

УДК 504.75.06:629.584

ТРУНОВ А.Н., Николаевский государственный гуманитарный университет им. Петра Могилы,  
г. Николаев, Украина

**Трунов Олександр Миколайович** – кандидат технічних наук, в.о. професора, перший проректор, завідувач кафедри медичних приладів та систем Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили.

Коло наукових інтересів: підводна техніка, робототехніка, сенсорна техніка, моделювання нелінійних динамічних процесів, методи розв'язку нелінійних крайових задач, дослідження операцій. Автор 130 наукових праць та шістнадцяти винаходів. Науковий керівник проектів створення газових підшипників та ущільнень турбомашин на швидких нейтронах з газовими та рідинно-металевими теплоносійми, сенсорних захватів роботизованих комплексів і систем позиціонування, підводного маніпулятора, що виконувались за програмами: ДКНТ СРСР “Довговічність та надійність”; Міністерств галузей оборонної промисловості за програмою “Робототехніка”; “Засвоєння світового океану”, проектом “Уран-1” та інші. Співкерівник спільного американсько-українського проекту “Створення програмного забезпечення для визначення складу речовини”, виконаного за підтримкою Фонду цивільних

## ДИНАМИКА АВАРИЙНО-СПАСАТЕЛЬНОГО АППАРАТА В УСЛОВИЯХ ПОДВОДНЫХ ТЕЧЕНИЙ И ШКВАЛОВ

*Поставлена та розв'язана задача нестационарних коливань підводного апарата та системи його закріплення. Наведено розв'язки для коливань окремих елементів кріплення та підводного апарата. Вивчено вплив видів кріплення на параметри коливань апарата.*

*The problem of non stationary oscillations of the submersible and system of it's fixation are observed. Solution for oscillations of the submersible and deferent elements of it's fixation system are proposed. The influence of fixsator types on the parameters of submersible oscillations are studied.*

**Р**асширение технологических возможностей подводных аппаратов определяется способностью позиционироваться и стабилизировать свое пространственное положение. Как правило, для решения задач техногенной безопасности необходимо обеспечить ремонт или осмотр подводного объекта в условиях шторма или сильных подводных течений. В таких условиях позиционировать и далее стабилизировать это положение в пространстве продолжительное время за счет движителей практически не возможно. Одним из наиболее экономически целесообразных технических решений является применение захватных устройств, соединенных с

подводным аппаратом удерживающими звеньями. Последние, находясь под действием изменяющихся сил и моментов, совершают колебания.

Задача о перемещениях морского подвижного объекта в условиях волнения рассматривалась неоднократно для разных типов судов, доков и других заякоренных конструкций [1-4]. Ее решение, как показано в работах [1-4], является сложнейшей математической нелинейной задачей. Инженерные же методы расчета построены на ряде допущений, что размеры объектов больше или соизмеримы с длинами набегающих волн. Методики расчета, полученные на их основе, существенно зависят

от особенностей конструкции и не могут быть распространены на задачи, в которых размеры заякоренного объекта намного меньше длин волн или же периоды колебаний объекта больше характерных времен внешних возмущений. В связи с изложенным, задача о динамике аварийно-спасательного аппарата в условиях подводных течений и шквалов является актуальной как инженерно-технической, так и математической задачей. Обобщенная схема крепления подводных аппаратов представлена на рис. 1. Проблема обеспечения работоспособности системы в целом может быть разрешима за счет создания условий при которых относительные колебания аппарата отсутствуют или сведены к минимуму. Она решается посредством применения захватов, соединенных с аппаратом с помощью жестких или гибких связей, усилия прижима в которых регулируются. Однако расчет величины усилий, необходимых для реализации надежного зарепления системы, и расчет амплитуд перемещений разных точек конструкции является одной из недосаточно исследованных задач. Ее решение сопряжено с трудностями определения усилий, действующих на аппарат, которые, в свою очередь, зависят от его пространственного положения и скорости, поэтому проектирование таких систем связано с необходимостью определения усилий и моментов в элементах конструкций как результат решения задачи о его движении, которое описывается системой нелинейных нестационарных краевых задач и алгебраических уравнений. Последняя, как показано в работах [4, 5], решается за счет совместного введения оправданных упрощающих допущений и применения приближенных математических методов. Одним из эффективных приближенных аналитических методов, применяющихся в последнее время для решения разнообразных технических задач [7-14], является метод рекуррентной аппроксимации [5-7]. Несмотря на то, что в работах [15-16] приведены результаты теоретического исследования сходимости и монотонности метода для нестационарных задач динамики, главной проблемой, которая не изучалась, является постановка и применение его к решению задачи о динамике аварийно-спасательного аппарата в условиях подводных течений и шквалов и исследование особенностей этих колебаний.

Таким образом, главной неразрешенной проблемой является задача о колебаниях связанной системы под действием нестационарного нагружения.

Целью данной работы являются постановка и решение системы уравнений динамики подводного аппарата и системы его закрепления.

