Практична робота № 1

Тема: Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Мета: Розробка програми, яка використовує метод LU-розкладання матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Стислі теоретичні відомості.

Метод LU розкладання для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь A·X=B

Дана система лінійних алгебраїчних рівнянь **A·X=B.**

Припустимо, що матриця коефіцієнтів може бути представлена у вигляді

A=L·U, де **L-** нижня трикутна матриця, яка має такий вигляд

L=

L_{11}	0	0	0
L_{21}	L_{22}	0	0
…	…	…	0
L_{n1}	L_{n2}	…	L_{nn}

U – верхня трикутна матриця, яка має такий вигляд

U=

1	U_{12}	…	U_{1n}
0	1	…	U_{2n}
0	0	1	…
0	0	0	1

За допомогою специфічних форм матриць **L** та **U** легко можна знайти корені системи рівнянь **A·X=B.**

Оскільки **A=L·U**, то **L·U·X=B**. Позначимо **UX=Z**, тоді **LZ=B**. Звідки за допомогою нижньотрикутної форми матриці **L** легко знайти **Z**; $z_1 = b_1/l_{11}$

$$z_k = \frac{(b_k - \sum_{i=1}^{k-1} l_{ki} \cdot Z_i)}{l_{kk}}$$, k=2,…N

Тепер за допомогою верхньотрикутної матриці **U** можна знайти **X,** $x_n = z_n$

$$x_k = z_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} \cdot x_j \text{ , k= N-1…1}$$

Отримання матриць L та U.

Розглянемо систему з 3-ма невідомими, матриця коефіцієнтів якої A=L·U, де L – нижня трикутна матриця, яка має такий вигляд

L_{11}	0	0
L_{21}	L_{22}	0
L_{31}	L_{32}	L_{33}

U – верхня трикутна матриця, яка має такий вигляд

1	U_{12}	U_{13}
0	1	U_{23}
0	0	1

A=L·U=

l_{11}	$l_{11}u_{12}$	L_{11} u13
l_{21}	$l_{21}*u_{12}+l_{22}$	$l_{21}*u_{13}+l_{22}*u_{23}$
l_{31}	$l_{31}*u_{12}+l_{32}$	$1_{31}*u_{13}+l_{32}*u_{23}+l_{33}$

З іншого боку,

A=

A_{11}	a_{12}	a_{13}
A_{21}	a_{22}	a_{23}
A_{31}	a_{32}	a_{33}

Знаходження елементів матриць L та U алгоритмом Краута

1.Розглядаємо перший стовпчик: $l_{i1}=a_{i1}$, де i=1..3, $u_{11}=1, u_{iI}=0$, де i =2..3.

2.Розглядаємо перший рядок за головною діагоналлю :

$l_{11}=a_{11}$, $l_{1i}=0$, де j =2..3;

$U_{11}=1$, $u_{1i}=a_{1i}/l_{11,}$ де j =2…3.

3.Розглядаємо елементи другого стовпчика на і під головною діагоналлю:

$l_{i2}=a_{i2} - l_{i1}*u_{12}$, де i=2..3.

$u_{22}=1$, $u_{23}=0$.

4. Розглядаємо елементи другого рядка за головною діагоналлю:

$l_{23}=0$, $U_{23}= (a_{23} - l_{21*}u_{13)})/l_{22.}$

5.Так розглядаємо елементи усіх стовпчиків на і під головною діагоналлю і рядків за головною діагоналлю, якщо порядок системи n>3.

У алгоритмі Краута ми рухаємось по зигзагу ялинки.

Якщо позначити **номер зигзагу як k**, номер поточного рядку як ***i*** номер стовпчику, ***як j,*** формули для знаходження елементів на і під головною диагоналлю (вертикальний хід зігзагу):

$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{im} \cdot u_{mk}$, де I=k…n.

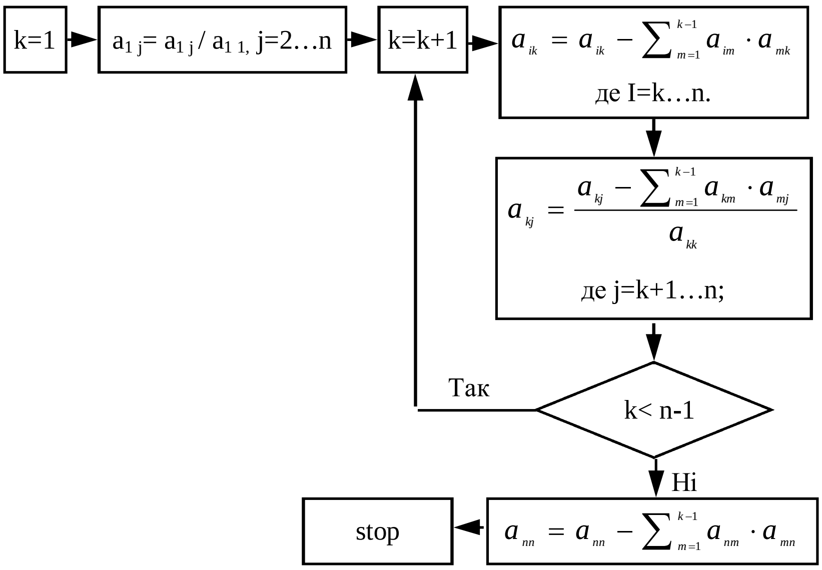
Для знаходження елементів за головною диагоналлю (горизонтальний хід зигзагу):

$$u_{kj} = \frac{a_{kj} - \sum_{m=1}^{k-1} l_{km} \cdot u_{mj}}{l_{kk}}$$, де j=k+1…n;

6.Розглядаємо останній елемент на головній діагоналі:

$l_{33} = a_{33} - (l_{31} * u_{13} + l_{32} * u_{23})$, $u_{33} = 1$.

