Практична робота №5

Тема: Розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь у частинних похідних методом сіток.

Мета: розробка програми розв'язання хвильового рівняння і рівняння теплопровідності методом сіток, використовуючи метод LU-розкладання для розв'язання алгебраїчних рівнянь.

Стислі теоретичні відомості

У більшості випадків не можливо отримати рішення диференціальних рівнянь у частинних похідних в аналітичному вигляді за допомогою елементарних або спеціальних функцій. Тому важливо чисельне розв'язання диференціальних рівнянь у частинних похідних, яке дає можливість отримати розв'язок у вигляді значень шуканої функції у визначених точках координат для визначених моментів часу (часових прошарків). Найбільш часто використовується для цього метод сіток, або метод скінчених різниць.

Метод сіток полягає у наступному:

- розбивка суцільної області рішення на дискретний набір точок за координатамі і за часом;
- представлення частинних похідних скінченими різницями;
- перехід від диференціального рівняння на суцільної області рішення до системи алгебраїчних рівнянь для дискретного набору точок;
- розв'язання системи алгебраїчних рівнянь на ЕОМ.

Розглянемо кожен з етапів на прикладі рівняння теплопровідності,

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t)$$

де $\psi_1(t)$- крайові умови у точці X=0 в залежності від часового шару,
$\psi_2(t)$- крайові умови у точці $X=Nx*h_x$ в залежності від часового шару,
$\varphi_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу.

1.Розбивка області рішення на набір точок по координаті X з кроком h_x і набір шарів по часу з кроком по часу τ.

Набір точок по координаті X: $x_I = x_0 + i \cdot h_x$; i=0..NX

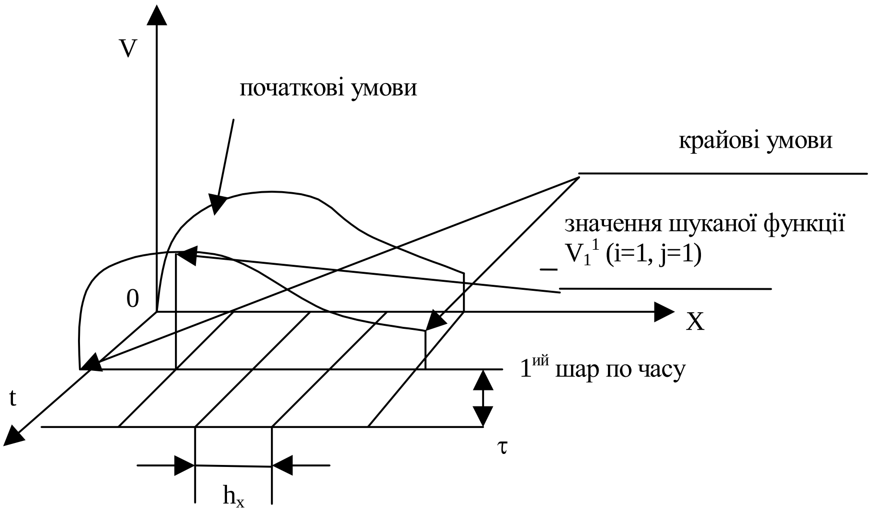
Набір шарів по часу $t_j = j \cdot \tau$; j=0…NT

Позначимо V_I^J –значення невідомої функції на j-му часовому кроці(шарі) у і-й точці по координаті X.

$V_i^0 = \varphi_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу;

$V_0^{\,j} = \psi_1(t_j)$- крайові умови у точці X=0 в залежності від часового шару (j-й часовий шар),

$V_{NX}^{\,j} = \psi_2(t_j)$- крайові умови у точці $X=Nx*h_x$ в залежності ввід часового шару (j-ий часовий шар),



Фіг. 14. Розбивка області інтегрування методом сіток.

2.Представлення частинних похідних скінченими різницями:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{V_{i+1}^{\,j} - V_i^{\,j}}{h_x}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{\frac{V_{i+1}^j - V_i^j}{h_X} - \frac{V_i^j - V_{i-1}^j}{h_x}}{h_X} = \frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h_x^2}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_i^{j+1} - V_i^j}{\tau}$$

3.Перехід до системи алгебраїчних рівнянь

При переході від рівняння у частинних похідних до системи алгебраїчних рівнянь, як у звичайних диференціальних рівняннях, використовуються:

- явні схеми, які використовують частинну похідну функції по координаті в минулому часовому шарі;
- неявні схеми, які використовують частинну похідну функції по координаті в теперішньому часовому шарі.