Постановка задачи о колебаниях закрепленного аппарата. Поставим задачу исследования продольных, крутильных и поперечных колебаний, возникающих в удерживающем звене, как задачу о движении отдельных элементов под действием архимедовых, гравитационных, гидродинамических и инерционных сил, действующих на подводный аппарат и отдельные звенья. Действие на подводный аппарат удерживающих гибких звеньев в виде канатов заменим приложенными к нему силами, а действие подводного аппарата на крепежный элемент заменим изгибающим  $M_{\text{и}}$  и крутящим  $M_{\text{кр}}$  моментом, а также продольной силой прижатия  $N$  и проекцией реакции опоры на плоскость перпендикулярную к оси удерживающего звена  $R$  (см. расчетную схему рис. 2). Разобьем задачу на две. Задачу статики и задачу динамики. Решение задачи статики позволит определить уравнение изгибающей линии, которое будет использовано в качестве начального условия для задачи динамики.

Далее будем рассматривать колебания системы под действием дополнительных внешних воздействий, возникающих под действием набегающего потока. Решение задачи динамики позволит получить аналитические зависимости амплитудно-частотных характеристик колебаний центра масс подводного аппарата и при определенных допущениях и захвата манипулятора. Полученная таким образом информация будет использована для проектирования системы закрепления подводного аппарата во время ликвидации последствий техногенных аварий и подводных ремонтных работ в реальных условиях морского волнения и течений.

Приведем здесь некоторые положения, касающиеся постановки и решения задачи о колебаниях подводного робота, оснащенного манипулятором и системой крепления, обеспечивающей стабилизацию захвата манипулятора во время работы. При этом в качестве упрощающих допущений будут приняты:

- основные допущения гидродинамической теории движения подводного аппарата;
- известные в механике допущения абсолютно гибкой растяжимой по Гуку однородной тяжелой или невесомой нити;
- допущение, что из всех действующих на крепежные тросовые связи гидродинамических сил следует принять лишь ту часть инерционных сил, которая обусловлена нормальными к тросу перемещениями его точек;
- допущение о возможности моделирования

$$f(\tau) = \begin{cases} (a - b\tau)\tau^c & \tau \leq 1 \\ 1 & \tau > 1 \end{cases}, \quad (1)$$

$$\tau = t / t_m$$

Из всего изложенного следует, что применительно к рассматриваемому случаю колебаний подводного аппарата, учитывая значительную жесткость крепежных канатов и других крепежных элементов, не представляется возможным использовать принципы разделения движений и отдельно изучать движение

аппарата, вызванные только ветровым шквалом или только гидродинамическим волнением и течением. Рассматривая ПА как абсолютно твердое тело с шестью степенями свободы, систему дифференциальных уравнений его колебаний в связанной с ним системе координат, запишем в форме матричного уравнения:

$$M \ddot{\zeta} + \Lambda \dot{\zeta} + \Omega \zeta = R^v + R^e + R^3 \quad (2)$$

где точкой, как обычно, обозначены параметрические производные по времени, а  $M$ ,  $\Lambda$ ,  $\Omega$  обозначены квадратные матрицы инерции, демпфирования и восстанавливающих сил размерности  $6 \times 6$ , а через  $\zeta$ ,  $R^v$ ,  $R^e$ ,  $R^3$  – шестимерные векторы соответственно перемещения и сил, вызванных волнением, течением и действием закрепляющих элементов.

при течении и шквальном набегающем потоке, необходимо располагать информацией о значениях гидродинамических характеристик аппарата, получаемых экспериментальным путем. Выбрав в качестве характерной величины площадь  $S_a$  проекции подводного аппарата на ДП, можно представить действующие на ПА проекции главного вектора сил  $R$  и моментов  $M$  в виде:

При расчете гидродинамических сил и моментов, действующих на подводный аппарат

$$\begin{aligned} R_x^e &= \frac{1}{2} C_x \rho_a v_a^2 S_{azoy} \\ R_y^e &= \frac{1}{2} C_y \rho_a v_a^2 S_{azox} \\ R_z^e &= \frac{1}{2} C_z \rho_a v_a^2 S_{axoy} \\ M_x^e &= y_a R_z^e - z_a R_y^e \\ M_y^e &= z_a R_x^e - x_a R_z^e \\ M_z^e &= x_a R_y^e - y_a R_x^e \end{aligned} \quad (3)$$

где  $x_a$ ,  $y_a$ ,  $z_a$  – координаты точки приложения главного вектора гидродинамических сил в связанной с подводным аппаратом системе координат,  $\rho_a$ ,  $v_a$  – массовая плотность и скорость набегающего потока воды.

