УДК 539.3:534.1

ЛАТАНСКАЯ Л.А.,
Национальный университет кораблестроения, г. Николаев
КАИРОВ А.С.,
Черноморский государственный университет, г. Николаев

ОПТИМИЗАЦИЯ ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПРИ ОГРАНИЧЕНИИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЧАСТОТЫ КОЛЕБАНИЙ

Розлянуто задачу оптимального проектування тонких пружних оболонок обертання при коливаннях з урахуванням дискретного характеру підкріплень. Оптимизація виконується методом штрафних функцій.

The problem of optimal design of vibrations thin elastic shells of revolution with account of discrete placing of reinforcing ribs has been considered. Optimization have been carried out by penalty functions methods.

Постановка проблемы. Оболочечные конструкции широко используются в качестве инженерных сооружений для техногенной безопасности окружающей среды от опасных веществ и процессов. Поэтому вопросы их вибропрочности при динамическом нагружении имеют большое практическое значение.

При проектировании тонкостенных оболочечных конструкций весьма актуальным является вопрос о выборе оптимальной схемы подкреплений ребрами жесткости, которая обеспечивает вибропрочность конструкции при минимальной материалоемкости.

Анализ последних исследований и публикаций. Обзор исследований, посвященных данной проблеме, приведен в работах [1, 2, 4, 5]. В работе [4] с использованием методов математического программирования исследован ряд задач оптимального проектирования оболочек из армированных ортотропных материалов, а в работе [5] рассмотрены задачи оптимизации конструктивных характеристик статически нагруженных оребренных оболочек. Таким образом, развитие методов оптимизации оребренных оболочек при динамическом нагружении представляет актуальную проблему механики оболочечных конструкций.

Целью данной работы является разработка методики расчета оптимальных геометрических параметров подкрепленных изотропных оболочек вращения при ограничении на низшую собственную частоту колебаний.

Изложение основного материала. Рассмотрим задачу многофакторного оптимального проектирования конструкции шарнирноопертой, тонкой, упругой, регулярно подкрепленной стрингерами и шпангоутами цилиндрической оболочки минимальной материалоемкости с заданными габаритными размерами L, R и физико-механическими характеристиками материала обшивки и ребер при ограничении на собственные частоты колебаний.

Построение оптимизационной математической модели базируется на следующих гипотезах. Оболочка рассматривается как система, состоящая из обшивки и жестко соединенных с ней по линиям контакта стрингеров и шпангоутов. Ребра обладают жесткостью на изгиб в радиальной плоскости, на растяжение-сжатие и крутильной жесткостью. Система координат подкрепляющих ребер совпадает по направлению с главными линиями кривизны срединной поверхности оболочки. Напряженно-деформированное состояние обшивки определяется в рамках линейной теории тонких упругих оболочек, основанной на гипотезах Кирхгофа-Лява, а ребер – на основе теории стержней Кирхгофа-Клебша. Стрингеры и шпангоуты, подкрепляющие оболочку, эксцентрично расположены относительно срединной поверхности и имеют прямоугольное сечение с толщинами, соответственно h_1 и h_2 (Рис. 1). Учитывается дискретный характер подкрепляющих ребер и геометрические ограничения на их размеры.

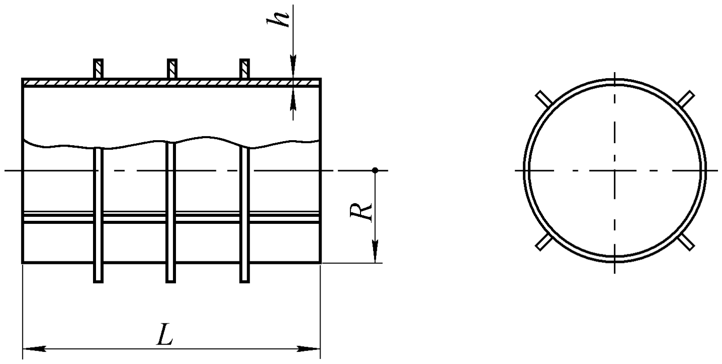

Рис. 1. Расчетная схема оболочечной системы

Задача оптимизации решается методом штрафных функций в сочетании с методом Хука и Дживса. Оптимизируемыми параметрами являются толщина обшивки h, количество N_n, ширина h_n и высота H_n (n = 1, 2) ребер, при которых оболочка имеет минимальную материалоемкость $G_{\min}$, и основная частота ее собственных колебаний удовлетворяет заданным ограничениям $f_{\min} \geq f_0$, где $f_{\min}$ – минимальная собственная частота колебаний оболочки для каждого конкретного случая деформации; f_0 – заданная собственная частота колебаний. Отношение высоты поперечного сечения ребра к его ширине, обеспечивающее местную устойчивость ребер, принимается заданным и равным л$_n$.

