Практична робота № 2

Тема: Розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь

Мета: Розробка програми, яка використовує метод Ньютона для розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь

Стислі теоретичні відомості.

Розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона

Припустимо ми маємо систему нелінійних алгебраїчних рівнянь:

$f_1\,(x_1\ldots x_n)=0$

$f_2\,(x_1\ldots x_n)=0$

$\ldots$ (1)

$f_n\,(x_1\ldots x_n)=0$

У векторному вигляді :

$\mathbf{F}(\,\mathbf{X}\,)=0,$ (2)

де $\mathbf{X}=\{\,x_1\ldots x_n\,\}$ -- вектор невідомих;

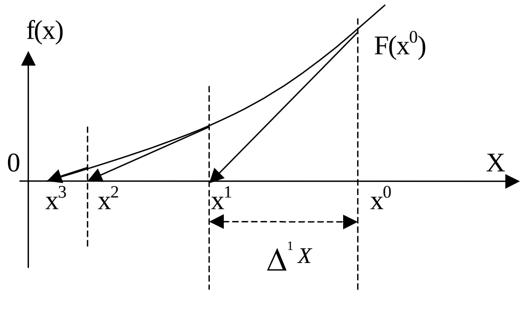
$\mathbf{F}(\,\mathbf{X}\,)=\{f_1(\ldots),\,f_2(\ldots),\,\ldots\,f_n(\ldots)\}$ -- вектор-функція лівих частин.

F(**X**) називають також вектором відхилення (тобто відхилення лівих частин від 0).

Ми отримуємо вектор рішень **X** внаслідок поступових наближень

$\mathbf{X}^0,\,\mathbf{X}^{(1)},\,\ldots,\mathbf{X}^{(k)}$ до того значення **X**, коли abs(**F**(**X**))< ε, де ε дуже маленьке число. Кожна процедура наближення має назву крока ітерації (iterio – повторення), бо ми повторюємо процедуру наближення багато ра-зів, доки не наблизимося з певною точністю до розв'язку **X**, для якого **F**(**X**)=0.

Якщо маємо одне рівняння f (x)=0, то ітераційна процедура пошуку рішення має такий вигляд, приведений на фіг.3.



Фіг.3. Пошук кореня алгебраїчного рівняння методом Ньютона.

Для кожного k-го наближення (k-ої ітерації):

$\Delta^k x = x^{k-} x^{k-1}$,

$$\Delta^{\kappa} X = -\frac{F(\chi^{\kappa})}{\frac{dF}{dx}\Big|\chi^{\kappa}}$$ (дивись малюнок);

або

$$\frac{dF(x)}{dx}\cdot\Delta^{\kappa} X = -F(\chi^{\kappa}) \qquad (3)$$

Для системи n рівнянь (3) має вигляд :

M · (Δ**x**) = – **F(x)**,

де **M** – матриця частинних похідних, яка має назву матриці Якобі.

$\frac{\partial F_1}{\partial x_1}$	$\frac{\partial F_1}{\partial x_2}$	………	$\frac{\partial F_1}{\partial x_n}$
$\frac{\partial F_2}{\partial x_1}$	$\frac{\partial F_2}{\partial x_2}$	………	$\frac{\partial F_2}{\partial x_n}$
………	………	………	………
$\frac{\partial F_n}{\partial x_1}$	$\frac{\partial F_n}{\partial x_2}$	………	$\frac{\partial F_n}{\partial x_n}$

Алгоритм розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона

Алгоритм розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона має такий вигляд :

1.Задаємося початковим наближенням: { $x_1^0, \ldots x_n^0$ }.

2.Перевіряємо: якщо abs ($f_i(x_1 \ldots x_n)$)<10^{-4} для i=1…n, то рішення знайдено. Якщо abs($f_I(x_1 \ldots x_n)$)>10^{-4} для i=1…n, то знаходимо поправки

Δx_I, i = 1…. n розв'зуючи систему рівнянь :

M ·Δ **X** = – **F(X)**, де Δ **X**– вектор поправок { $\Delta x_1 \ldots\ldots \Delta x_n$ }.