Так для рівняння теплопровідності при використанні явної схеми інтегрування на кожному j-ому часовому шарі маємо:

$$\frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{\tau} = \alpha^2 \left(\frac{V_{i+1}^{j-1} - 2V_i^{j-1} + V_{i-1}^{j-1}}{h_x^2}\right) + f_i^{j-1}$$

При використанні неявної схеми інтегрування для рівняння теплопровідності на кожному j-ому часовому шарі маємо:

$$\frac{V_i^j - V_i^{j-1}}{\tau} = \alpha^2 \left(\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{h_x^2}\right) + f_i^j$$

де i=1…nx-1

Неявні схеми інтегрування мають значно більшу область стійкості, явні схеми при виборі кроків h_x, τ обмежені умовою

$$\tau \le \frac{1}{2 \cdot h_x^2}$$

При використанні неявної схеми інтегрування для рівняння теплопровідності на кожному j-ому часовому шарі маємо таку систему алгебраїчних рівнянь:

$$\lambda V_{i-1}^j - (1 + 2\lambda) V_i^j + \lambda V_{i+1}^j = -V_i^{j-1} + f_i^j$$

для i = 1…NX-1, $\lambda = \dfrac{a^2 \cdot \tau}{h_x^2}$

Це лінійна система алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої має трьохдіагональну форму тільки при зміні одної координати X. У цьому випадку систему можна розв'язувати методом прогонки. Але у випадку зміни двох або трьох координат матриця коефіцієнтів не має трьохдіагональну форму і метод прогонки використовувати не можна. Тому такі задачі краще розв'язувати методом LU-розкладання, де матрицю коефіцієнтів **A** розкладаємо на верхню трикутну **U**, та нижню трикутну **L** так, щоб **A=L·U**. Розкладання виконуємо тільки 1 раз на першому часовому шарі. При переході на 2,3… часові шари використаємо матриці **L,U,** які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження розв'язку системи.

Алгоритми розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь у частинних похідних

Алгоритм розв'язання рівняння теплопровідності

Алгоритм розв'язання рівняння теплопровідності має такий вигляд**:**

1. Задання **NT, NX, h,** τ**,** λ**,** $\phi(x)$**,** $\psi_1(t)$**,** $\psi_2(t)$**.**

2. Заповнення нульового шару по часу: $x_I = i \cdot h_x$, $V_i^0 = \phi(x_i)$

3. J=1

4. Знаходження значень функції в крайових точках: $t_j = j \cdot \tau$, $V_0^j = \psi_1(t_j)$; $V_{NX}^j = \psi_2(t_j)$.

5. Якщо **J >1**, то переходимо на пункт **7**

6. Формування матриці коефіцієнтів $A_{i,j}$ та її розкладання на нижню трикутну матрицю **L** і верхню трикутну матрицю **U**

7. Знаходження вектора вільних членів: $b_i = -V_i^{j-1}$, $b_1 = -V_I^{j-1} - \lambda V_0^j$, $b_{NX-1} = -U_I^{j-1} - \lambda U_{NX}^j$.

8.Отримання розв'язку системи рівнянь **AX=B**

Оскільки **A=L·U**, то **L·U·X=B**. Позначимо **UX=Z**, тоді **LZ=B**. Завдяки нижньотрикутній формі матриці **L** легко знайти **Z**; $z_1 = b_1/l_{11}$

$$z_i = \frac{(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot z_k)}{l_{ii}}, \quad i=2,\ldots NX-1$$

Тепер за допомогою верхньотрикутної матриці **U** можна знайти **X**, $x_{nx-1} = z_{nx-1}$

$$x_i = \frac{(z_i - \sum_{k=nx-1}^{i-1} u_{i,k} \cdot x_k)}{u_{ii}}$$, i= NX-2,….1

9.Якщо J= NT, то кінець, інакше J=J+1 та йдемо на п.4.