Силы, вызванные действием закрепляющих элементов, могут быть определены в соответствии с существенно нелинейной характеристикой тросов по начальному натяжению  $R_{0i}^3$  или начальной деформации  $\Delta l_{0i}$  и по динамической деформации  $\Delta l_i$

$$\bar{R}_{0i}^3 = f(\Delta \bar{l}_{0i}, \Delta \bar{l}_i)$$

или в линейном приближении:

$$\bar{R}_{0i}^3 = k_i \Delta \bar{l}_{0i} + k_i \Delta \bar{l}_i$$

где  $k_i$  – коэффициент жесткости  $i$ -того троса определяется по нагрузочной характеристике, а динамическая деформация определяется по

положению радиус-вектора  $r_i$  его точки крепления к подводному аппарату:

$$\Delta \bar{l}_i = \bar{r}_i - \bar{r}_{0i}$$

Радиус-вектор, в свою очередь, представится через решение системы о колебаниях подводного аппарата:

$$\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \int \bar{\omega}_0 \times \bar{r}_{0i} dt + \int \bar{v}_0 dt$$

штрих

где  $v_0, \omega_0$  – соответственно линейная и угловая скорость начала связанной системы координат.

Решение задачи о перемещениях и колебаниях звена удерживающего устройства. Решение задачи статики позволит определить

уравнение изгибающей линии, которое будет использовано в качестве начального условия для задачи динамики. Общеизвестно из курса сопротивления материалов, что радиус кривизны упругой линии для балок любого сечения имеет

$$R = \frac{EJ}{M}$$

где  $E$  – модуль упругости материала балки;  
 $M$  – изгибающий момент, действующий в данном сечении;

$J$  – момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси. Решение указанной задачи произведем в приближенной постановке при этом в качестве упрощающих используем следующие допущения:

– изгиб балки во всех сечениях чрезвычайно мал;

– угол поворота упругой линии чрезвычайно мал, поэтому в любой ее точке первой производной можно пренебречь.

В результате дифференциальное уравнение упругой линии запишем в следующем виде:

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{EJ}{M} \quad \text{или} \quad y'' = \frac{M}{EJ}$$

Изгибающий момент  $M$  для сечения с центром в точке  $T(y, z)$  (см. рис. 2) равен

$$M = M_u - R(l - z)$$

Общее решение дифференциального уравнения упругой линии с учетом принятых допущений представим

$$y = \frac{M_u}{2EJ} z^2 - R \frac{(l - z)^3}{6EJ} + C_1 z + C_2$$

Константы интегрирования определим из начальных условий:

$$z = 0, y = 0, y' = 0$$

$$C_1 = -\frac{Rl^2}{2EJ}, \quad C_2 = \frac{Rl^3}{6EJ}$$

или окончательно уравнение упругой линии представим

$$y = \frac{R}{2EJ} \left( \frac{l^3 - (l - z)^3}{3} + \frac{M_u}{R} z^2 - l^2 z \right)$$

а максимальный прогиб равен

$$y = \frac{M_u l^2}{2EJ} - \frac{Rl^3}{3EJ}$$

Продольные колебания звена, удерживающего устройства. Решение указанной задачи произведем в приближенной постановке, при этом в качестве упрощающих используем следующие допущения:

– стержень вдоль всей его длины имеет постоянную жесткость поперечного сечения и равномерно распределенную массу;

– левый конец стержня в точке S закреплен жестко, а правый совершает перемещение, равное перемещению подводного аппарата в точке P.

Выделяя участок стержня длиной  $dz$ , вычислим упругие силы, действующие на правый и на левый его концы соответственно.

$$N_n = -EF \frac{\partial u}{\partial z};$$

$$N_{np} = -EF \left[ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right) dz \right]$$

и силы инерции

$$P_u = \rho F \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz$$

Тогда, приравнявая главный вектор внешних сил силам инерции, получим дифференциальное уравнение продольных колебаний удерживающего звена:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

и краевые условия

$$z = 0, u = 0,$$

$$z = l, \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{N}{EF}$$

Частное решение дифференциального уравнения, следуя методу Фурье, ищем в виде

$$u = \frac{N}{EF} z + \zeta(z, t); \zeta(z, t) = Z(z)T(t)$$

что разделяет краевую задачу на две задачи

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{a^2} Z$$

где обозначено

$$a^2 = \frac{E}{\rho}$$

с новыми краевыми условиями

$$z = 0, \frac{\partial \zeta(z, t)}{\partial z} = 0; z = l, \frac{\partial \zeta(z, t)}{\partial z} = 0$$

и соответствующими частными решениями

$$T = \cos \omega t; T = \sin \omega t$$

$$Z = \cos \frac{\omega}{a} z; Z = \sin \frac{\omega}{a} z$$

Первое из краевых условий исключает второе частное решение

$$Z = \sin \frac{\omega}{a} z$$

Первое частное решение удовлетворяет первому из краевых условий, но для выполнения второго необходимо, чтобы

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} T = \frac{N}{EF} + \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} z \sin \omega t = \frac{N}{EF},$$

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0;$$

т.е. решением частотного уравнения будет

$$\frac{\omega_i}{a} l = i\pi; \omega_i = \frac{ai\pi}{l} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

поэтому дальнейшее решение ищем в виде ряда для набора собственных частот  $\omega_i$ , используя соответствующие формы колебаний

$$u = \frac{N}{EF} z + \sum_{i=1,2,3\dots} \cos \frac{\omega_i}{a} z (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

Произвольные константы определяются из начальных условий.

