Практична робота № 3

Тема: Розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь

Мета: Розробка програми, яка використовує метод прогнозу та коректування для розв'язання систем диференціальних рівнянь; прогноз виконується за явною формулою чисельного інтегрування, коректування – за неявною формулою чисельного інтегрування.

Стислі теоретичні відомості. Розв'язання системи диференціальних рівнянь.

Система диференціальних рівнянь у формі Коші має вигляд:

$$\frac{d}{dt}\bar{x} = \bar{f}(\bar{x}, t) \; ,$$

де – вектор шуканих функцій, t- незалежна змінна,

-вектор-функція правих частин, тобто похідних шуканих функцій.

Наприклад для системи диференціальних рівнянь (ДР), яка приведена нижче маємо:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_2 + 6x_1 + 2e^{4t}$$

$$\bar{X} = \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \end{matrix}$$

$$\bar{f}(\bar{x},t) = \begin{matrix} x_2 \\ 6 \cdot x_1 + x_2 + 2 \cdot \exp(4 \cdot t) \end{matrix}$$

Спочатку розглянемо схеми інтегрування на прикладі системи ДР з однією шуканою функцією

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

Схема процесу інтегрування зображена на фіг. 3.

Формули інтегрування бувають:

1)явні формули, які використовують похідну функції в минулий момент часу:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t \cdot f(x_{k-1}, t_{k-1}) \qquad (1);$$

2)неявні формули, які використовують похідну в теперішній момент часу:

$$x_k = x_{k-1} + \Delta t \cdot f(x_k, t_k) \qquad (2)$$

Вираз (2) можна подати у вигляді:

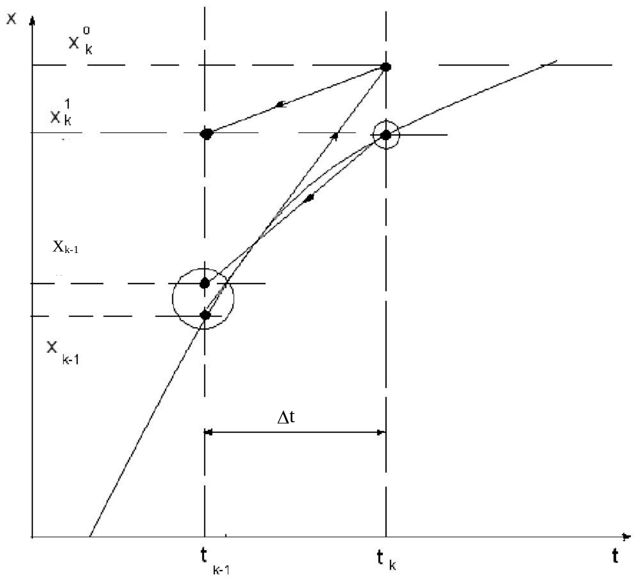
$$x_k - \Delta t \cdot f(x_k, t_k) = x_{k-1} \qquad (3),$$

або

$$x_k - \Delta t \cdot f(x_k, t_k) - x_{k-1} = 0$$

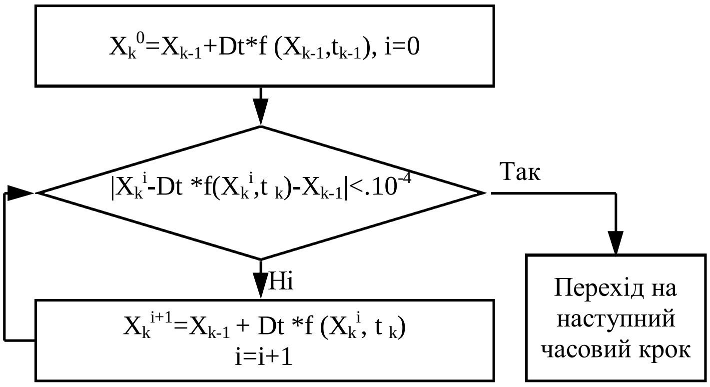
А рівняння (3) можна розв'язувати відносно x_k або методом ітерацій, або методом Ньютона, або іншим. За початкове (нульове) наближення використовують рішення, яке отримують за допомогою явної схеми інтегрування, т. б. ;

$$X_k^0 = X_{k-1} + \Delta t \cdot f(x_{k-1}, t_{k-1})$$



Фіг. 6. Ілюстрація методу ітерацій, який використовується в неявій схемі x_k^0, x_k^1 - нульове і перше наближення до шуканої точки x_k h - крок за часом.

