

## ПОБУДОВА АНАЛІТИЧНОЇ МОДЕЛІ ТЕРМОЦИКЛУВАННЯ З ФАЗОВИМИ ПЕРЕТВОРЕННЯМИ У ВУГЛЕЦЕВИХ СТАЛЯХ

*У статті описана побудова інтегральної аналітичної моделі термоциклування з фазовими перетвореннями в вуглецевих сталях і знайдені її визначальні параметри. Обґрунтовано немонотонність механічних напружень у металевих зразках у період фазових перетворень. Модель дає можливість визначити характер механічних напружень без проведення прямих вимірів.*

**Ключові слова:** термоциклування, фазові перетворення, механічні напруження, термомеханічні закономірності, термодинамічні закономірності, вуглецева сталь.

*В статье описано построение интегральной аналитической модели термоциклирования с фазовыми превращениями в углеродистых сталях и найдены ее определяющие параметры. Обоснована немонотонность механических напряжений в металлических образцах в период фазовых превращений. Модель дает возможность определить характер механических напряжений без проведения прямых измерений.*

**Ключевые слова:** термоциклирование, фазовые превращения, механические напряжения, термомеханические закономерности, термодинамические закономерности, углеродистая сталь.

*The modelling of the cumulative analytic temperature cycling model with phase changes in carbon steel and determining their parameters are described in this article. The nonmonotony of mechanical stress in metal test specimens during phase changes are validated. The model lets to determine a character of mechanical stress without direct measuring.*

**Key words:** temperature cycling, phase changes, mechanical stress, thermo-mechanical regularity, thermodynamic regularity, carbon steel.

### ПОСТАНОВКА ПРОБЛЕМИ

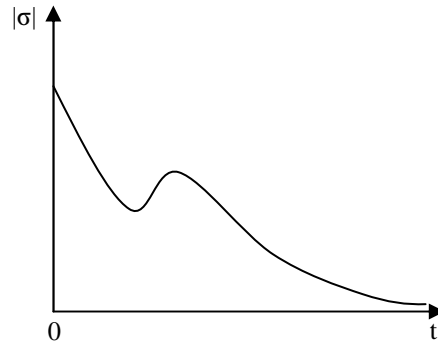
У випадку неможливості прямих вимірювань навантажень працюючих у змінному температурному режимі деталей машин і апаратів необхідно мати аналітичний інструмент моделювання процесів термомеханічних напружень.

**Мета статті** – виразно і максимально просто продемонструвати принципову можливість побудови адекватної інтегральної (для зразка в цілому) моделі термоциклування в навантажених металевих зразках. Тому обмежимося дещо загрубленим розглядом. Проте вже й така загрублена модель цілком задовільно корелює з експериментом. Для доведення останнього твердження теорію було прив'язано до конкретного експерименту, коротко описаному нижче.

Досліди традиційно виконувалися на невеликих (довжиною – 90 мм, діаметром – 7 мм) навантажених циліндричних стержнях з маловуглецевої сталі-20, охолодження якої супроводжується фазовим перетворенням  $\gamma$ -заліза в  $\alpha$ -залізо [1; 2]. Експеримент здійснювався у моделі жорстко защемленого зразка, закріпленого між верхньою основою та пружною динамометричною балкою [3; 4]. Змінювані в ході термоциклування магнітна проникність і температура в центрі зразка визначалися за допомогою осцилографа Н-700 (паралельно для збільшення інформативності експерименту вимірювалась також сила нагрівного струму, пропущеного через зразок, і відповідний спад напруги на ньому, які дозволяли слідкувати за електроопором зразка. Але цих питань ми тут не торкатимемося).

У результаті експерименту було виявлено немонотонну зміну механічних напружень у стержні (в міру охолодження чи нагрівання) з характерним мінімумом та максимумом, схематично поданими на рис. 1.

Ясна річ, така немонотонність пов'язана із поліморфним перетворенням заліза, що переконливо передається запропонованою нижче теорією навіть у наведеному тут спрощеному її варіанті, який не тільки виразно пояснює наслідки експерименту, але й точно виявляє визначальні параметри процесу, одночасно даючи можливість теоретичного відтворення кривої механічних напружень у навантаженому стержні за термограмою охолодження чи нагрівання.



**Рис. 1.** Характер розподілення механічних напружень у металевому зразку

Цим відкривається можливість у випадку потреби не виконувати прямих вимірювань згаданих напружень, оскільки вони теоретично відтворюються за термограмою, яку зовсім не важко побудувати експериментально (така можливість може бути корисною, наприклад, у випадку недоступних прямому вимірюванню навантажень працюючих у змінному температурному режимі деталей машин і апаратів).