Предположим, что начальные условия имеют вид

$$t = 0; u = \frac{N}{EF} z + f(z); \frac{\partial u}{\partial t} = f_1(z)$$

тогда коэффициенты разложения выражаются

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_1(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

*Крутильные колебания звена удерживающего устройства.* Решение указанной задачи произведем в приближенной постановке, при этом в качестве упрощающих ипользуем следующие допущения:

- стержень вдоль всей его длины имеет постоянную крутильную жесткость поперечного сечения  $GJ_p$  и равномерно распределенную массу;
- левый конец стержня в точке S закреплен жестко, а правый закручивается на угловое перемещение, равное перемещению подводного аппарата в точке P.

Выделяя участок стержня длиной  $dz$ , вычислим упругие крутящие моменты, действующие на правый и на левый его концы соответственно

$$M_{крл} = GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z};$$

$$M_{крп} = GJ_p \left( \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right)$$

Тогда, вычисляя равнодействующий крутящий момент, в соответствии с основным законом динамики вращательного движения, запишем:

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz$$

откуда дифференциальное уравнение крутильных колебаний имеет вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

с краевыми условиями

$$z = 0, \varphi = 0; z = l, \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{M_{кр}}{GJ_p},$$

где обозначено

$$a^2 = \frac{G}{\rho}$$

Частное решение дифференциального уравнения, следуя методу Фурье, ищем в виде

$$\varphi = \frac{M_{кр}}{GJ_p} z + \zeta(z, t); \zeta(z, t) = Z(z)T(t)$$

что разделяет краевую задачу на две задачи

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T;$$

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} = -\frac{\omega^2}{a^2} Z$$

с новыми краевыми условиями

$$z = 0, \frac{\partial \zeta(z, t)}{\partial z} = 0; z = l, \frac{\partial \zeta(z, t)}{\partial z} = 0$$

и соответствующими частными решениями

$$T = \cos \omega t; T = \sin \omega t$$

$$Z = \cos \frac{\omega}{a} z; Z = \sin \frac{\omega}{a} z$$

Первое из краевых условий исключает второе частное решение

$$Z = \sin \frac{\omega}{a} z$$

Первое частное решение удовлетворяет первому из краевых условий, но для выполнения второго необходимо, чтобы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial Z}{\partial z} T = \frac{M_{kp}}{GJ_p} + \frac{\omega}{a} \sin \frac{\omega}{a} z \sin \omega t = \frac{M_{kp}}{GJ_p}, \text{ т.е.}$$

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0;$$

решением частного уравнения будет

$$\frac{\omega_i}{a} l = i\pi; \omega_i = \frac{ai\pi}{l} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

поэтому дальнейшее решение ищем в виде ряда для набора собственных частот  $\omega_i$ , используя соответствующие формы колебаний

$$\varphi = \frac{M_{kp}}{GJ_p} z + \sum_{i=1,2,3,\dots} \cos \frac{\omega_i}{a} z (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

Произвольные константы определяются из начальных условий.

Предположим, что начальные условия имеют вид:

$$t = 0; \varphi = \frac{M_{kp}}{GJ_p} z + f_{kp}(z); \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{M_{kp}}{GJ_p} + f_{kp1}(z)$$

тогда коэффициенты разложения выражаются:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f_{kp}(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_{kp1}(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

*Поперечные колебания звена удерживающего устройства.* Решение указанной задачи произведем в приближенной постановке при этом в качестве упрощающих используем следующие допущения:

- стержень вдоль всей его длины имеет постоянную форму поперечного сечения и равномерно распределенную массу;
- левый конец стержня в точке S закреплен жестко, а правый совершает перемещение, равное перемещению подводного аппарата в точке P.

Выделяя участок стержня длиной  $dz$ , вычислим поперечные силы, действующие на правый и на левый его концы соответственно

$$N_n = Q$$

$$N_{np} = -Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz$$

и силы инерции

$$P_u = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz$$

и моменты сил

$$M_n = M$$

$$M_{np} = -M - \frac{\partial M}{\partial z} dz$$

Тогда приравнивая главный вектор внешних сил силам инерции, получим дифференциальное

уравнение поступательных перемещений выделенного элемента удерживающего звена

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dz = - \frac{\partial Q}{\partial z} dz$$

Для вывода вращательного перемещения элемента вычислим суммарный изгибающий момент, тогда в соответствии с основным законом динамики вращательного движения запишем:

$$Q dz - \frac{\partial M}{\partial z} dz = - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} dz$$

Далее определим суммарное угловое перемещение, с одной стороны, как тангенс угла наклона касательной к упругой линии, а с другой – как сумму угла поворота сечения  $\theta$ , вызванного изгибом, и угла сдвига  $\gamma$ , который обусловлен действием поперечной силы

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \theta + \gamma, \gamma = \frac{\partial w}{\partial z} - \theta$$