Алгоритм розв’язання хвильового рівняння

Хвильове рівняння має вигляд :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t)$$

де: $y_1(t)$- крайові умови у точці X=0 в залежності від часового шару,

$\psi_2(t)$ – крайові умови у точці $X=Nx \cdot h_x$ в залежності від часового шару,

$\varphi_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу,

$\varphi_2(X_i)$ – значення похідної шуканої функції у початковому шарі по часу.

При зображенні похідних різницями і використанні явно-неявної чисельної схеми інтегрування маємо:

$$\frac{V_i^j - 2V_i^{j-1} + V_i^{j-2}}{\tau^2} = \alpha^2 \left(\frac{V_{i+1}^j - 2V_i^j + V_{i-1}^j}{2h_x^2} + \frac{V_{i+1}^{j-2} - 2V_i^{j-2} + V_{i-1}^{j-2}}{2h_x^2}\right) + f_i^j$$

У результаті маємо таку систему алгебраїчних рівнянь на кожному J-му часовому шарі:

$$\lambda V_{i-1}^j - (1+2\lambda)V_i^j + \lambda V_{i+1}^j = -2V_i^{j-1} + (1+2\lambda)V_i^{j-2} - \lambda(V_{i+1}^{j-2} + V_{i-1}^{j-2}) + f_i^j$$

i=2..NX-1.

$$\lambda = \frac{a^2 \cdot \tau^2}{2h_x^2}$$

Це лінійна система алгебраїчних рівнянь, яку розв’язуємо методом LU-розкладання, але матрицю коефіцієнтів розкладаємо на верхню трикутну U та нижню трикутну L тільки 1 раз на другому часовому шарі. При переході на 3,4…. часові шари використовуємо матриці L,U, які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів.

Внаслідок того, що в хвильовому рівнянні ми маємо другу похідну по часу, то розрахунки починаємо з другого часового шару, використовуючи значення функції у початковому(нульовому) шарі і в першому часовому шарі. Для того, щоб отримати значення шуканої функції у першому часовому шару використовуємо похідну у початковому (нульовому) шарі по часу, яка входить у початкові умови:

$x_i = i \cdot h$, $V_i^0 = j_1(X_i)$, $V_i^1 = V_i^0 + t \cdot j_2(X_i)$, де i=0….NX.

Алгоритм розв'язання хвильового рівняння має такий вигляд**:**

1. Звдання **NT, NX, h, t, l, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$.**

2. Заповнення нульового шару по часу: $x_I = i \cdot h$; $\mathbf{V_i^0 = f(x_i)}$

3. Знаходження значень функції в першому часовому шарі: $x_i = i \cdot h$, $V_i^1 = V_i^0 + t \cdot j_2(X_i)$, де i=0….NX.

4. J=2

5. Знаходження значень функції в крайових точках: $t_j = j \cdot t$, $\mathbf{V_0^j = y_1(t_j)}$; $\mathbf{V_{NX}^j = y_2(t_j)}$.

6. Якщо **J >2**, то переходимо на пункт **8.**

7. Формування матриці коефіцієнтів $\mathbf{A_{i,j}}$ та її розкладання на нижню трикутну матрицю **L** і верхню трикутну матрицю **U**

8. Знаходження вектора вільних членів на j-ому часовому шарі:

$b_i = (1+2l) \cdot V_i^{j-2} - l(V_{i+1}^{j-2} + V_{i-1}^{j-2}) - 2 \cdot V_i^{j-1}$

$b_1 = (1+2l) \cdot V_i^{j-2} - l(V_{i+1}^{j-2} + V_{i-1}^{j-2}) - 2 \cdot V_i^{j-1} - lV_0^j$,

$b_{NX-1} = (1+2l) \cdot V_i^{j-2} - l(V_{i+1}^{j-2} + V_{i-1}^{j-2}) - 2 \cdot V_i^{j-1} - lV_{NX}^j$.