3.Для цього обчислюємо матрицю М або аналітично, або чисельно (дав по черзі приріст кожної змінної $dx_{I,}$ i =1…..n, та обчислюючи кожен i-ий стовпець

$$\{\ \frac{F_1(x_1,x_2,\cdots x_i+dx_i,\cdots x_N)-F_1(x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots x_n)}{dx_i}$$

$$\frac{F_2(x_1,x_2,\cdots x_i+dx_i,\cdots x_N)-F_2(x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots x_n)}{dx_i}$$

$$\frac{F_n(x_1,x_2,\cdots x_i+dx_i,\cdots x_N)-F_n(x_1,x_2,\cdots x_i,\cdots x_n)}{dx_i} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.., \})\text{.}$$

4.Розкладаємо М на L та U компоненти алгоритмом Краута або LU-row, використовуючи програму, яка розроблена практичному занятті № 1.

5.Знаходимо розв'язок {Δx_1,……., Δx_n}, використовуючи програму, яка розроблена на практичному занятті №1.

6.Знаходимо нові значення $x_I = x_I + \Delta x_{I,}$ i = 1……n.

7.Обчислюємо { $f_1(\ldots)$, $f_2(\ldots)$, … $f_n(\ldots)$ }.

8. Перевіряємо: якщо $abs(f_I(x_1\ldots x_n))>10^{-4}$ для якого –небудь i, де i=1…n, то повертаємось на п.3, якщо $abs(f_I(x_1\ldots x_n))<10^{-4}$ для кожного $x_{I,}$ то розв'язок системи нелінійних алгебраїчних рівнянь знайден.

Обмеженням для використання методу Ньютона є екстремум в інтервалі пошуку, оскільки у точці екстремуму:

$$\frac{dF(x)}{dx}=0$$

і матриця Якобі вироджується. В таких випадках краще використовувати методи, які працюють повільніше, але нечутливі до екстремумів в інтервалі пошуку (метод ітерації, метод половинного розподілу інтервалу пошуку).

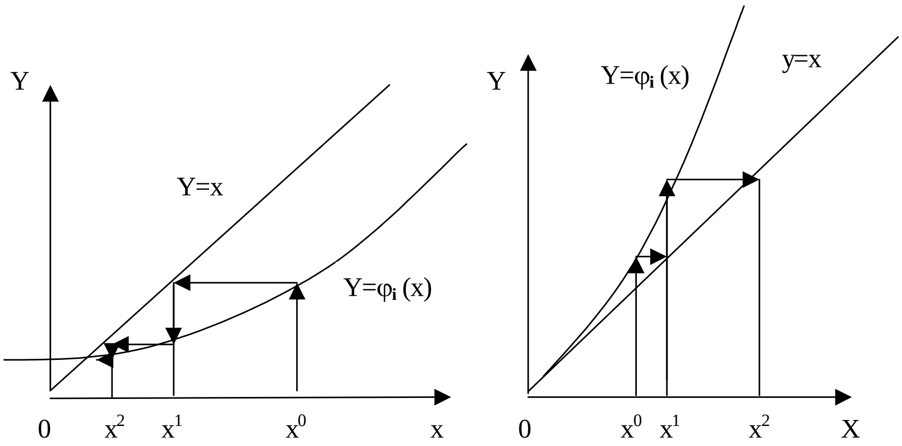
Блок-схема алгоритму розв'язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона приведена на фіг.5.

Розв’язання нелінійних алгебраїчних рівнянь методом ітерації.

Метод ітерації, який використовується для розв’язання алгебраїчних рівнянь має такі основні положення:

- Якщо треба знайти корінь рівняння **F**(**x**)=0, то подаємо рівняння у вигляді **x** = **F**(**x**)+**x**, або **x** = φ(**x**)**,** де φ (**x**) = **F**(**x**)+**x.**
- Наближення до кореня на k-ому кроці шукаємо у вигляді $\mathbf{x}^k = \varphi(\mathbf{x}^{k-1})$
- Ітераційний процес пошуку кореня закінчується, якщо $|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}| < \varepsilon$,
- де ε- задана точність.
- Область використання методу ітерації: $\left|\frac{d\varphi_i(x)}{dx}\right| < 1$

Процес розв’язання алгебраїчного рівняння методом ітерації приведено нижче:



Фіг.4. Розв’язання алггебраїчного рівняння методом ітерації.
а) процес збігається; б) процес розбігається.