Как известно, изгибающий момент и угол поворота  $\theta$ , а также поперечная сила и угол сдвига  $\gamma$  связаны между собой соотношениями

$$Q = -k\gamma FG = -kFG \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right)$$

$$M = EJ \frac{\partial \theta}{\partial z}$$

тогда уравнение поступательного и вращательного движения элемента преобразуем

$$\begin{cases} \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - kFG \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right) = 0, \\ kFG \left( \frac{\partial w}{\partial z} - \theta \right) + EJ \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} - \rho J \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \end{cases}$$

Продифференцировав второе уравнение по  $z$ , после подстановки в него соответствующих производных  $\theta$ , определенных дифференцированием первого уравнения, получим дифференциальное уравнение свободных поперечных колебаний звена:

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J \left( 1 + \frac{E}{kG} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0$$

Пренебрегая членами второго порядка малости, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0$$

решение которого должно удовлетворять краевым условиям:

$$z = 0, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = 0;$$

$$z = l, w = 0, \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{M_u}{EJ}$$

Частное решение дифференциального уравнения, следуя методу Фурье, ищем в виде

$$w = \frac{M_u}{2EJ} z^2 + \zeta(z, t); \zeta(z, t) = Z(z)T(t)$$

что разделяет краевую задачу на две задачи

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} = k^4 Z;$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T$$

где обозначено



$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}$$

с новыми краевыми условиями

$$z = 0, \zeta(z, t) = 0; \frac{\partial \zeta^2(z, t)}{\partial z^2} = 0; z = l, \zeta(z, t) = 0; \frac{\partial \zeta^2(z, t)}{\partial z^2} = 0$$

и соответствующими частными решениями

$$T = \cos \omega t; T = \sin \omega t$$

$$Z = \cos \frac{\omega}{a} z; Z = \sin \frac{\omega}{a} z; Z = ch \frac{\omega}{a} z; Z = sh \frac{\omega}{a} z$$

Первые три из краевых условий исключают первое, третье и четвертое частные решения. Второе частное решение удовлетворяет первому и второму из краевых условий, но для выполнения третьего и четвертого необходимо, чтобы

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{M_u}{EJ} + \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} T = \frac{M_u}{EJ} - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 \sin \frac{\omega}{a} z \sin \omega t = \frac{M_u}{EJ}, \text{ т.е.}$$

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0;$$

частным решением уравнения будет

$$\frac{\omega}{a} l = i\pi; \omega_i = \frac{ai\pi}{l} = \frac{i\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$$

поэтому дальнейшее решение ищем в виде ряда для набора собственных частот  $\omega_i$ , используя соответствующие формы колебаний:

$$w = \frac{M}{2EJ} z^2 + \sum_{i=1,2,3...} \sin \frac{\omega_i}{a} z (A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t)$$

Произвольные константы определяются из начальных условий.

Предположим, что начальные условия имеют вид:

$$t = 0; w = \frac{M}{2EJ} z^2 + f_u(z); \frac{\partial w}{\partial t} = f_{u1}(z)$$

тогда коэффициенты разложения выражаются:

$$A_i = \frac{2}{l} \int_0^l f_u(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a} \int_0^l f_{u1}(z) \cos \frac{i\pi z}{l} dz$$

*Поперечные колебания звена удерживающего устройства при нестационарном нагружении.* Решение указанной задачи произведем в приближенной постановке, при этом в качестве упрощающих используем следующие допущения:

- стержень вдоль всей его длины имеет постоянную форму поперечного сечения и равномерно распределенную массу;
- левый конец стержня в точке S закреплен жестко, а правый совершает перемещение, равное перемещению подводного аппарата в точке P.

Продлав преобразования, аналогичные проделанным выше, пренебрегая членами второго порядка малости, получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний. Решение этого уравнения ищем в виде:

$$w = \frac{M_u}{2EJ} z^2 + \frac{R_u}{6EJ} z^3 + \zeta(z, t); \zeta(z, t) = Z(z)T(t)$$

тогда для вновь введенной функции  $\zeta$  краевая нестационарная задача представится в виде:

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EJ} \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} + \frac{z^2}{2EJ} \frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} + \frac{z^3}{6EJ} \frac{\partial^2 R_u}{\partial t^2} \right) = 0$$

$$z = 0, \zeta(z, t) = 0; \frac{\partial \zeta^2(z, t)}{\partial z^2} = 0; z = l, \frac{\partial \zeta^2(z, t)}{\partial z^2} = 0; \frac{\partial \zeta^3(z, t)}{\partial z^3} = 0.$$

Предположим также, что существует разложение нестационарного воздействия по собственным функциям краевой задачи

$$\frac{\partial^2 M_u}{\partial t^2} = a_{M\omega} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -a_{M\omega} \omega^2 T$$

$$\frac{\partial^2 R_u}{\partial t^2} = a_{R\omega} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -a_{R\omega} \omega^2 T$$