### **ОСНОВНІ РІВНЯННЯ ТЕОРІЇ**

Невеликі розміри стержня та висока теплопровідність металу дозволяє розглядати значну частину його середньої зони як систему із зосередженими параметрами, приписавши цій зоні в цілому єдину температуру  $T(t)$ , яка змінюється з часом  $t$ .

Оскільки мова йде про термоцикування навантаженого стержня, в основу теорії повинні бути покладені як термодинамічні, так і термомеханічні закономірності. Відносно невеликий час охолодження чи нагрівання дозволяє не враховувати повзучість матеріалу, обмежуючись законом Гука (з урахуванням теплового розширення чи стиснення). Це – термомеханічні закономірності. Що ж до термодинамічних, то тут буде використано перший і другий принципи термодинаміки для квазістаціонарних процесів, доповнені рядом добре апробованих модельних співвідношень.

Переходимо до побудови необхідних «робочих» рівнянь, починаючи з термодинамічних.

Попередні оцінки показують, що в енергетичному балансі процесу термоцикування можна в першому наближенні знехтувати магнітними та механічними ефектами у порівнянні з тепловими. Тому перший принцип термодинаміки із задовільною точністю становить просте квазістаціонарне рівняння теплового балансу:

$$\delta Q = \delta Q_c + \delta Q_L \quad (1)$$

тут  $\delta Q$  – кількість поданої в систему за час  $dt$  із зовні теплоти;  $\delta Q_c$  – кількість теплоти, яка зумовила зміну температури тіла (завдячуючи його теплоємності);  $\delta Q_L$  – кількість прихованої теплоти фазового перетворення в металі. (При охолодженні, очевидно,  $\delta Q_L < 0$ ). Віднісши баланс (1) до одиниці часу, отримуємо баланс відповідних потужностей:

$$\frac{\delta Q}{dt} = \frac{\delta Q_c}{dt} + \frac{\delta Q_L}{dt} \quad (2)$$

який і покладемо в основу подальших побудов.

Згідно з ґрунтовно апробованими формулами можемо для квазістаціонарного процесу записати:

$$\frac{\delta Q_c}{dt} = cm_0 \frac{dT(t)}{dt}; \quad \frac{\delta Q_L}{dt} = L \frac{dm(t)}{dt}. \quad (3)$$

Тут  $c$  – питома теплоємність металу (яку ми у першому наближенні вважаємо сталюю);  $m_0$  – маса досліджуваної частини стержня;  $m(t)$  – поточна маса металу, що вже зазнав фазового перетворення на момент  $t$ ;  $L$  – прихована теплота цього перетворення.

Для поданої в систему теплоти використаємо відому формулу Ньютона-Ріхмана:

$$\frac{\delta Q}{dt} = f \cdot \{T_c - T(t)\}, \quad (4)$$

котра автоматично враховує другий принцип термодинаміки у найпростішому його формулюванні: теплота самочинно переходить від нагрітого тіла до холодного. У формулі (4)  $T_c$  – це температура оточуючого середовища (термостата);  $f$  – коефіцієнт теплопередачі системи метал-середовище. Зручно зсунути початок відліку температури, запровадивши:

$$\tilde{T}(t) \equiv T(t) - T_c. \quad (5)$$

Оскільки на досліді виконувалася умова  $T_c = \text{const}$ , то за (2), (3), (4) отримаємо перше робоче рівняння:

$$\frac{dT(t)}{dt} + \beta \tilde{T}(t) = \chi \frac{dm(t)}{dt}. \quad (6)$$

в якому:

$$\beta \equiv f / cm_0; \quad \chi \equiv L / cm_0. \quad (7)$$

Параметри  $\beta$ ,  $\chi$ , як коефіцієнти рівняння, (7) і є визначальними параметрами процесів охолодження та нагрівання: саме вони визначають термограму цих процесів.

Спираючись на термомеханічні закономірності, отримуємо друге «робоче» рівняння. Але спершу зазначимо, що вже перше рівняння (6) дозволяє в принципі розв'язати дві взаємозворотні задачі: а) за заданою кінетикою зростання маси нової фази  $m(t)$  теоретично визначити хід термограми  $T(t)$ , або б) за заданою термограмою  $T(t)$  теоретично визначити  $m(t)$ . Зважаючи на неможливість апіорного задавання  $m(t)$  з одного боку і нескладну можливість дослідного визначення термограми  $T(t)$  – з другого, варіант «б» є теоретично більш цікавим. Але для контролю адекватності теорії важливою є задача «а», бо для її якісного аналізу не треба знати конкретного ходу функції  $m(t)$ , а лише її загальний характер: монотонний хід у межах  $0 < m(t) < m_0$  [5].