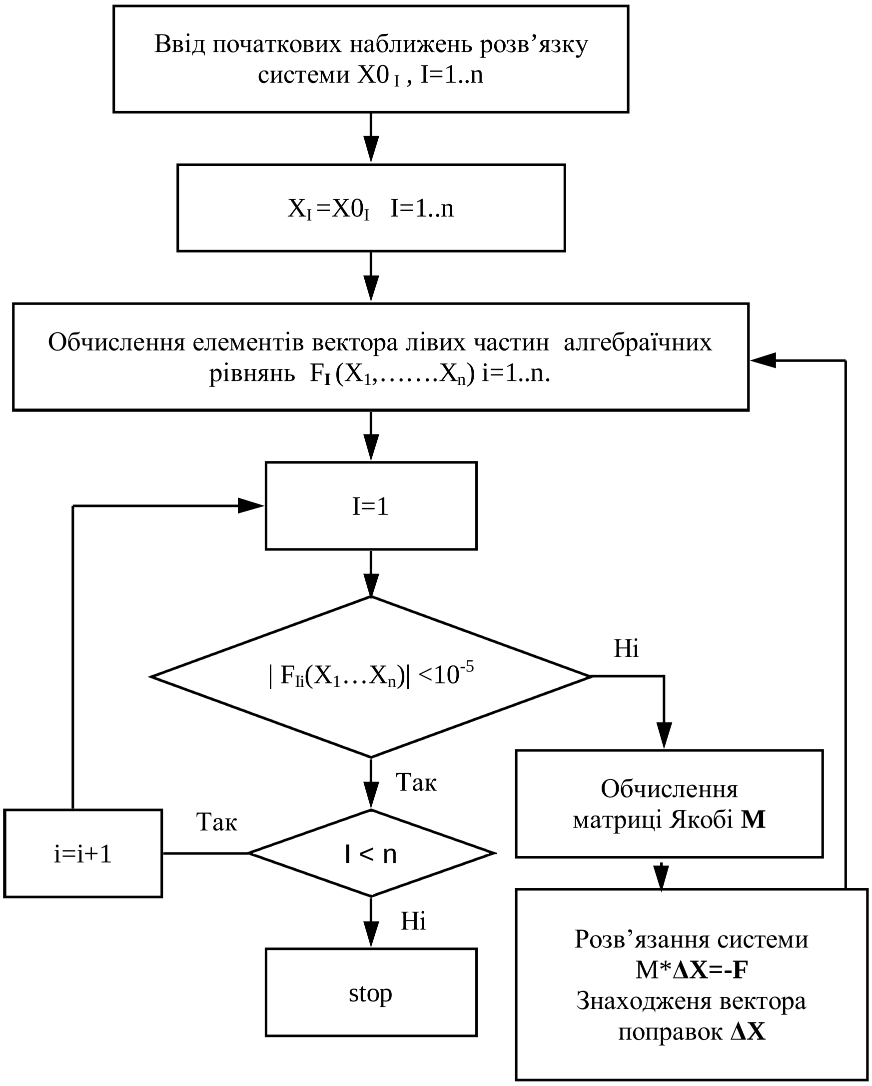
Контрольні запитання

1.Яка головна ідея метода Ньютона для розв’язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь? Як виглядає матриця Якобі?

2.Які методи розв’язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь ви зна єте? Коли який метод зручніше використовувати?

3.Які обмеження має метод Ньютона?

4.При розв’язанні системи нелінійних рівнянь методом Ньютона ми переходимо до системи лінійних рівнянь. Відносно якої невідомої буде ця нова система рівнянь?



Фіг.5. Блок-схема алгоритму розв’язання системи нелінійних алгебраїчних рівнянь методом Ньютона.