что разделяет краевую задачу

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} + \frac{\rho F}{EJT} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} \left( Z + a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} + a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ} \right) = 0$$

на две задачи:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = -\omega^2 T$$

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} = -k^4 \left( Z + a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} + a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ} \right)$$

с соответствующими частными решениями

$$T = \cos \omega t; T = \sin \omega t$$

$$Z = \cos \frac{\omega}{a} z; Z = \sin \frac{\omega}{a} z; Z = ch \frac{\omega}{a} z; Z = sh \frac{\omega}{a} z; Z = -a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} - a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ}$$

из которых только второе и четвертое удовлетворяют первому и второму из краевых условий, но для выполнения третьего и четвертого необходимо, чтобы константы интегрирования и частота были определены как решение системы

$$\begin{cases} A_i + C_i = 0, \\ -A_i + C_i - a_{M\omega} \frac{a^2}{EJ\omega^2} = 0, \\ -A_i \cos \frac{\omega}{a} l - B_i \sin \frac{\omega}{a} l + C_i ch \frac{\omega}{a} l + D_i sh \frac{\omega}{a} l - a_{M\omega} \frac{a^2}{EJ\omega^2} - a_{R\omega} \frac{la^2}{2EJ\omega^2} = 0, \\ A_i \sin \frac{\omega}{a} l - B_i \cos \frac{\omega}{a} l + C_i sh \frac{\omega}{a} l + D_i ch \frac{\omega}{a} l - a_{R\omega} \frac{a^3}{EJ\omega^3} = 0 \end{cases}$$

$$A_i = -C_i,$$

$$C_i = a_{M\omega} \frac{a^2}{2EJ\omega^2}$$

$$D_i = \frac{C_i \left( 1 + \cos \frac{\omega}{a} l \cdot ch \frac{\omega}{a} l - \sin \frac{\omega}{a} l \cdot sh \frac{\omega}{a} l \right) - \frac{a^2}{EJ\omega^2} \left[ a_{M\omega} + a_{R\omega} \left( l \cos \frac{\omega}{a} l - \frac{a \sin \frac{\omega}{a} l}{\omega} \right) \right]}{\cos \frac{\omega}{a} l \cdot sh \frac{\omega}{a} l - \sin \frac{\omega}{a} l \cdot ch \frac{\omega}{a} l}$$

$$B_i = \left[ C_i \left( \cos \frac{\omega}{a} l + ch \frac{\omega}{a} l \right) + D_i sh \frac{\omega}{a} l - a_{M\omega} \frac{a^2}{EJ\omega^2} - a_{R\omega} \frac{la^2}{2EJ\omega^2} \right] \left[ \sin \frac{\omega}{a} l \right]^{-1}$$

$$Z = A_i \cos \frac{\omega}{a} z + B_i \sin \frac{\omega}{a} z + C_i ch \frac{\omega}{a} z + D_i sh \frac{\omega}{a} z - a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} - a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ}$$

Дальнейшее решение ищем в виде ряда для набора собственных частот  $\omega_i$ , используя соответствующие формы колебаний

$$w = \frac{M_u}{2EJ} z^2 + \frac{R_u}{6EJ} z^3 + \sum_{i=1,2,3,\dots} (A_i \cos \frac{\omega}{a} z + B_i \sin \frac{\omega}{a} z + C_i ch \frac{\omega}{a} z + D_i sh \frac{\omega}{a} z - a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} - a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ}) (a_i \cos \omega t + b_i \sin \omega t)$$

Произвольные константы определяются из начальных условий.

Предположим, что начальные условия имеют вид:

$$t = 0; w = \frac{M_u}{2EJ} \Big|_{t=0} z^2 + \frac{R_u}{6EJ} \Big|_{t=0} z^3 + f_u(z);$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial M_u}{2EJ \partial t} \Big|_{t=0} z^2 + \frac{\partial R_u}{6EJ \partial t} \Big|_{t=0} z^3 + f_{u1}(z)$$

тогда коэффициенты разложения выразятся через интегралы для произвольного набора частот:

$$\begin{aligned} a_i \int_0^l (A_i \cos \frac{\omega}{a} z + B_i \sin \frac{\omega}{a} z + C_i ch \frac{\omega}{a} z + D_i sh \frac{\omega}{a} z - a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} - a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ}) \cos \frac{\omega_i}{a} z dz = \\ = \int_0^l f_u(z) \cos \frac{\omega_i}{a} z dz + \int_0^l \left( \frac{M_u}{2EJ} \Big|_{t=0} z^2 + \frac{R_u}{6EJ} \Big|_{t=0} z^3 \right) \cos \frac{\omega_i}{a} z dz \\ b_i \int_0^l (A_i \cos \frac{\omega}{a} z + B_i \sin \frac{\omega}{a} z + C_i ch \frac{\omega}{a} z + D_i sh \frac{\omega}{a} z - a_{M\omega} \frac{z^2}{2EJ} - a_{R\omega} \frac{z^3}{6EJ}) \cos \frac{\omega_i}{a} z dz = \\ = \frac{a}{\omega_i} \int_0^l \left( \frac{\partial M_u}{2EJ \partial t} \Big|_{t=0} z^2 + \frac{\partial R_u}{6EJ \partial t} \Big|_{t=0} z^3 + f_{u1}(z) \right) \cos \frac{\omega_i}{a} z dz \end{aligned}$$

**Особенности конструкции и допущения, принятые для проведения расчетов.**

При математической формулировке и решении задачи о колебаниях закрепленного подводного аппарата использовались две системы координат:

неподвижная в пространстве система *OXYZ* и жестко связанная с подводным аппаратом охуз.