Блок-схема алгоритму приведена на фіг.1.



Фіг.1. Блок-схема алоритму Краута.

Знаходження елементів матриць L та U алгоритмом LU row.

1.Розглядаємо елементи першого рядка за головною діагоналлю :

$l_{1l}=a_{11}$, $l_{1i}=0$, де i=2..3;

$u_{11}=1$, $u_{1i}=a_{1i}/l_{11}$, де i=2…3.

2.Розглядаємо елементи другого рядка до і на головній діагоналі:

$l_{21}=a_{21}$, $u_{21}=0$,

$l_{22}=a_{22}-l_{21}*u_{12}$, $u_{22}=1$.

3.Розглядаємо елементи другого рядка за головною діагоналлю:

$l_{23}=0$,

$u_{23}=(a_{23}-l_{21}*u_{13})/l_{22}$.

4. **Розглядаємо k-ий рядок** до і на головної діагоналі:

$l_{k1}=a_{k1}$, $u_{k1}=0$,

(у цьому алгоритму k-номер рядка)

$$l_{kj}=a_{kj}-\sum_{m=1}^{j-1} l_{km}\cdot u_{mj}$$

де j<=k,номер стовпця), але u_{mJ} вже знайдено в попередніх рядках, т. я. m>k, l_{km} знайдено у цьому рядку раніше.

5. Розглядаємо елементи k-ого рядка за головною діагоналлю: $l_{kj}=0$,

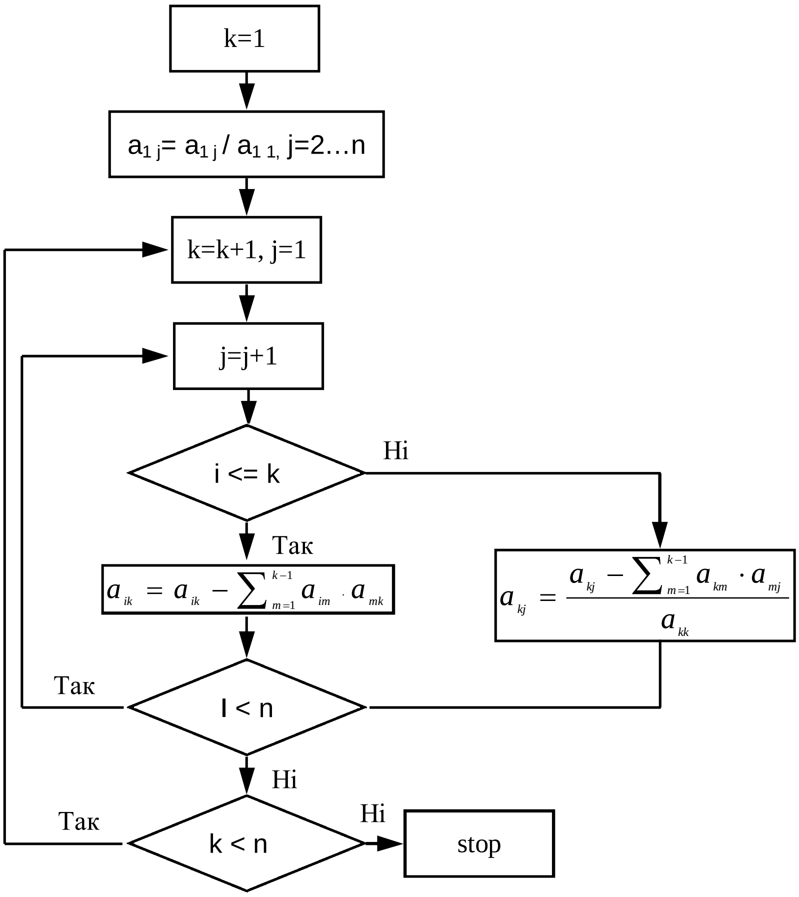
$$u_{kj}=\frac{a_{kj}-\sum_{m=1}^{k-1} l_{km}\cdot u_{mj}}{l_{kk}}$$

де j>k.

Але u_{mJ} знайдено в попередніх рядках, оскільки m<k, l_{km} знайдено у цьому рядку раніше.

6.Так розглядаємо усі рядки.

Блок-схема алгоритму приведена на фіг.2.



Фіг.2. Блок-схема алоритму LU-row

Знайдені елементи матриць L таU розташуємо на місці старої матриці A таким чином:

l_{11}	u_{12}	u_{13}
l_{21}	l_{22}	u_{23}
l_{31}	l_{32}	l_{33}

Тобто 1 і 0 не запам'ятовуємо, просто знаємо де вони розташовані. При програмній реалізації елементи A поступово замінюються елементами L і U.

При разв’язанні систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гауса матриця коефіцієнтів **A** також приводиться до верхньо трикутної матриці, але в приведенні беруть участь і вільні члени системи рівнянь. Тому метод **LU**-розкладання має суттєву перевагу при розв’язанні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо треба розв’язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь багато разів при різних значеннях вільних членів і незмінній матриці коефіцієнтів **A.** Розкладання виконуємо тільки 1 раз. При переході до інших значень вільних членів використовуємо матриці **L** та **U,** які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження роєв’язку системи. При використанні методу Гауса матриця коефіцієнтів **A** приводиться до верхньотрикутной матриці для кожного значення вектора вільних членів.

Контрольні запитання:

- Яка головна ідея методу LU-розкладання для розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь?
- У чому його перевага над методом Гауса?
- Як працює алгоритм Краута?
- Як працює алгоритм LU-row?