Компоненты тензора деформаций обшивки определяются в виде:

$$\begin{aligned}
&e_1 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_1}{\partial x};\; e_2 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{u_3}{R};\\
&e_3 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} + \frac{A_2}{A_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u_2}{A_2}\right);\; e_4 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right);\\
&e_5 = \frac{1}{A_2}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{u_2}{R}\right) + \frac{1}{A_1 A_2}\frac{\partial A_2}{\partial x}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_3}{\partial x}\right);\; e_6 = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A_2}\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{u_2}{R}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Деформации ребер определяются через перемещения центров тяжести их поперечных сечений:

$$\begin{aligned}
&e_{1i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{1i}}{\partial x};\; e_{2j} = \frac{1}{A_{2j}}\frac{\partial u_{2j}}{\partial \theta} - \frac{u_{3j}}{R_j};\; e_{4i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{A_1}\frac{\partial u_{3i}}{\partial x}\right);\\
&e_{5j} = \frac{1}{A_{2j}^2}\frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial \theta^2} + \frac{u_{3j}}{R_j^2};\; e_{6i} = \frac{1}{A_1}\frac{\partial \theta_{\text{кр}\,1i}}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{2}$$

В формулах (1), (2) приняты обозначения: x, и – координаты криволинейной поверхности; A_1, A_2, A_{2j} – коэффициенты Ляме; u_1, u_2, u_3, u_{3i}, u_{2j}, u_{3j}, – компоненты вектора перемещений срединной поверхности обшивки и ребер; и$_{\text{кр}1i}$, и$_{\text{кр}2i}$ – углы закручивания стрингеров и шпангоутов относительно собственных осей; R, Rj – радиусы срединной поверхности оболочки и шпангоутов.

В качестве целевой функции принята материалоемкость оболочки $G_{\min}$, а ограничениями являются предельные размеры геометрических характеристик и низшая частота колебаний. Следовательно, в области допустимых значений оптимизируемых параметров (h, N_n, h_n, H_n) требуется найти минимум функции

$$G_{\min} = \left(2\pi Rh + N_1 h_1 H_1\right)L + \pi\left(2R \pm H_2\right)h_2 H_2 N_2 \tag{3}$$

при ограничении на низшую частоту собственных колебаний

$$f_{\min} - f_0 \geq 0. \tag{4}$$

Значения $f_{\min}$ определяются на основе приближенных решений с использованием одночленной аппроксимации перемещений согласно зависимостям, приведенным в [1]. Для определения $f_{\min}$ может быть также применен метод расчета, описанный в [6], позволяющий применять многомерную аппроксимацию перемещений. При этом могут быть учтены также присоединенные к оболочке твердые тела.

Область допустимых значений оптимизируемых параметров, учитывающих дискретное расположение ребер, определяется системой неравенств, представляющих собой условия работоспособности и технологической осуществимости конструкции оболочки:

$$\begin{aligned} &h_{\min} \leq h \leq h_{\max}; \quad && h_{n\min} \leq h_n \leq h_{n\max}; \\ &H_{n\min} \leq H_n \leq H_{n\max}; \quad && N_{n\min} \leq N_n \leq N_{n\max}; \end{aligned} \tag{5}$$

Индексами "max" и "min" обозначены предельные значения соответствующих параметров. Высота поперечного сечения ребра H_n определяется нормативным параметром л = H_n/h_n, характеризующим местную устойчивость ребер. На упругую систему дополнительно могут быть наложены различные ограничения механического и конструктивного характера. Задача формулируется как задача нелинейного программирования.

Вводя обозначения: $x_1 = h$, $x_2 = h_1$, $x_3 = h_2$, $x_4 = N_1$, $x_5 = N_2$, $Q(\vec{x}) = G_{\min}$ и подставляя их в (3)-(5), получаем задачу частично целочисленного нелинейного программирования. Требуется найти неотрицательные значения параметров вектора $\vec{x} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, которые минимизи-

$$Q(\vec{x}) = min\left\{\left(2\pi R x_1 + \lambda_1 x_2^2 x_4\right)L + 2\pi R\,\lambda_2 x_3^2 x_5\right\} \tag{6}$$

и удовлетворяют ограничениям (4) на низшую частоту собственных колебаний и геометрическим ограничениям (5) на размеры варьируемых параметров, где x_4 и x_5 – целые числа.

Следовательно, полученная математическая модель представляет собой задачу нелинейного программирования с нелинейной функцией цели и смешанными ограничениями типа неравенств:

$$Q(\vec{x}) \to \min, \quad g_m(\vec{x}) \geq 0 \quad (m = 1, 2, ..., M), \tag{7}$$

где $g_m(\vec{x})$ – функционально заданные ограничения.

