Практична робота № 4

Тема: розв'язання задач оптимізації

Мета: знайти екстремум багатовимірної функції при обмеженнях і без обмежень, використовуючи метод спряжених градієнтів

Стислі теоретичні відомості.

1. Головні задачі оптимізації.

Головні задачі оптимізації полягають у наступному.

- Знаходження мінімуму багатовимірної функції при відсутності обмежень. Наприклад: знайти мінімум функції f(x,y).
- Знаходження мінімуму багатовимірної функції при обмеженнях. Наприклад: знайти мінімум функції f(x,y) при обмеженнях типу рівнянь: φ_i (x,y)=0, i=1..k_1, або/та при обмеженнях типа не рівнянь Ψ_i (x,y)>0, i=1..k_2.

Якщо треба знайти максимум функції f(x,y), то знаходять мінімум –f(x,y).

2. Розглянемо знаходження мінімуму двовимірної функції f(x,y) при відсутності обмежень.

Відомо, що у точці екстремуму виконуються умови :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0$$

На перший погляд здається, що можна просто розв'язати цю систему алгебраїчних рівнянь і знайти екстремум функції. Але цей шлях приводить до екстремуму тільки у випадку гладкої квадратичної функції. В інших випадках внаслідок великого інтервалу пошуку та поганого початкового наближення, а також кривизни поверхні f(x,y) ми можемо не отримати розв'язку системи алгебраїчних рівнянь. Тому найчастіше використовуються ітераційні методи пошуку, коли ми наближаємось до точки мінімуму поступовими кроками, виконуючи на кожному кроці одні і ті ж дії – ітерації.

3.Градієнт функції f (x,y) у точці N – вектор, проекції якого на вісі OX,OY – частинні похідні

$$\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_N \quad \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_N \qquad \nabla f = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot i + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot j,$$ де i,j – орти OX,OY

Модуль градієнта дорівнює:

$$|\nabla \mathbf{f}| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}$$

4.Властивості градієнта:

∇**f** – вектор, модуль якого визначає швидкість зміни функції, який е направлений у напрямку максимального збільшення функції.

Розглянемо умови, які виконуються у точці екстремуму двохвимірної функції f (x,y). У точці екстремуму виконуються умови :

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 0 \ ,$$

тобто ∇**f**=0.

Щоб швидше потрапити у точку мінімуму, треба рухатись у напрямку, де:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \min \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \min$$

Тобто треба рухатися у напрямку протилежному градієнту.

5.Градієнтні методи.

Градієнтний метод – послідовність кроків, кожен з яких містить 2 операції:

a)визначення напрямку max крутизни спуску (тобто антиградієнта)

b)переміщення в обраному напрямку на одну відстань або крок.

$\mathbf{X_{n+1}}=\mathbf{X_n} - \|h\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X_n})$ – де

X=colon{x,y};

$$\|h\| = \begin{Vmatrix} h_x & 0 \\ 0 & h_y \end{Vmatrix}$$ - матриця довжини кроків.

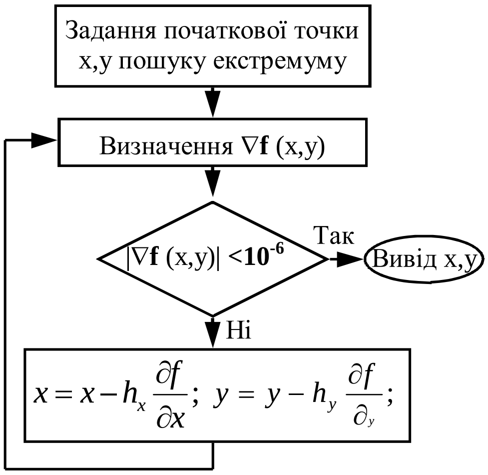
У скалярному вигляді:

$$X_{k+1}=x_k-h_x \frac{\partial f(x,y)}{\partial x};$$

$$y_{k+1}=y_k-h_y \frac{\partial f(x,y)}{\partial y};$$

Алгоритми градієнтних методів.

