n$, $S = n / r = n / n = 1$ (тобто резервується кожний елемент і $S = 1$)

$$p_{2,n} = [1-(1-p)^2]^n = [1-1+2p - p^2]^n \approx 2^n p^n.$$

Резервування по елементах:

- у першому випадку (резервування усієї системи) збільшує надійність у 2 рази;
- у другому випадку (резервування кожного елемента) збільшує надійність у 2^n разів.

При дуже надійних елементах (тобто p – велике число) ця різниця між двома крайніми випадками буде не настільки вражаючою.

3.2.2. Визначення резервування для забезпечення потрібної імовірності роботи

Припустимо, що ми бажаємо отримати задану надійність системи P_m із n елементів шляхом деякого m-разового резервування, яке і потрібно визначити (рис. 3.2.2.1). Тоді отримана нами формула набуває вигляду

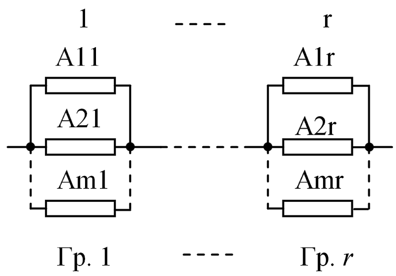

Рис. 3.2.2.1. Схема резервування елементів.

Після її перетворень

$$C_m^{1/r} = 1-(1-p^{n/r})^m; \quad (1-p^{n/r})^m = 1-P_m^{1/r};$$

$$m\ln(1-p^{n/r}) = \ln(1-\mathrm{P}_m^{1/r}); \qquad m = \frac{\ln(1-\mathrm{P}_m^{1/r})}{\ln(1-p^{n/r})}$$

отримуємо потрібну кількість m паралельно з‘єднаних r ланцюгів по $S = n/r$ елементів в кожному.

Резервування по елементах значно зменшує витрати на резервування. Ми можемо вважати, що вартість пропорційна числу комплектів m. *Тоді при надійності елемента* p = 0,9 і забезпечення надійності P_m = 0,99 за рахунок резервування:

- для n = 10 при резервуванні окремими комплектами вартість збільшується у 12 разів, а при поелементному резервуванні у три рази;
- для n = 100 при резервуванні окремими комплектами вартість збільшується у 2 * 10^5 разів, а при поелементному резервуванні – лише у 7 разів.

3.2.3. Вплив перемикачів на ймовірність безвідмовної роботи АСУ при резервуванні

Розглянемо 1-й випадок, коли вважається, що елементи

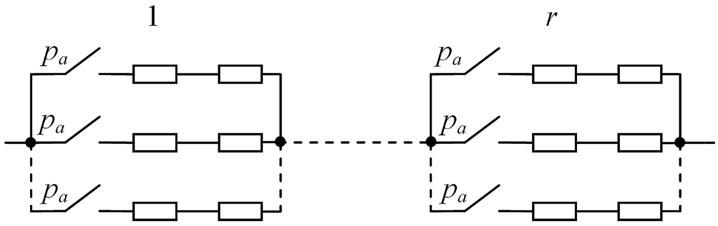

Рис.3.2.3.1. Елементи перемикача вмикаються послідовно з елементами кожної гілки

P_a – надійність одного елементу перемикача (перемикача гілки);

P – надійність одного елементу;

P^S – надійність S послідовно з‘єднаних елементів у гілці;

P_aP^S – надійність послідовно з‘єднаного елементу перемикача та S елементів у гілці;

$1 - P_a P^S$ – ненадійність однієї гілки;

$(1 - P_a P^S)^m$ – ненадійність групи із m паралельно з‘єднаних гілок;

$P_m = 1 - (1 - P_a P^S)^m$ – надійність групи із m паралельно з‘єднаних гілок;

$P_{m,r} = [1 - (1 - P_a P^S)^m]^r$ – надійність r послідовно з‘єднаних груп.