Звернемося нарешті до термомеханічних закономірностей.

На рис. 2 подано еквівалентну схему механічного навантаження досліджуваного стержня, де динамометричну балку умовно замінено пружиною для формального спрощення теоретичних побудов. За законом Гука маємо:

$$\sigma(t) = E(t)\varepsilon(t). \quad (8)$$

Тут  $\sigma(t) = F(t)/S$  – напруженість в стержні з площею поперечного перерізу  $S$ , викликана силою  $F(t)$ , яка діє вздовж осі стержня;  $E(t)$  – модуль Юнга стержня (повільно змінюваний внаслідок зміни температури);  $\varepsilon(t) = \frac{l(t) - l_0^0}{l_0^0}$  – розтяг стержня (відносний);  $l(t)$  – поточна його довжина;  $l_0^0$  – довжина вільного, тобто не навантаженого стержня.

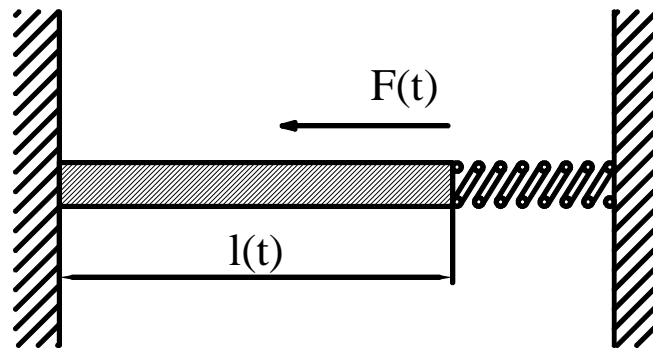


Рис. 2. Схема експериментального обладнання

Позначивши нуліками знизу початкові значення усіх величин:

$$\sigma_0 \equiv \sigma(0); \quad E_0 \equiv E(0); \quad \varepsilon_0 \equiv \varepsilon(0), \quad (9)$$

отримаємо за (8):

$$\sigma_0 = E_0 \varepsilon_0. \quad (10)$$

Оскільки зовнішнє навантаження визначається стрілою прогину динамометричної балки (у нас перерахованою на стиск (від'ємний розтяг) еквівалентної пружини), то можна записати:

$$F(t) = k \Delta x(t); \quad F_0 = k \Delta x_0. \quad (11)$$

де  $k$  – жорсткість еквівалентної пружини;  $\Delta x(t)$  – поточна зміна її довжини (в даній задачі  $\Delta x(t) < 0$ ). В міру охолодження (до якого ми прив'язуємо теорію) та поліморфного перетворення у стрижні, довжина його  $l(t)$ , а з нею і розтяг пружини  $\Delta x(t)$  будуть змінюватись; причому додаткові (до початкових) зміни  $l(t)$  та  $\Delta x(t)$  будуть однаковими за величиною і протилежними за знаком:

$$\Delta x_1(t) = -\Delta l_1(t); \quad (12)$$

$$\Delta x_1(t) = \Delta x(t) - \Delta x_0; \quad \Delta l_1(t) = \Delta l(t) - \Delta l_0. \quad (13)$$

Звідси:

$$F(t) = k(\Delta x_0 - \Delta l_1(t)) = F_0 - k \Delta l_1(t). \quad (14)$$

Тоді згідно з визначенням напруженості:

$$\sigma(t) = \frac{F(t)}{S} = \sigma_0 - k \frac{\Delta l_1(t)}{S}. \quad (15)$$

Виходячи з умови механічної рівноваги, зручно жорсткість еквівалентної пружини  $k$  визначити через початковий модуль Юнга стрижня:

$$k \Delta x_0 = SE_0 \frac{\Delta l_0}{l_0} \Rightarrow k = \frac{SE_0}{l_0} \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0}. \quad (16)$$

Звідси для  $\sigma(t)$  (15) знаходимо:

$$\sigma(t) = \sigma_0 - \tilde{k} \Delta l_1(t), \quad (17)$$

де:

$$\tilde{k} \equiv E_0 \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0 l_0}. \quad (18)$$

Значить, для  $\sigma(t)$  (17) визначальними параметрами будуть  $\sigma_0$  (10) та  $k$  (18). Формула (17) є основною для остаточного складання другого «робочого» співвідношення теорії, яке разом із (6) становить систему основних рівнянь теорії.