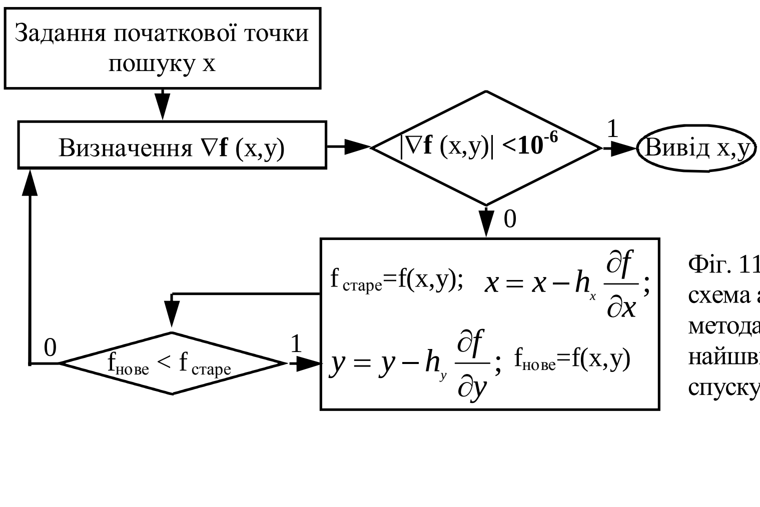
1) Загальний алгоритм градієнтного методу має вигляд приведений на фіг.10:



Фіг.10. Блок-схема алгоритму градієнтного методу.

2) Метод найшвидшого спуску не використовує розрахунок градієнта на кожному кроці руху. На одному кроці ми визначаємо градієнт функції, потім рухаємось у цьому напрямку доки є сенс, доки функція ще зменшується, хоч напрямок вже не буде оптимальним. Тобто нове значення функції повинно бути менше значення функції на попередньому кроці $f_{нове}<f_{старе}$. Якщо ця умова не виконується, тоді перераховуємо градієнт.

Алгоритм метода найшвидкийшого спуску приведен на фіг.11.



Фіг. 11. Блок-схема алгоритму метода найшвидшого спуску.

3) Метод спряженого градієнта.

Для того, щоб зменшити кількість кроків пошуку екстремуму, використовують метод спряженого градієнта, який враховує напрямок руху на попередньому кроці пошуку. Тому напрямок руху на першому кроці пошуку мінімуму :

$\mathbf{S^1 = -\nabla f\,(x^1, y^1)}$

А нові точки пошуку: $x^2 = x^1 - h_x \cdot \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $y^2 = y^1 - h_y \cdot \dfrac{\partial f}{\partial y}$

Напрямок руху на наступному k-ому кроці пошуку мінімуму :

$\mathbf{S^k = -\nabla f\,(x^k, y^k) + \alpha^k * S^{k-1}}$, де коефіцієнт α^k знаходиться з умови спряженості напрямків $\mathbf{S^k, S^{k-1}}$ через матрицю других похідних G : $\mathbf{S^k}G\,\mathbf{S^{k-1}}=0$, де

$$G = \begin{matrix} \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial x)^2} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \cdot \partial y} & \dfrac{\partial^2 f(x,y)}{(\partial y)^2} \end{matrix}$$

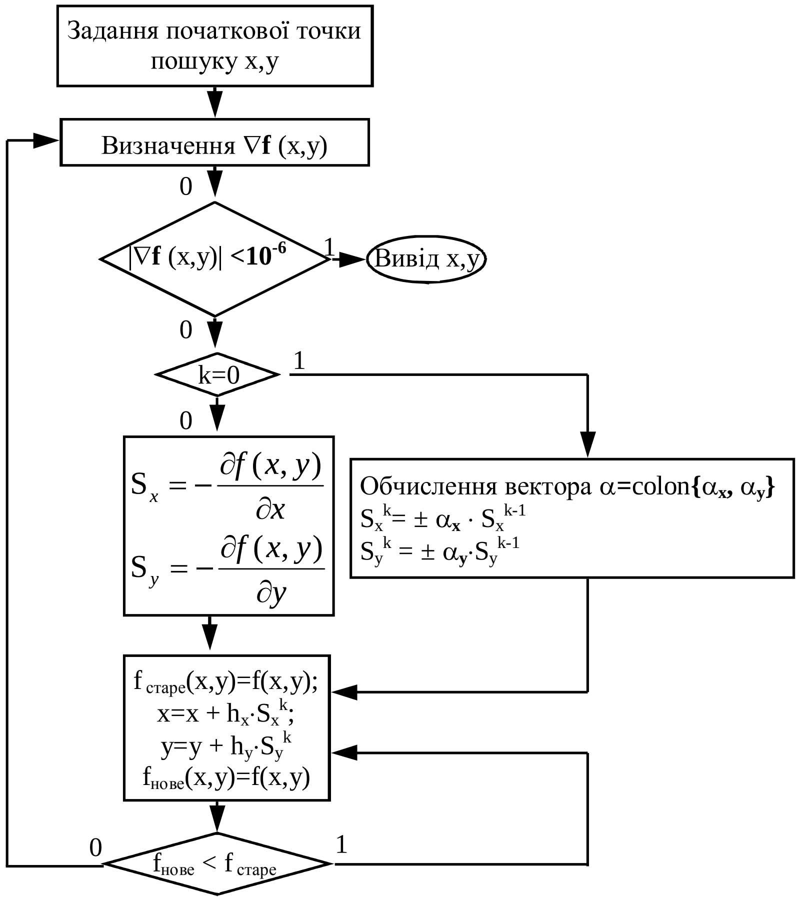
Приблизно матрицю G на k-ому кроці можна подати у вигляді::

$$G = \frac{\nabla f(x^k, y^k) - \nabla f(x^{k-1}, y^{k-1})}{\bar{h} \cdot \bar{S}^{k-1}}$$