У другому випадку перемикач з надійністю $p_в$ – вмикається послідовно з групою із паралельно з‘єднаних гілок (рис. 3.2.3.2)

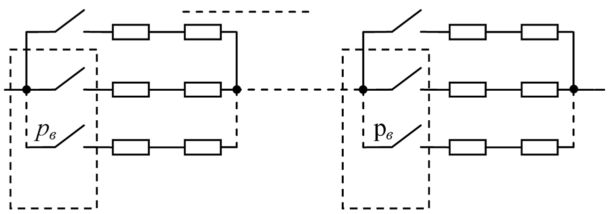

Рис. 3.2.3.2. Елементи перемикача вмикаються послідовно з групою із паралельно з'єднаних гілок

Для рис. 3.2.3.2 можна записати:

$P_в$ – надійність перемикача;

P – надійність одного елементу;

P^S – надійність S послідовно з‘єднаних елементів у гілці;

$1 - P^S$ – ненадійність однієї гілки;

$(1 - P^S)^m$ – ненадійність групи із m паралельно з‘єднаних гілок;

$1 - (1 - P^S)^m$ – надійність групи із m паралельно з‘єднаних гілок;

$P_m = P_в[1 - (1 - P^S)^m]$ – надійність групи із послідовно з’єднаних перемикача та m паралельно з‘єднаних гілок;

$P_{m,r} = \{P_в[1 - (1 - P^S)^m]\}^r$ – надійність r послідовно з‘єднаних груп.

3.3. Наробка на відмову з заданою довірчою ймовірністю та середнім терміном безвідмовної роботи

Метою оцінки надійності АСУ та її елементів є визначення показників безвідмовності, довготривалості і ремонтопридатності та порівнювання цих показників з технічним завданням.

Наробкою на відмову зветься термін роботи системи (виробу) до відмови ($t_в$), розрахований для відомої довірчої ймовірності зі значенням $P_{опт}$ = 0,95...0,98.

Функція надійності $P(t)$ (рис. 3.3.1) визначає ймовірність безвідмовної роботи АСУ за час t з початку роботи. Повний розрахунок надійності АСУ за всіма показниками є трудомістким і потребує великої кількості початкових даних. На практиці його часто обмежують оцінкою надійності системи (виробу) за показниками безвідмовності, які отримуються статистичними методами.

При ***експоненціальному законі*** розподілу відмов, який є найбільш характерним для елементів в АСУ, показник безвідмовної роботи за час t має такий вигляд:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \varpi(t)dt},$$

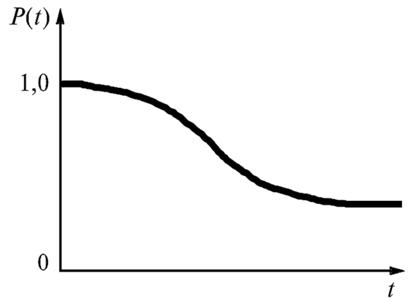

Рис. 3.3.1. Графік функції надійності-ймовірності безвідмовної роботи за час *t*

У практичних розрахунках параметр потоку відмов приймають постійним $w(t) = y = \text{const}$, звідки ймовірність безвідмовної роботи за визначений час (надійність)

$$P(t) = e^{-vt}, \qquad (3.3.1)$$

де $v = 1 / t_{бр}$ – середня інтенсивність потоку відмов, яку визначають шляхом статистичної обробки отриманих даних про відмову виробу і приймають по середньому (як математичне очікування); $t_{бр}$ – середній термін безвідмовної роботи.

Якщо знаємо значення v, то ми можемо визначити наробку на відмову з заданою ймовірністю очікування:

$$t_В = -\frac{1}{Н}\ln P_{опт}, \qquad (3.3.2)$$

де $P_{опт}$ = 0,95...0,98.

Середній час безвідмовної роботи $t_{бр} = \frac{1}{н}$.

(3.3.3)

Із (3.3.1) випливає, що ймовірність безвідмовної роботи зменшується зі зростанням часу роботи системи (виробу). Чим менше інтенсивність потоку відмови, тим більша наробка на відмову (3.3.2) і більше часу безвідмовної роботи (3.3.3).

Будь-яка система, в тому числі й АСУ, вміщує ряд послідовно з'єднаних елементів. При цьому загальна інтенсивність відмов системи дорівнює сумі інтенсивностей відмов послідовно з'єднаних елементів, що зменшує показники безвідмовності.

Під обслуговуванням розуміють всі дії, які спрямовані на відтворення працездатності АСУ.

Засоби, які використовуються при обслуговуванні, звуться обслуговуючими елементами, у склад яких може входити прилад або людина.