### КОМПЛЕКСНА ТЕОРІЯ ПРОЦЕСУ ТА ЇЇ ВИЗНАЧАЛЬНІ ПАРАМЕТРИ

З багатого досвіту застосування термодинамічних та термомеханічних закономірностей впливає доволі широкий діапазон достатньої надійності лінійних апроксимацій, пов'язаних із температурним розширенням твердих матеріалів, підданих навантаженню. Отже з лінійних моделей і слід розпочати.

Для  $\Delta l_1(t)$  (13) сприйmemo:

$$\Delta l_1(t) = \alpha l_0 \Delta T(t) + \Delta l_m(t). \quad (19)$$

Тут  $\alpha$  – коефіцієнт лінійного розширення стержня;  $\Delta l_1(t)$  – видовження, зумовлене фазовим перетворенням в металі під час поліморфних змін у ньому;

$$\Delta T = T(t) - T_0 \quad (20)$$

$\Delta T$  – різниця між початковою  $T_0$  і поточною  $T(t)$  температурою (за довільно вибраної точки її відліку).

Обчислимо  $\Delta l_1(t)$ . Унаслідок фазового перетворення у металі змінюється питомий його об'єм на величину (тут іде вже мова про маловуглецеву сталь-20 при її охолодженні, до якої прив'язано теорію)  $V_\alpha - V_\gamma$  а повний – на

$$\Delta V = (v_\alpha - v_\gamma)m(t). \quad (21)$$

Тут  $V_\alpha, V_\gamma$  – питомі об'єми  $\alpha$ - та  $\gamma$ -заліза відповідно. Звідси для відносної зміни об'єму матимемо:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{V_\alpha - V_\gamma}{V_\gamma} \frac{m(t)}{m_0}. \quad (22)$$

Як відомо, для малих лінійних прирощень видовжених тіл має місце формула:

$$\Delta l_m = \frac{\Delta V}{3S} = \frac{\Delta V}{3V} l_0. \quad (23)$$

$S$  – площа поперечного перерізу стержня. Знаходимо:

$$\Delta l_m(t) = \frac{V_\alpha - V_\gamma}{3V_\gamma} l_0 \frac{m(t)}{m_0}. \quad (24)$$

Таким чином, для  $\Delta l_1(t)$  (19) остаточно маємо:

$$\Delta l_1(t) = \left\{ \alpha \Delta T(t) + \frac{V_\alpha - V_\gamma}{3V_\gamma} \frac{m(t)}{m_0} \right\} l_0. \quad (25)$$

Але згідно з (15), (16) та (25) для  $\sigma(t)$  одержуємо:

$$\sigma(t) = \sigma_0 + \sigma_T(t) + \sigma_m(t); \quad (26)$$

причому:

$$\sigma_T(t) = -E_0 \alpha \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0} \Delta T(t); \quad \sigma_m(t) = -E_0 \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0} \frac{V_\alpha - V_\gamma}{3V_\gamma} \frac{m(t)}{m_0}. \quad (27)$$

З (26), (27) та (10) випливає, що визначальними параметрами для  $\sigma(t)$  (26), (27) будуть наступні величини:

$$\sigma \equiv E_0 \varepsilon_0; \quad \xi_T \equiv E_0 \alpha \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0}; \quad \xi_m \equiv E_0 \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0} \frac{V_\alpha - V_\gamma}{3V_\gamma}. \quad (28)$$

Залишилося відтворити за експериментально визначеною термограмою  $T(t)$  кінетику зростання маси нової фази  $m(t)$  протягом поліморфного перетворення у металі. З цією метою і слугує перше робоче рівняння (6). З нього випливає, що

$$\frac{m(t)}{m_0} = \frac{C}{L} \{ \tilde{T}(t) - \tilde{T}_0 \} + \frac{\beta C}{L} \int_0^t \tilde{T}(\tau) d\tau. \quad (29)$$

У межах даної дещо огрубленої теорії це точна формула. Проте, скориставшись швидкоплинністю фазового перетворення, можна отримати більш зручну для аналізу, хоч і

наближену, формулу. З цією метою розв'яжемо спочатку рівняння (6) відносно  $T(t)$  за початковою умовою:

$$T(0) \equiv T_0 \quad (30)$$

Неважко прямою підстановкою переконатися, що розв'язком крайової задачі (6), (30) буде:

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}_0 e^{-\beta t} + \frac{L}{C} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m(\tau)}{m_0} \right) d\tau \quad (31)$$