Якщо підставити цей вираз в умову $\mathbf{S^k G\ S^{k-1}}=0$, враховуючи те, що по напрямку $\mathbf{S}^k$ ми рухаємось на оптимальну відстань (т. б. доки функція ще зменшується), що враховується виразом $(\mathbf{S^{k-1}})^{\mathbf{T}} * \nabla \mathbf{f}(x^k, y^k) = 0$ (T-операція транспонування), то отримуємо значення коефіцієнта α^k на кожному k-ому кроці пошуку мінімуму

$$\alpha^k = \frac{[\nabla f(x^k, y^k)]^T \cdot \nabla f(x^k, y^k)}{[\nabla f(x^{k-1}, y^{k-1})]^T \cdot \nabla f(x^{k-1}, y^{k-1})}$$

Схема алгоритму пошуку мінімуму функції методом спряжених градієнтів приведена на фіг.12.



Фіг.12. Схема алгоритму пошуку мінімуму функції методом спряжених градієнтів

4)Метод штрафних функцій. Розглянемо знаходження мінімуму двовимірної функції f(x,y) при обмеженнях типу рівнянь.

Наприклад: знайти мінімум функції f(x,y) при обмеженнях типу рівнянь

$$f_1(x,y) = f(x,y) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}\varphi_i^2(x,y) + \frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}(\min(0,\phi_i))^2$$

У такому разі знаходимо

мінімум функції:

$$\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}\varphi_i^2(x,y)+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}(\min(0,\phi_i))^2$$

$\varphi_i(x,y)=0$, $i=1..k$.
де складова

означає штраф (т. б. різке збільшення мінімізуємо функції), якщо обмеження не виконуються. Якщо умови виконуються, цей штраф дорівнює нулю і не впливає на значення фікції.

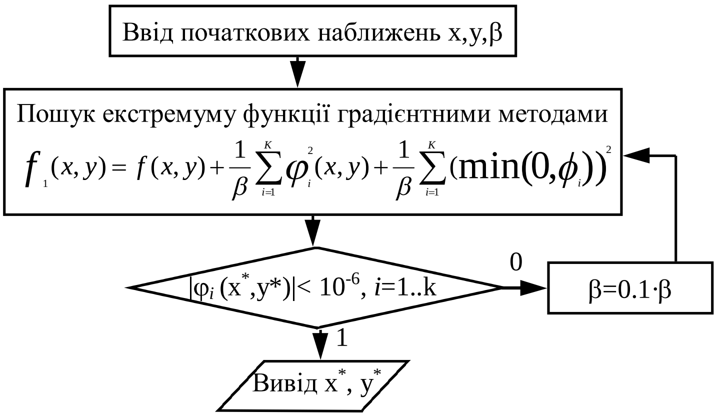
$$f_1(x,y)=f(x,y)+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}\varphi_i^2(x,y)+\frac{1}{\beta}\sum_{i=1}^{K}(\min(0,\phi_i))^2$$

Тому цей метод знаходження мінімуму функції має назву методу штрафних функцій.

Піднесення обмеження до квадрату використовується для того, щоб знак $\varphi(x,y)$ не впливав на значення $f_1(x,y)$.

Алгоритм пошуку екстремуму функції $f(x,y)$ при обмеженнях методом штрафних функцій складається з таких кроків:

а) пошук екстремуму функції



Фіг.13. Схема алгоритму методу штрафних функцій.

b) перевірка умов $\varphi_I(x^*,y^*)=0$, для i=1..k, де x^*,y^*- точка екстремуму,

збільшення штрафу β=0.1·β та перехід до пункту а), якщо хоч одна з умов не виконується.

Схема алгоритму методу штрафних функцій має такий вигляд.

Контрольні запитання:

1.Що таке градієнт функції, чому він дорівнює у точці екстремума?

2.Яка головна ідея градієнтних методів пошуку екстремуму функції?

3.Чим відрізняється метод найшвидкийшого спуску від звичайного градієнтного метода?

4.Яка головна ідея метода спряженого градієнта?

5.Яка головна ідея пошука мінімума функції при обмеженнях (метод штрафних функцій)?