3.4. Ймовірність точної передачі сигналу в умовах перешкод

Припустимо, що із ДЖЕРЕЛА (пункта А) передають дві несумісні події A =1 або $\bar{A}$ = 0 з ймовірністю відповідно $P(A)$ = 5/8 та $P(\bar{A})$ = 3/8 (табл. 3.4.1). ПЕРЕШКОДА з ймовірністю P_A(Т) = 2/5 перетворює A = 1 у Т = 0 і з ймовірністю $P_{\bar{A}}(B)$ = 1/3 перетворює сигнал $\bar{A}$ = 0 у B = 1 (рис. 3.4.1). Тобто ймовірність перешкодження різного типу сигналів теж різна.

ПРИЙМАЧ (пункт B) отримує неушкоджений сигнал B = 1 з ймовірністю точної передачі сигналу $P_B(A)$ та неушкоджений сигнал B = 0 з ймовірністю точної передачі сигналу $P_Т(\bar{A})$. Треба визначити значення $P_B(A)$ та $P_B(\bar{A})$, тобто відповісти на питання: з якою ймовірністю оператор ПРИЙМАЧА дає правильну відповідь на передані сигнали A = 1, $\bar{A}$ = 0?

Таблиця 3.4.1

ДЖЕРЕЛО		ПЕРЕШКОДА		ПРИЙМАЧ (B = 1, $\bar{B}$ = 0)	
Подія	Апріорна ймовірність	Ймовірність перешкодження інформації	Ймовірність неперешкодження інформації	Ймовірність точної передачі сигналу	Ймовірність перешкодження сигналу
A = 1	$P(A)$ = 5/8	$P_A(\bar{B})$ = 3/5	$P_A(B)$ = 3/5	$P_B(A)$	$1–P_B(A)$
$\bar{A}$ = 0	$P(\bar{A})$ = 3/8	$P_{\bar{A}}(B)$ = 1/3	$P_{\bar{A}}(\bar{B})$ = 2/3	$P_{\bar{B}}(\bar{A})$	$1–P_{\bar{B}}(\bar{A})$

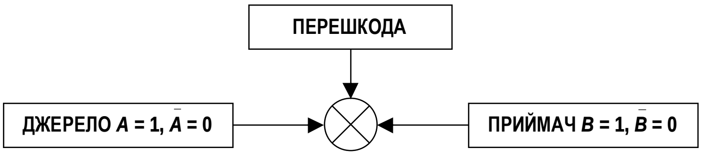

Рис. 3.4.1. Схема передачі інформації

Розглянемо відповідь на це питання.

1. Ймовірність отримання ПРИЙМАЧЕМ сигнала $B = 1$ складається із суми ймовірностей неушкоджених та ушкоджених сигналів:

$$P_B = C(\text{Б})\times C_{\text{Б}}(B)+P(\bar{A})\times C_{\bar{\text{Б}}}(B)=\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{2}.$$

Тут ймовірність правильної передачі сигналу $A = 1$ дорівнює $P(A) \times P_A(B)$ а ймовірність передачі ушкодженого сигналу $A = 1$ дорівнює $P(\bar{A}) \times P_{\bar{A}}(B)$.

Тоді ймовірність того, що оператор ПРИЙМАЧА дає правильну відповідь, коли розшифровує прийнятий сигнал $B = 1$ як переданий сигнал $A = 1$, дорівнює відношенню ймовірності правильно отриманої інформації до загальної ймовірності отримання сигналу $B = 1$:

$$C_B(A)=\frac{C(A)\times C_{\text{Б}}(B)}{C(\text{A})C_{\text{Б}}(B)+C(\bar{A})\times C_{\bar{\text{Б}}}(B)}=\frac{\frac{5}{8}\times\frac{3}{5}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}.$$

2. Тоді ймовірність того, що оператор ПРИЙМАЧА дає правильну відповідь, коли розшифровує прийнятий сигнал Т = 0 як переданий сигнал $\bar{A} = 0$, дорівнює відношенню ймовірності правильно отриманої інформації до загальної ймовірності отримання сигналу Т = 0:

$$C_{\bar{B}}(\bar{A})=\frac{C(\bar{A})\times C_{\bar{\text{Б}}}(\bar{B})}{C(\bar{A})C_{\bar{\text{Б}}}(\bar{B})+C(A)\times C_{\text{Б}}(\bar{B})}=\frac{\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}}{\frac{3}{8}\times\frac{2}{3}+\frac{5}{8}\times\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}.$$