Обчислювальна схема на k- ому часовому кроці на фіг.7.



Фіг.7. Обчислювальна схема на k- ому часовому кроці інтегрування.

Вираз для (i+1)-го наближення x_k^{i+1}, отриманого методом Ньютона, має вигляд:

$$x_k^{i+1} = x_k^i - \frac{(x_k^i - \Delta t \cdot f(x_k^i, t_k) - x_{k-1})}{(1 - \Delta t \cdot \dfrac{\partial f(x_k^i, t_k)}{\partial \cdot x_k^i})} \quad (4).$$

Якщо маємо справу не з одним диференціальним рівнянням, а з системою, то вираз для (i+1)-го наближення має вигляд:

$$x_k^{i+1} = x_k^i - \frac{(x_k^i - \Delta t \cdot f(x_k^i, t_k) - x_{k-1})}{(1 - \Delta t \cdot \dot{M}(x_k^i, t_k))} \quad (5);$$

де $\dot{M}(X_K^i, t_k)$ матриця частинних похідних вектора функції правих частин диференціальних рівнянь $\overline{f}(\overline{X}_K, t_K)$ по $\overline{X}_R$, яка має вигляд:

$\frac{\partial f_1(....)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_1(....)}{\partial x_2}$	....	$\frac{\partial f_1(....)}{\partial x_n}$
$\frac{\partial f_2(....)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_2(....)}{\partial x_2}$	....	....
$\frac{\partial f_n(....)}{\partial x_1}$	$\frac{\partial f_n(....)}{\partial x_2}$	....	$\frac{\partial f_n(....)}{\partial x_n}$

Однак обертання матриці

$$(1-\Delta t\cdot \tilde{M}(X_K^i, t_k)\}$$

не економічне, тому розв'язують методом Ньютона систему нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно $\mathbf{X}_k$:

$$X_k-\Delta t\cdot f(X_k, t_k)-X_{k-1}=0 \quad (6).$$

Для цього методом LU – розкладення розв'язують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно поправок ΔX:

$$\mathrm{J}\cdot\Delta\mathrm{X}=-(X_K^i-\Delta t\cdot \bar{f}(X_k^i, t_k)-X_{K-1}), \quad (7)$$

де J – матриця Якобі для системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (6)

Наприклад:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_2+6x_1+2e^{4t}$$

$$\bar{X}=\begin{matrix}x_1\\ x_2\end{matrix}$$

$$\bar{f}(x,t)=\begin{matrix}x_2\\ 6\cdot x_1+x_2+2\cdot\exp(4\cdot t)\end{matrix}$$

Тоді система нелінійних алгебраїчних рівнянь відносно X_k має вигляд:

$x_1-\Delta t\cdot(x_2)-x0_1=0$ (8)

$x_2-\Delta t\cdot(6\cdot x_1+x_2+2\cdot\exp(4\cdot t))-x0_2=0$

Матриця Якобі для системи нелінійних алгебраїчних рівнянь (8) має вигляд:

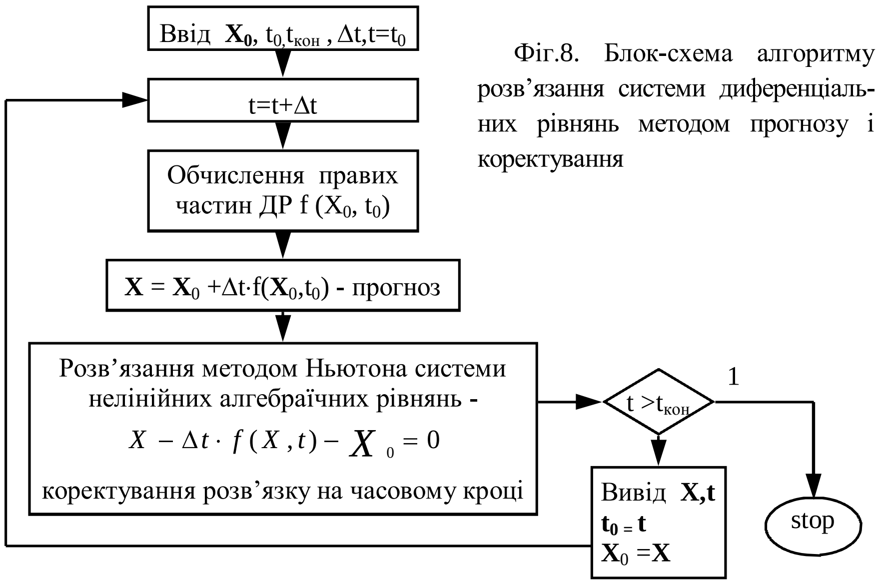
1	-Δt
- Δt·6	1-Δt

Також мають застосування також формули типу Рунге-Кута, які використовують точки у середині часового кроку Δt, будучи явними формулами інтегрування. Неявні формули інтегрування дають меншу похибку і не приводять к виходу з області стійкості рішення при дуже швидкій зміні **X**. Ці формули дозволяють моделювати процеси, які описуються жорсткими системами рівнянь.