1. Отримання рішення системи рівнянь **AX=B**

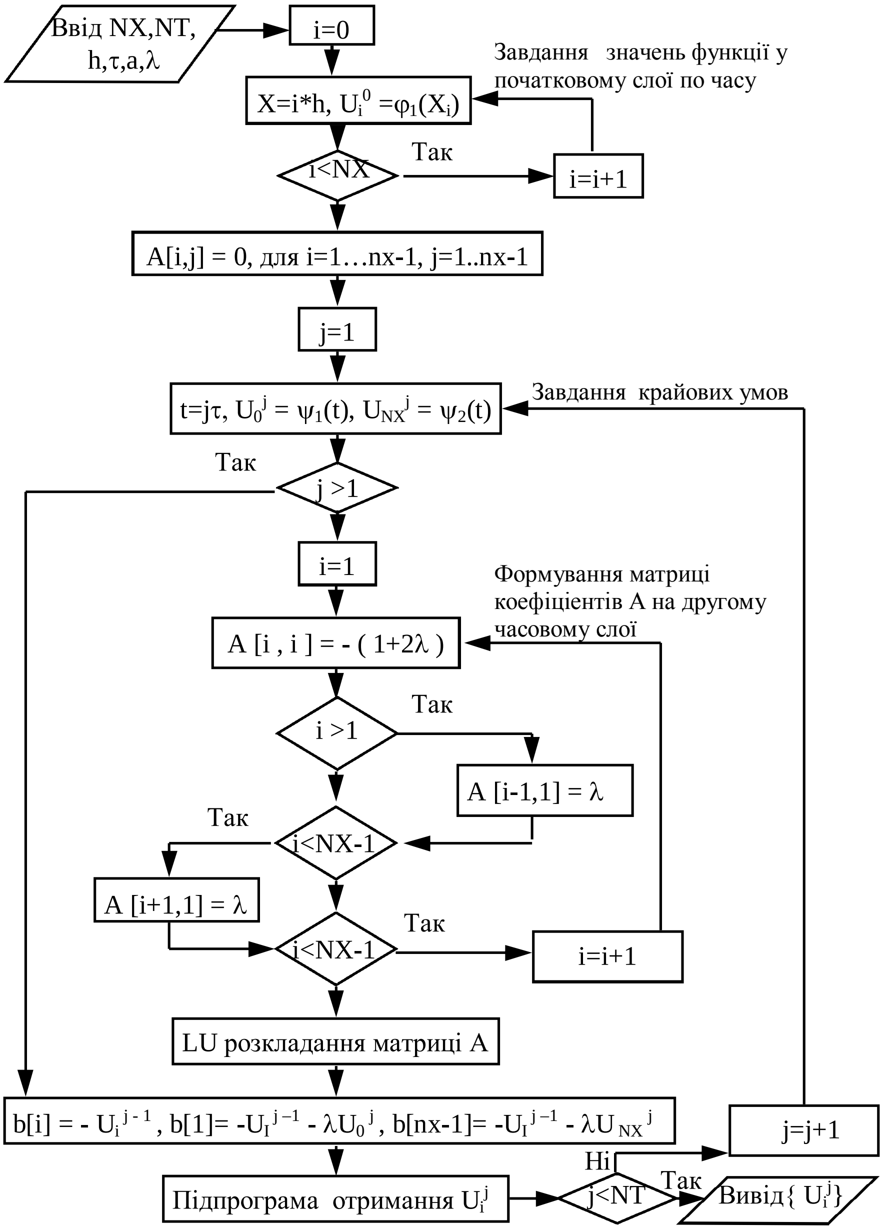
Оскільки **A=L·U**, то **L·U·X=B**. Позначимо **UX=Z**, тоді **LZ=B**. Завдяки нижньотрикутної формі матриці **L** легко знайти **Z**; $z_1 = b_1/l_{11}$

$$z_i = \frac{(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot z_k)}{l_{ii}}$$, i=2,…NX-1