3.5. Розрахунок кількості каналів зв‘язку між абонентами або технічними приладами за формулою Бернуллі

Припустимо, що лінія зв‘язку з‘єднує пункт *А* з 10-ма абонентами пункта *В*. Початкові дані:

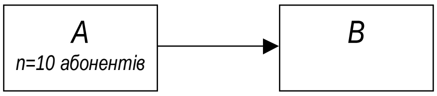

Рис. 3.5.1. Зв'язок між пунктами А та В

1) кількість абонентів пункта *А* $n = 10$;

2) кожний з абонентів у середньому займає лінію 12 хвилин за 1 годину, тобто ймовірність вимагання лінії одним абонентом P = 12 хв./60 хв. = 1/5;

3) припускаємо, що вимоги зв‘язку двох будь-яких абонентів незалежні і тому кількість таких вимог може знаходитись в межах $0...n$.

Питання: яка ймовірність того, що лінію будуть вимагати одночасно K = 0, 1, ..., 10 абонентів?

Рішення цієї задачі отримують за біноміальною формулою (біноміальним закону) Бернуллі, за якою розраховують ймовірність появи події *А* (появи абонента) точно *К* разів при n незалежних іспитах (тільки для дискретних випадкових незалежних подій):

$$C_n(K) = C_n^k \times C^k q^{n-k},$$

де P – ймовірність появи події *А;* $q = 1 - p$ – ймовірність протилежної події (ймовірність непояви події *А);* n – кількість незалежних іспитів (спостережень); *К* – кількість появи події *А* при n спостереженнях (іспитах); $C_n^k = \frac{n!}{K!(n-K)!}$ – кількість сукупностей по *К* елементів із загальної сукупності n. Властивості кількості сукупностей: $C_n^1 = n$; $C_n^n = C_n^0 = 1$.

Якщо прийняти $к$ = 0, 1, ... n, то отримуємо повну групу ймовірностей взаємно несумісних подій, бо інших варіантів подій просто не існує:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n(K) = 1.$$

З цих позицій ймовірність замовлення на зв‘язок при наявності n = 10 абонентів за біноміальною формулою (p = 1/5, q = 4/5):

- K = 0 (немає замовлень):

$$P_{10}(0) = C \times \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = 1\cdot 1\cdot 0{,}108 = 0{,}108;$$

- K = 1 (подано замовлення лише одного абонента):

$$C_{10}(1) = C_{10}^{1} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{1} \times \left(\frac{4}{5}\right)^{9} = 0{,}268;$$

- K = 2 (подано замовлення двох абонентів):

$$C_{10}(2) = C_{10}^{2} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{2} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^{8} = 0{,}302.$$

Таблиця 3.5.1

Ймовірність появи точно *K* подій (*K* замовлень абонентів)

K	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P_{10}(K)$	0,108	0,268	0,302	0,201	0,088	0,026	0,0055	0,0008	$7*10^{-5}$	$4*10^{-6}$	$1*10^{-7}$

У табл. 3.5.1 ми отримали ймовірність того, що лінія буде вимагатися одночасно точно K абонентами. Із графіка рис. 3.5.2, отриманого на базі значень табл. 3.5.1, видно, що $P_{10}(K)$ досягає максимуму при K = 2, тобто найбільш ймовірний випадок, коли зв‘язок буде

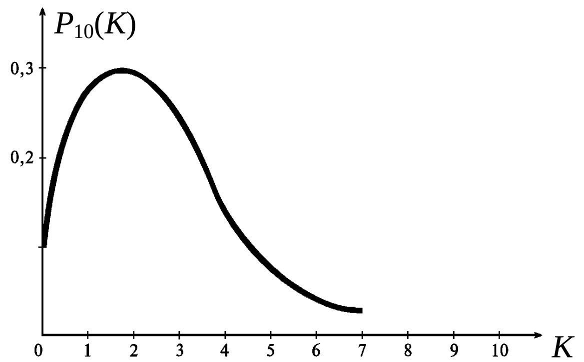

Рис. 3.5.2. Залежність ймовірності появи точно *K* подій $P_{10}(K)$ від кількості подій *K*