Зважимо на те, що  $\frac{d}{dt} \left( \frac{m(\tau)}{m_0} \right) \neq 0$  лише протягом досить короткого періоду фазового перетворення:

$$\tau \in [t_i, t_f], \quad (32)$$

де  $t_i, t_f$  моменти початку та закінчення фазового перетворення (i – initial; f – final). За межами цього періоду  $\frac{d}{dt} \left( \frac{m(\tau)}{m_0} \right) \equiv 0$ . Значить при  $t < T$ ,

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}_0 e^{-\beta t}, \quad (33)$$

тобто температура монотонно спадає. В період  $\tau \in [t_i, t_f]$ , (32) до  $\tilde{T}_0 e^{-\beta t}$  (33) додається швидко зростаючий доданок:

$$\frac{L}{C} \int_0^t e^{-\beta(t-\tau)} \frac{d}{d\tau} \left( \frac{m(\tau)}{m_0} \right) d\tau \approx \frac{L}{C} \frac{m(t)}{m_0}, \quad (34)$$

оскільки на практиці час фазового перетворення  $\gamma$ -заліза в  $\alpha$ -залізо становив приблизно 2 с, а для сталі 20  $\beta \approx 0,05 \div 0,07$ , тому під інтегралом (34)

$$e^{-\beta(t-\tau)} \approx 1 \quad (35)$$

(Найшвидше зростання  $\frac{m(t)}{m_0}$  (34) й зумовлює не монотонність зміни  $\sigma(t)$  (26), (27)). Таким чином, протягом часу (32) згідно із (31), (33), (34) мало місце співвідношення:

$$\tilde{T}(t) = \tilde{T}_0 e^{-\beta t} + \frac{L}{C} \frac{m(t)}{m_0}. \quad (36)$$

Значить, з достатньою мірою точності,

$$\frac{m(t)}{m_0} \approx \frac{C}{L} \left\{ \tilde{T}(t) - \tilde{T}_0 e^{-\beta t} \right\}. \quad (37)$$

$$(t_i \leq t \leq t_f).$$

Не зупиняючись тут на методах визначення моментів  $t_i, t_f$ , відзначимо, що, по-перше,  $\frac{m(t)}{m_0}$  дійсно теоретично відтворюється за термограмою  $T(t)$  (31), (37); а по-друге,  $\frac{m(t)}{m_0}$  за модулем монотонно зростає в той час, як  $\Delta T$  – монотонно спадає. Усе це і зумовлює немонотонну зміну у часі напруженості  $\sigma(t)$  (26), (27) у період фазового перетворення в металі.

У вибраному наближенні для  $\sigma_m(t)$  (27) остаточно матимемо:

$$\sigma_m(t) = -E_0 \frac{\Delta l_0}{\Delta x_0} \frac{V_\alpha - V_\gamma}{3V_\gamma} \frac{C}{L} \left\{ \tilde{T}(t) - \tilde{T}_0 e^{-\beta t} \right\}. \quad (38)$$

На завершення зазначимо, що, як подана вище, так і більш досконала теорія допускає узагальнення на випадок систем із розподіленими параметрами.

**Таким чином**, побудована аналітична модель експерименту з достатньою мірою точності відтворює криву механічних напружень у навантаженому стержні і аналітично обґрунтовує

немонотонність зміни напруженності протягом періоду фазового перетворення у вуглецевих сталях, що дає можливість визначення характеру механічних напружень у металевих зразках без проведення експерименту, що може бути корисним при неможливості прямого вимірювання навантажень працюючих у змінному температурному режимі деталей машин і апаратів.

### **ЛІТЕРАТУРА**

1. Ментковский Ю.Л., Луцык Р.В., Холод В.П. // Инженерно-физич. журн. – 1990 – 57. – № 4. – С. 655-660.
2. Богацька І.Г., Головка Д.Б., Маляренко А.А., Ментковський Ю.Л. Загальні основи фізики. Кн. II. – К.: «Либідь», 1998.
3. Лебедев Ю.М., Кравченко Л.П. // Труды НКИ. – Вып. 66. – Николаев, 1973.
4. Кравченко Л.П., Лебедев Ю.М. // Тезисы докладов, представленных на П-ю Всесоюзную конференцию по сварке цветных металлов. – Ташкент, 1982.
5. Бялик О.М., Ментковский Ю.Л. Вопросы динамической теории затвердевания металлических отливок. – К.: «Высшая школа», 1970.

Рецензенти: д.т.н., професор Сербін С.І.;  
к.т.н., доцент Єсін І.П.

© Воловодюк М.Л., 2010

*Стаття надійшла до редколегії 20.04.2010 г.*