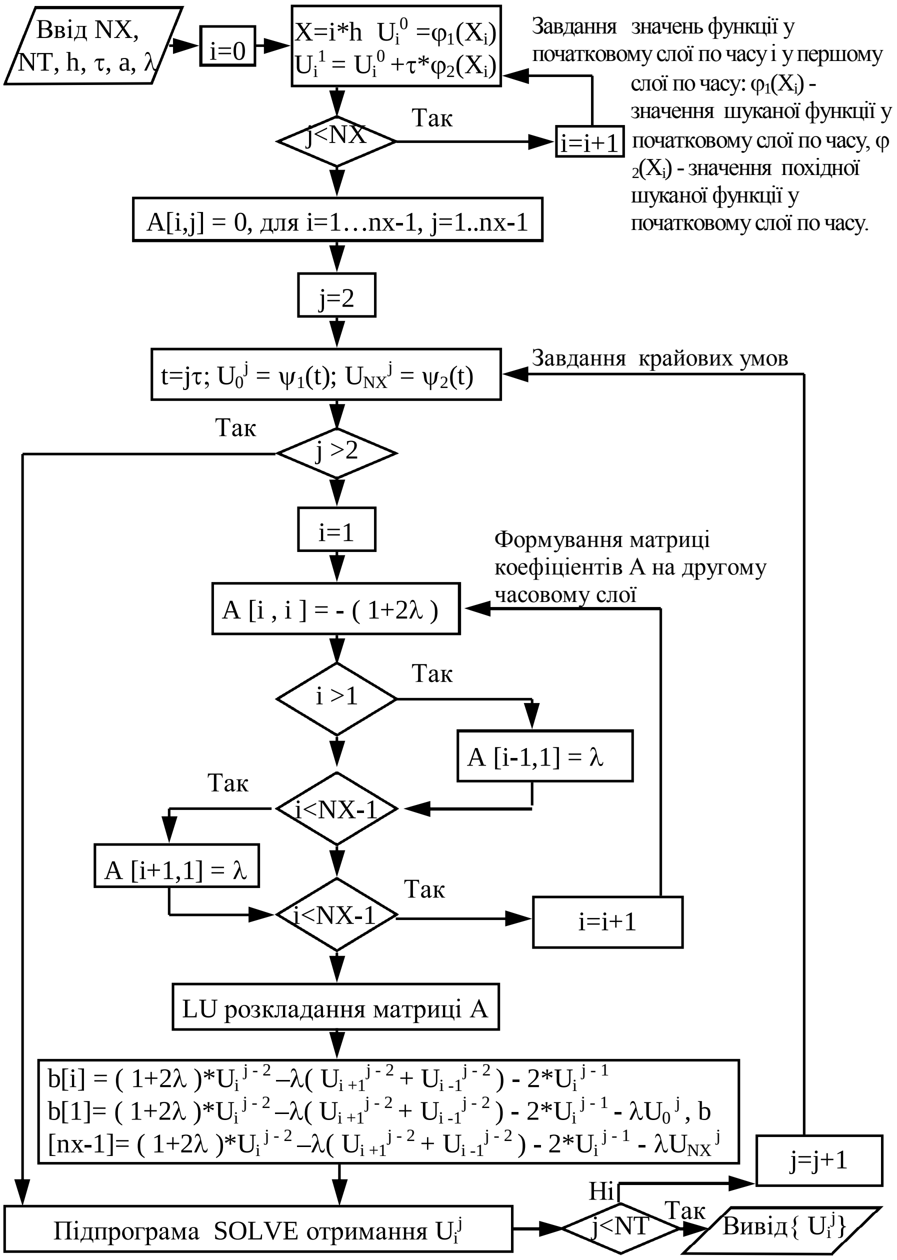
Тепер за допомогою верхньотрикутної матриці **U** можна знайти **X**, $x_{nx-1} = z_{nx-1}$

$$x_i = \frac{(z_i - \sum_{k=nx-1}^{i-1} u_{i,k} \cdot x_k)}{u_{ii}}$$, i= NX-2,….1

1. Якщо J= NT, то кінець, інакше J=J+1 та йдемо на п.5.



Фіг. 15. Блок-схема алгоритму розв’язання рівняння теплопровідності



Фіг. 16. Блок-схема алгоритму розв’язання хвильового рівняння.

Контрольні запитання:

1. Як апроксимуються частинні похідні скінченими різницями?

2. У чому основна ідея метода сіток?

3. Чим відрізняються явні та неявні чисельні схеми інтегрування нестаціонарних рівнянь у частинних похідних?

4. Основні кроки алгоритму для розв'язання хвильового рівняння: , де $y_1(t)$- крайові умови у точці X=0 в залежності від часового шару, $y_2(t)$ - крайові умови у точці $X=Nx \cdot h_x$ в залежності від часового шару $j_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу, $j_2(X_i)$ – значення похідної шуканої функції у початковому шарі по часу.

5. Основні кроки алгоритму для розв'язання рівняння теплопровідності: , де де $y_1(t)$ - крайові умови у точці X=0 в залежності від часового шару, $y_2(t)$ - крайові умови у точці $X=Nx \cdot h_x$ в залежності від часового шару,$j_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі по часу.