Але на практиці значно частіше вимагаються оцінки ймовірності того, що лінія одночасно буде вимагатися не більш ніж K абонентами (K = 0, 1,..., 10), або що подія A відбувається в межах від K = 1 до K = 2. Це дорівнює площі від густини ймовірності появи події. У цьому випадку (як для незалежних подій) можна використати суми ймовірностей:

$$C_{10}(0 \le K \le 1) = C_{10}(0) + C_{10}(1) = 0{,}108 + 0{,}268 = 0{,}376;$$

$$C_{10}(0 \le K \le 2) = C_{10}(0) + C_{10}(1) + C_{10}(2) = 0{,}376 + 0{,}302 = 0{,}678;$$

$$C_{10}(0 \le K \le 3) = \sum_{k=0}^{3} C_{10}(K) = 0{,}678 + 0{,}201 = 0{,}879;$$

$$C_{10}(0 \le K \le 4) = \sum_{k=0}^{4} C_{10}(K) = 0{,}967;$$

$$C_{10}(0 \le K \le 5) = 0{,}993;$$

$$C_{10}(0 \le K \le 6) = 0{,}9985.$$

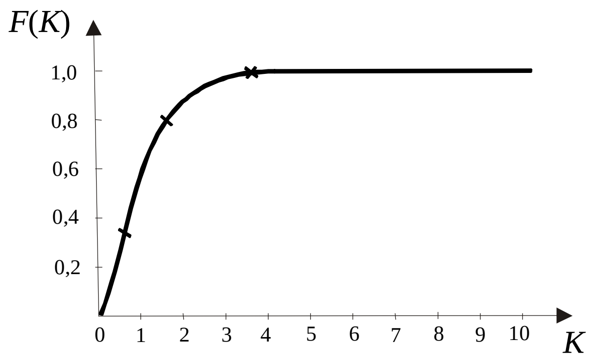

Рис. 3.5.3. Ймовірність вимагання каналу зв'язку при 0 ≤ *K* ≤ 10

Тут використана формула

$$P_{10}(0 \le K \le K2) = \sum_{k=0}^{k=k2} \binom{n}{k} p^k q^{n-k}.$$

Аналіз цих результатів показує, що у даному випадку досить мати 5 каналів зв‘язку між A і B, бо ймовірність того, що зв‘язок будуть вимагати більш ніж 5 абонементів, дорівнює (1 – 0,993) = 0,007, тобто з кожної 1000 вимог лише 7 вимог не мали б негайно вільного каналу.

3.6. Використання формули Стірлінга у формулі Бернуллі

У тих випадках, коли кількість незалежних іспитів велика, обчислення ймовірностей за біноміальною формулою затруднюється через необхідність обчислювання факторіалів:

$$C_n(K) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

де $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

Тому часто використовують замість точної біноміальної формули приблизні формули (факторіал $n!$ недоцільно точно визначати уже при n = 100, бо 100! = 9,33 * 10^{157}; 10! = 3,62 * 10^{6}, однією з яких є асимптотична формула Стірлінга $m! \approx \sqrt{2m\text{р}} \cdot m^m \cdot e^{-m}$.

У формулі Стірлінга при $m \to \infty$ відношення двох з‘єднаних символом «≈» виразів прямується до “1”.

3.7. Ймовірність появи заданої кількості незалежних подій за формулою Лапласа

Трудноці, пов‘язані з практичним використанням формули Бернуллі, призвели до появи менш складних для обчислень формул Лапласа та Пуассона.

Формула Лапласа отримана з біноміальної формули Бернуллі. Вона є асимптотичною формулою, яка використовується замість формули Бернуллі і діє при необмеженому зростанні n:

$$C_n(K) \approx \frac{1}{\sqrt{2_{\pi\sigma}{}^2}} e^{-\frac{\text{д}_k^2}{2\text{у}^2}},$$

де $\text{у} = \sqrt{npq}$; $\text{д}_k = K - (n+1)p \approx K - np$; σ – середньоквадратичне відхилення (стандартне відхилення); K – кількість одночасної появи подій; n – кількість незалежних спостережень ($n \to \infty$).

Ймовірність найімовірнішого числа подій при $K = K_0$

$$C_n(K_0) \approx \frac{1}{\sqrt{2\text{ру}^2}}$$

і спостерігається при $\delta_K = 0$, тобто якщо $K_0 - np \approx 0$, звідки кількість одночасної появи K_0 подій, якому відповідає найбільша ймовірність, дорівнює $K_0 = np$.