Главные размерения подводного аппарата, его геометрические и иннерционные характеристики приведены в таблице 1.

Таблица 1

Наименование величины	Размерность	Обозначение	Числовое значение
Длина	м	$L$	4,25
Ширина	м	$B$	1,75
Высота	м	$H$	2,5
Масса	кг	$m$	2300
Апликаата ЦТ	м	$Y_{um}$	0,37
Апликаата ЦВ	м	$Y_{ув}$	-0,87
Площадь ВЛ	м кв.	$S_{вл}$	6,173
Площадь парусности	м кв.	$S_x$	5,653
Апликаата центра парусности			
$X_a$	м	$X_a$	1,23
$Y_a$	м	$Y_a$	0,57
$Z_a$	м	$Z_a$	0
Моменты инерции относительно оси $OX$	кг м кв.		1774
оси $OY$	кг м кв.		2730
оси $OZ$	кг м кв.		2960

Основные характеристики крепежных элементов представлены в табл. 2

Таблица 2

$i$	Длина звена, $l_{ri}$ , м	Координата клюза, $x_{ri}/y_{ri}$ , м	Координата захвата, $x_{ri}/y_{ri}$ , м	Натяжение, $T$ , кН
1	0,8	0.1/0	0.1/0	0,25
2	1,57	1,87/0,6	2,0/0,9	0,25
3	1,57	1,87/-0,7	2,0/-1,1	0,375
4	1,97	-1,6/0,6	-2,0/0,9	0,325
5	1,97	-1,6/-0,7	-2,0/-1,1	0,485

**Обсуждение результатов.** На рис. 3 представлены результаты численных расчетов колебаний для различных вариантов закрепления подводного аппарата, в частности вертикальной координаты точки  $P$ . Анализ перемещений для двух вариантов крепления аппарата к вертикальной стенке с помощью одного крепежного элемента и с помощью этого же элемента и четырех крепежных тросов проведен для аппарата, данные о котором помещены в табл. 1. Как следует из анализа результатов расчетов, дополнительные крепления существенно уменьшают время установления колебаний с одной стороны, искривляя при этом

их форму и увеличивая при этом частоту установившихся колебаний. Кроме этого, величина силы натяжения также влияет и на форму, и на скорость затухания, и на частоту установившихся колебаний.

**Выводы.** Минимизацию максимальных отклонений подводного аппарата при ударных нагрузках возможно осуществить за счет применения комплексного упорно консольного и канатного закрепления и регулировки силы натяжения крепежных канатов. Совместное решение систем уравнений динамики элементов крепления и аппарата позволяет получить количественные оценки амплитуды колебаний