Жорсткі системи рівнянь – системи рівнянь, що поєднують функції, які дуже швидко змінюються у часі, і функції, які дуже повільно змінюються. Проблеми, пов'язані з розв'язанням жорстких систем диференціальних рівнянь, такі: по-перше, при інтегруванні тіх функцій, що швидко змінюються явними формулами необхідно брати дуже малий крок по часу Δt, щоб не вийти з області стійкості явних формул, але, по-друге, щоб охопити весь інтервал зміни повільних функцій, ціх малих кроків інтегрування буде так багато, що накопичується неприпустимо велика похибка. Тому жорсткі системи диференціальних рівнянь можна інтегрувати тільки неявними формулами, область стійкості яких є уся ліва частина комплексної пів-площіни чисел (іноді і частина правої півплощіни), тому вони дозволяють збільшити крок по часу і не приводять до накопичення похибки.

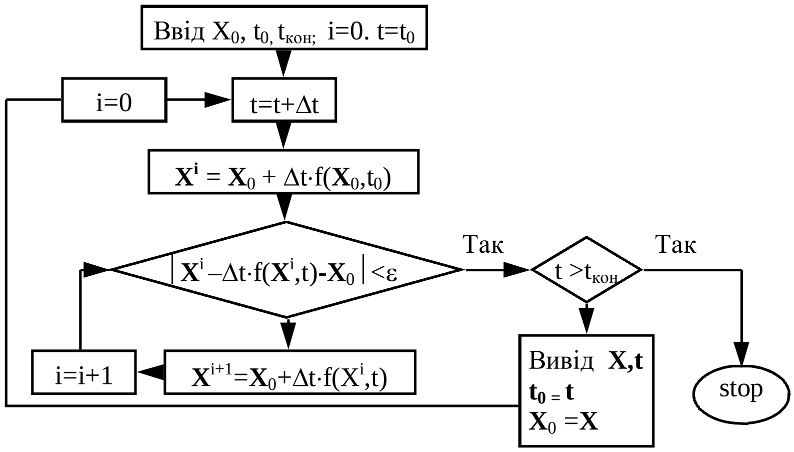
Алгоритми розв'язання системи диференціальних рівнянь методом прогнозу і коректування

Блок-схема алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь методом прогнозу і коректування приведена нижче. У схемі прийняті такі позначення: **X** – вектор шуканих функцій, **X0** – вектор початкових значень, t0- початковий момент часу, t_k–кінцевий момент часу; Δt – крок по часу):



Фіг.8. Блок-схема алгоритму розв'язання системи диференціаль-них рівнянь методом прогнозу і коректування

Блок-схема алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь при коректуванні методом ітерації має вигляд, приведений на фіг.9.



Фіг.9. Блок-схема алгоритму розв'язання системи диференціальних рівнянь при коректуванні методом ітерації.

$\mathbf{X_0}$– вектор початкових значень, t_0 – початковий момент часу, t_k– кінцевий момент часу; h- крок по часу, ε- як завгодно мале число.

Тут коректування відбувається методом ітерації за формулою:

$\mathbf{X}^{i+1}=\mathbf{X}_0+\Delta t\cdot f(X^i,t)$, де i – номер ітерації

Контрольні запитання:

1.Який вигляд мають явні та неявні формули інтегрування для розв'язання нелінійних диференціальних рівнянь?

2.Яка головна ідея метода прогнозу та коректування для розв'язання системи нелінійних диференціальних рівнянь?

3.У чому головна особливість методів типу Рунге-Кута?

4.Який є алгоритм розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь неявним методом з використанням метода простої ітерації для коректування рішення (основні кроки)?

5.Який є алгоритм розв'язання систем нелінійних диференціальних рівнянь неявним методом з використанням метода Ньютона для коректування рішення (основні кроки)?

6.Що таке жорсткі системи диференціальних рівнянь і які особливості їх розв'язання?