Наприклад, для $n = 10$, $p = 0{,}2$ отримуємо $K_0 = np = 10 * 0{,}2 = 2$, що підтверджує раніше отримані дані за формулою Бернуллі.

З іншого боку, з точністю 3σ" (тобто з ймовірністю 0,997) можна вважати, що практично $\sqrt{npq}$ усі · події відбудуться, якщо виконується умова $k - k_0 \leq 3\sigma$ або $k \leq np +$

З останнього рівняння випливає, що можна визначити:

1. Найбільшу кількість каналів зв'язку K між абонентами при відомих значеннях n, p.

2. Кількість абонентів n, *яку можна обслуговувати при відомій кількості каналів* зв'язку K та відомій ймовірності p.

Як приклад розглянемо задачу зв'язку між пунктами A та B за умови, що кожний абонент займає лінію у середньому 6 хвилин за одну годину (тобто ймовірність вимоги лінії одним абонентом дорівнює $P = 6$ хв./60 хв. $= 0{,}1$, а $q = 1 - p = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$) при числі абонентів $n = 1000$.

1. ***Виникають два питання: Скільки потрібно ліній зв'язку, щоб задовольнити практично усі вимоги для числа абонентів n = 1000?***

Для цього використовуємо "правило трьох 3σ", найбільша можлива кількість абонентів, що може зв'язатись одночасно:

$$K \leq K_0 + 3\text{у} = np + 3\sqrt{npq} = 1000 \cdot \frac{1}{10} + 3\sqrt{1000 * \frac{1}{10} * \frac{9}{10}} = 128{,}5.$$

Тобто для безвідмовного обслуговування 1000 абонентів за умови, що кожен з них розмовляє у середньому 6 хвилин у час, лінія зв'язку повинна мати лише 130 каналів.

2. ***Скільки абонентів зможе практично безвідмовно обслужити лінія, якщо при тій же ймовірності p = 1/10 число каналів збільшити до K = 150?***

В цьому випадку із $K \leq K_0 + 3\delta$ отримуємо:

$$np + 3\sqrt{npq} - 150 = 0;$$

$$\sqrt{n} = \frac{-3\sqrt{pq} \pm \sqrt{9pq + 4p \cdot 150}}{2p} =$$

$$= \frac{-3\sqrt{\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10}} \pm \sqrt{9\frac{1}{10} \cdot \frac{9}{10} + 4\frac{1}{10} \cdot 150}}{0,2} = 34,5.$$

Звідси $n = \left(\sqrt{n}\right)^2 = 34,5^2 = 1190$ абонентів.

Якщо збільшити кількість каналів до $K = 200$, то отримуємо

$$\sqrt{n} = \frac{-0,9 \pm \sqrt{0,81 + 4,1 \cdot 200}}{0,2} = \frac{-0,9 \pm \sqrt{0,81 + 80}}{0,2} = \frac{-0,9 \pm 9}{0,2} = 40,5,$$

звідки $n = \left(\sqrt{n}\right)^2 = 40,5^2 = 1640$ абонентів.

Якщо отримуємо два додатні числа, то потрібне число обирається шляхом перевірки числа каналів: $K = np + 3\sqrt{npq}$ при розрахованому *n*.

3.8. Ймовірність появи заданої кількості незалежних подій за формулою Пуассона

При великій кількості незалежних іспитів ($n >> 1$), малій ймовірності одного іспиту ($p \approx 0$) використовувати формулу Бернуллі важко, а формула Лапласа дає великі похибки. Тому при великих значеннях *n* використовують наближені асимптотичні формули. До них належить формула Пуассона. Згідно з теоремою Пуассона (яка розглядає випадок, коли при $n \to \infty$, $p \to 0$ таким чином, що $np \to \lambda$) формула Бернуллі перетворюється у формулу Пуассона:

$$C_n^k = C_n^k p^k q^{n-k} \approx \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \qquad (3.8.1)$$

де $\lambda = pn$.

З іншого боку раніше ми визначили, що $p = t_1 / T_1$;

n – загальна кількість незалежних подій;

t_1 – середній статистичний час, який займає спостереження однієї події за загальний термін T_1 = const.