Для ее решения применяется метод штрафных функций [3, 7, 8], с помощью которого исходная задача условной оптимизации преобразуется в последовательность задач безусловной оптимизации путем использования специальных барьерных функций. Тогда в соответствии с поставленной задачей новая обобщенная функция цели запишется в виде:

$$\Phi(\vec{x}) = Q(\vec{x}) + \Theta(\vec{x}, r) \to \min, \tag{8}$$

где: $\Theta(\vec{x}, r) = r\sum_{m=1}^{M}\left(1/g_m(\vec{x})\right)$ – барьерная функция, определенная внутри допустимой области оптимума Ω, значение которой при нарушении ограничений резко возрастает; r – неотрицательный параметр штрафа.

Таким образом, решение задачи (7) заменяется, эквивалентной задачей вычисления безусловного экстремума обобщенной функции (8), то есть может быть представлено в виде процедуры по отысканию точки экстремума $\vec{x}^*$, в которой $\Phi(\vec{x})$ достигает своего минимального значения. Для поиска безусловного экстремума функции (8) используется модифицированный метод Хука и Дживса [3, 7], который не требует непрерывности целевой функции и существования ее производных, а также позволяет выполнять эффективный поиск минимума "овражных" функций. При его реализации используется фиксированное множество координатных направлений, выбираемых рекурсивным способом. Поиск начинается с некоторой произвольно выбранной базисной точки $\vec{x}_0 \in \Omega$ внутри области допустимых решений Ω. Учет целочисленности части переменных в выражениях (8) состоит в том, что округление целочисленного компонента вектора $\vec{x}^*$ осуществляется в момент, предшествующий решению задачи, до проверки принадлежности точки оптимума $\vec{x}^*$ области допустимых решений. В дальнейшем поиск выполняется с учетом целочисленности переменных.

Результаты исследований. В качестве примера рассмотрим задачу определения оптимальных геометрических характеристик оребренной стальной шарнирноопертой цилиндрической оболочки с использованием разработанного алгоритма при следующих значениях исходных данных: L = 500 мм; R = 200 мм; $л_1$ = $л_2$ = 10; f_0 = 700 Гц. На варьируемые параметры налагались следующие ограничения: 0,1 ≤ h ≤ 1 мм; 0,5 ≤ h_1 ≤ 2 мм; 0,5≤ h_2 ≤ 2 мм; 12≤ N_1 ≤ 60; 1≤ N_1 ≤ 10.

В результате оптимизации получены следующие характеристики: h = 0,24 мм; h_1 = 0,50 мм; h_2 = 1,36 мм; N_1 = 12; N_2 = 3; $f_{\min}$ = 705,4 Гц; $G_{\min}$ = $182{,}7 \cdot 10^3$ мм. Форма колебаний соответствует общему случаю деформации.

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в рассмотренном диапазоне параметров при заданной основной частоте колебаний оптимальной является оболочка, имеющая относительно слабую обшивку и достаточно большое число сильных ребер. Результаты вычислений удовлетворительно согласуются с данными численного решения рассматриваемой задачи [6] и экспериментальными данными.

Выводы. На основе уточненной математической модели колебаний конструктивно неоднородных оболочек и метода штрафных функций разработана методика расчета оптимальных геометрических параметров оболочечных конструкций при ограничении на низшую собственную частоту колебаний. Исследованы особенности влияния подкрепляющих ребер на частоты и формы свободных колебаний тонких упругих подкрепленных оболочек вращения.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Амиро И.Я.* Методы расчета оболочек: В 5 т. / *И.Я. Амиро*, *В.А. Заруцкий*. – К.: Наук. думка, 1980. – Т. 2. – 368 с.
2. *Амиро И.Я.* Учет дискретного размещения ребер при изучении напряженно-деформированного состояния, колебаний и устойчивости ребристых оболочек / *И.Я. Амиро*, *В.А. Заруцкий* // Прикл. механика. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 3-22.
3. *Базара М.* Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы / *М. Базара*, *К. Шетти*. – М.: Мир, 1982. – 583 с.
4. *Баничук Н.В.* Оптимизация элементов конструкций из композиционных материалов / *Н.В. Баничук*, *В.В. Кобелев*, *Р.Б. Рикардс*. – М.: Машиностроение, 1988. – 224 с.
5. *Заруцкий В.А.* Оптимизация подкрепленных цилиндрических оболочек / *В.А. Заруцкий*, *Ю.М. Почтман*, *В.В. Скалозуб*. – Киев: Вища школа, 1990. – 138 с.
6. *Каиров А.С.* О собственных колебаниях подкрепленных оболочек с присоединенными телами / *А.С. Каиров*, *В.П. Шевченко* // Збірник наук. праць УДМТУ. – Миколаїв: УДМТУ, 2000. – № 5. – С. 121-130.
7. *Химмельблау Д.* Прикладное нелинейное программирование / *Д. Химмельблау*. – М.: Мир, 1975. – 534 с.
8. Численные методы условной оптимизации / [Под ред. *Ф. Гилла, У. Мюррея*]. – М.: Мир, 1977. – 292 с.

Стаття надійшла до редакції 05.12.2008 р.