Розглянемо тепер більш детально значення $p = t_1 / T_1$. Замість T_1 використовуємо T – загальний час, за який зможемо спостерігати всі n подій. Тоді

$$n = \nu T, \tag{3.8.2}$$

де ν – середнє число за одиницю часу: телефонних дзвінків; відмов пристроїв; розладу радіоактивних атомів; електронів, які попали на анод електронної лампи; зміни знаку при телеграфному повідомленні.

$$л = n * p = n * \frac{t}{T} = n * \frac{\nu t}{\nu T} = \frac{n * \nu t}{n} = \nu t.$$

Перетворимо

$$p = \frac{t}{T} = \frac{\nu t}{\nu T} = \frac{\nu t}{n} \tag{3.8.3}$$

Якщо замість t_1 використаємо реальний час t, тоді отримане значення набуває нового сенсу: чим більший час t і чим ближче він до T, тим більша ймовірність спостереження K подій наближується до одиниці.

З формул (3.8.1)-(3.8.3) випливає, що pn = λ = νt, звідки інша формула Пуассона (для випадку, коли при $n \to \infty$, $p \to 0$ таким чином, що $np \to$ λ) має вигляд

$$P_n^K = \frac{(\nu t)^K e^{-\nu t}}{K!}.$$

Тут ймовірність появи точно K подій (вимог зв'язку, телефонних дзвінків, відмов пристроїв та ін.) розглядається як залежність від часу t, за який з'являється подія.

Ймовірність того, що при n іспитах подія не відбудеться:

$$P_n^0 = e^{-л}.$$

Ймовірність появи події не більше m разів при n іспитах:

$$P_n^m\{K \le m\} \approx \sum_{k=0}^{m} \frac{л^K e^{-л}}{K!}.$$

P_n^K, P_n^m

Значення звичайно отримують по таблицях у довідниках, у яких наводяться значення $P(K, \lambda = \text{const})$.

Контрольні завдання

1. Скласти граф-схему інформаційних потоків підприємства або установи; розрахувати кількість ЕОМ, враховуючи їх швидкодію.

2. Написати реферат на 3-4 аркуші, присвячений одній з наступних тем: „Визначення кількості ЕОМ для АСУ”. „Використання імітаційного моделювання для АСУ”. „Визначення інформаційних та матеріальних потоків підприємства або установи”. „Економічна доцільність використання АСУ”. Апаратне або програмне забезпечення АСУ”. „Впровадження АСУ”. „Розподіл інформації”. „Особистий підпис” в АСУ”.

3. Скласти схему для розрахунку надійності безвідмовної роботи АСУ, вважаючи, що АСУ відображає роботу структурної схеми підприємства або установи з урахуванням можливості послідовного та паралельного з’єднання їх блоків. Схема складається на основі отриманої раніше індивідуальної структурної схеми підприємства або установи за умов:

- АСУ охоплює всі елементи раніше створеної індивідуальної структурної схеми підприємства або установи.
- Для кожного підприємства або установи визначається паралельність або послідовність включення елементів АСУ (які обслуговують відповідні елементи структурної схеми підприємства), виходячи з принципу забезпечення працездатності АСУ підприємства у разі виходу з ладу конкретного елемента АСУ. Наприклад, вихід з ладу елемента АСУ, який обслуговує дирекцію (бухгалтерію, планово-економічний відділ, відділ постачання та ін.), призводить до виходу з ладу всієї АСУ, і це означає, що даний елемент АСУ вмикається послідовно; вихід з ладу елемента АСУ, який обслуговує відділ борошномельних виробів у великому гастрономі, не призводить до виходу з ладу всієї системи АСУ, бо працюють інші елементи АСУ по забезпеченню роботи інших відділів, а це означає, для гастроному паралельність $P_e = 0{,}6 - 0{,}2\sqrt[3]{N}$ $P_e = 0{,}5 - 0{,}2\sqrt[4]{N}$ вмикання всіх елементів АСУ, які обслуговують відділи

гастроному.

– Ймовірність безвідмовної роботи для всіх елементів АСУ прийняти однаковою і рівною або де N – порядковий номер студента у групі. Всі ці дані повинні розглядатись як умовні: вони приймаються для спрощення процесу отримання схеми АСУ, призначеної для розрахунку ймовірності безвідмовної роботи. Крім того, у дійсності надійність елементів АСУ значно вища за вказану.

4. Використати схему для розрахунку надійності із п. 3, до якої послідовно увімкнути два блоки з ймовірністю безвідмовної роботи (тут N – порядковий номер студента у групі):

- Група № 1: $p_1 = 0{,}7 – 0{,}01N$; $p_2 = 0{,}8 + 0{,}005N$.
- Група № 2: $p_1 = 0{,}7 + 0{,}004N$; $p_2 = 0{,}8 – 0{,}01N$.

За рахунок резервування отримати ймовірність безвідмовної роботи 0,95.

5. Основні формули для визначення ймовірностей безвідмовної

Таблиця 3.8.1

Найменування блока	**Блок 1**	**Блок 2**	**Блок 3**	**Блок 4**
Кількість паралельних елементів у блоці	1	1	3	3 2
Ймовірність безвідмовної роботи	P_1	P_2	P_3	P_4 (3 елементи) P_5 (2 елементи)

- Група № 1: $P_1 = 0{,}6 – 0{,}02N$; $P_2 = 0{,}7 + 0{,}005N$; $P_3 = 0{,}5 + 0{,}02N$; $P_4 = 0{,}78 – 0{,}005N$; $P_5 = 0{,}4 + 0{,}005N$.
- Група № 2: $P_1 = 0{,}75 + 0{,}04N$; $P_2 = 0{,}6 – 0{,}01N$; $P_3 = 0{,}6 – 0{,}02N$; $P_4 = 0{,}74 + 0{,}005N$; $P_5 = 0{,}6 + 0{,}005N$.

Тут N – порядковий номер студента у групі.

7. Визначити ймовірність точної передачs сигналу в умовах перешкод для наведених даних (табл. 3.8.2.).

Таблиця 3.8.2

Дані передачі сигналу між пунктами ДЖЕРЕЛО та ПРИЙМАЧ в умовах перешкод

ДЖЕРЕЛО		**ПЕРЕШКОДА**		**ПРИЙМАЧ B =1 T = 0)**	
Подія	Апріорна ймовірність	Ймовірність перешкодження інформації	Ймовірність неперешкодження інформації	Ймовірність точної передачі сигналу	Ймовірність перешкодження сигналу
$A = 1$	$P(A) = \dfrac{1}{a+\sqrt{N}}$	$P_A(\mathrm{T}) = C_1$	$P_A(B) = 1 – P_A(\mathrm{T})$	$P_B(A)$	$1 – P_B(A)$
$\bar{A} = 0$	$P(\bar{A}) = 1 – P(A)$	$P_{\bar{A}}(B) = d_1$	$P_{\bar{A}}(\mathrm{T}) = 1 – P_{\bar{A}}(B)$	$P_{\mathrm{T}}(\bar{A})$	$1 – P_{\mathrm{T}}(\bar{A})$

- Група № 1: $a = 0{,}6$; $C_1 = 0{,}1\sqrt{N}$; $d_1 = 0{,}4$.
- Група № 2: $a = 0{,}4$; $C_1 = 0{,}15\sqrt{N}$; $d_1 = 0{,}3$.

Тут N – порядковий номер студента у групі.

8. Початкові дані зв’язку між двома пунктами (A та B):

1) кількість абонентів пункта A $n = 6 + \sqrt{N}$;

2) кожний з абонентів у середньому займає лінію зв’язку $(7 + \sqrt{N})$ хвилин за 1 годину;

3) припускаємо, що вимоги зв‘язку будь-яких абонентів незалежні, і тому кількість таких вимог може знаходитись у межах 0...n.

Розрахувати за формулою Бернуллі ймовірність одночасної появи вимог зв‘язку у кількості (0...n) між абонентами двох пунктів (A, B).

Оцінити ймовірності того, що лінія одночасно буде вимагатися не більш ніж K абонентами (K = 0, 1, ..., n).

9. Визначити за формулою Лапласа потрібну кількість каналів зв‘язку K_1 між абонентами при відомих значеннях кількості абонентів $n_1 = 6 + \sqrt{N}$ та ймовірності надходження однієї вимоги на зв’язок $p_1 = (7 + \sqrt{N})/60$. Визначити кількість абонентів n_2, яку можна обслуговувати при відомій кількості каналів зв‘язку $K_2 = 1{,}4\ K_1$ та відомій ймовірності p_1.