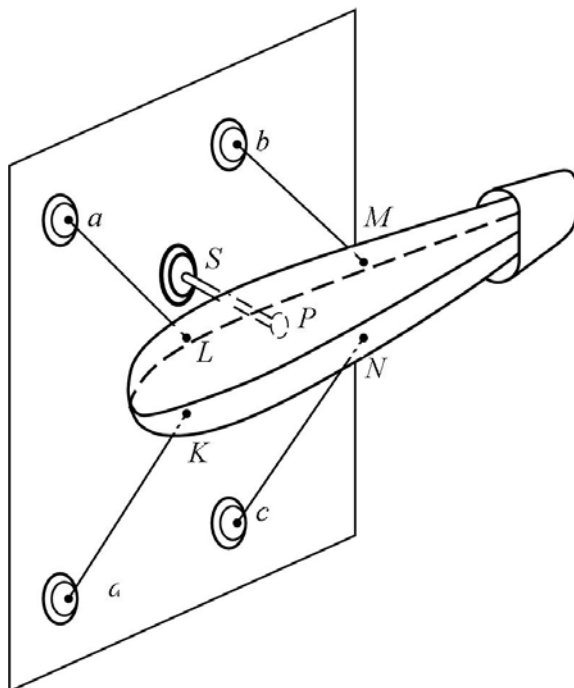


Рис. 1 Схема фиксации ПА около вертикальной стенки

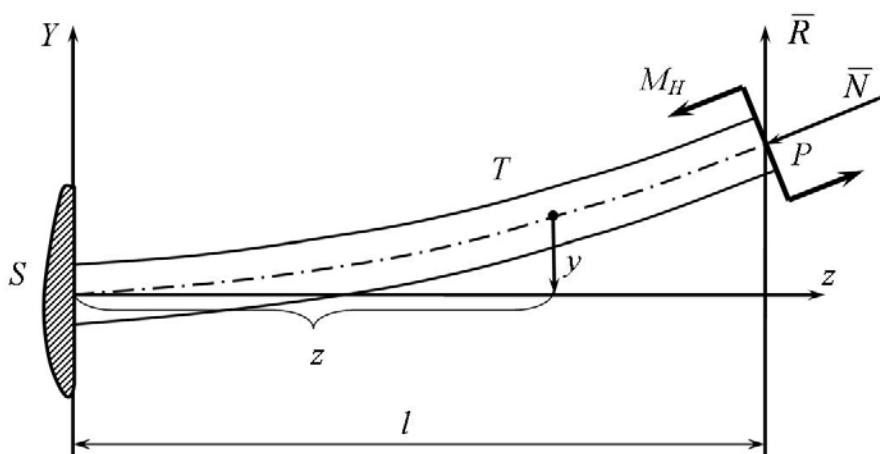


Рис. 2 Схема нагружения крепежного устройства

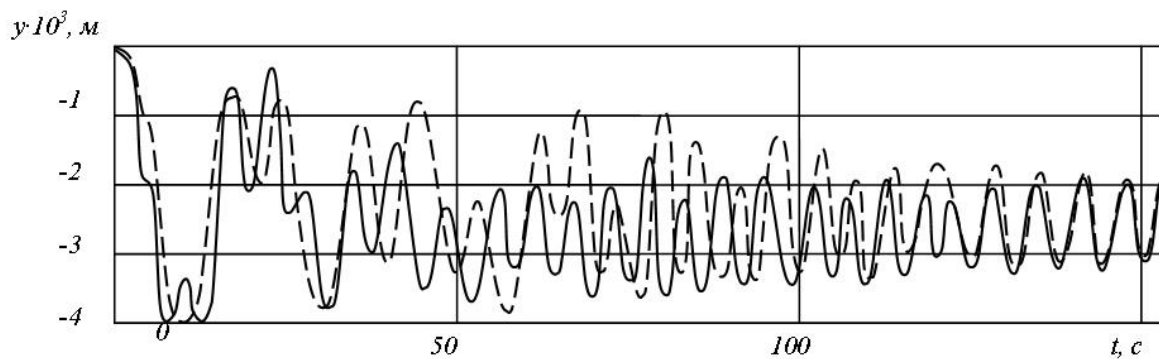


Рис. 3. График колебаний вертикальной координаты точки Р для двух случаев крепления:  
 — - консольное крепление одним крепежным элементом;  
 - - - - крепление дополнительными четырьмя тросами.

## ЛІТЕРАТУРА

1. Дыхта Л.М. Гидродинамическая задача о движении и колебаниях полупогруженного эллипсоида // Труды НКИ. – Вып. 102. – Николаев, 1975. – С. 102-108.
2. Дыхта Л.М. Колебания закоренного судна // Труды НКИ. – Вып. 114. – Николаев, 1976. – С. 9-15.
3. Дыхта Л.М. Общие формулы для расчета гидродинамических реакций при качке удлиненного судна // Труды НКИ. – Вып. 189. – Николаев, 1982. – С. 24-30.
4. Дыхта Л.М., Мельник В.А. Расчет качки плавучих буровых установок типа “Марк” на регулярном волнении // Труды НКИ. – Вып. 189. – Николаев, 1982. – С. 30-40.
5. Трунов А.Н. Моделирование глубоководных технических средств и систем с распределенными параметрами. Проектирование судов и судовых устройств: Сборник научных трудов. – Николаев: НКИ, 1989. – С. 127-136.
6. Трунов А.Н. Применение метода рекуррентной аппроксимации к решению нелинейных задач // Методы и алгоритмы параметрического анализа линейных и нелинейных моделей переноса: Сб. науч. тр. – Выпуск 16. – М., МГОПУ. – 1998. – С. 142-156.
7. Трунов О.М. Застосування методу рекуррентної аппроксимації до розв’язку нелінійних задач // Наукові праці МФ НаУКМА. – Миколаїв, 1999. – С. 135-142.
8. Трунов О.М. Застосування методу рекуррентної аппроксимації до задач підвищення точності та безвідмовності систем керування: Науково-методичний журнал. – Т. 35. – Вип. 22. – МДГУ ім. Петра Могили. – Миколаїв, 2004. – С. 93-101.
9. Трунов О.М. Керованість, спостережність та ідентифіковність нелінійних систем керування підводними апаратами: 36. наукових праць НУК. – №6, Миколаїв, 2004. – С. 133-141.
10. Трунов А.Н. Определение параметров движителей и бортовых приборов измерительного комплекса подводного аппарата мониторинга водной акватории на стадиях предэскизного проектирования // Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили: Науково-методичний журнал. – Т. 31. – Вип. 18. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2004. – С. 163-176.
11. Трунов А.Н. Математическая модель подводного аппарата с изменяющейся геометрией корпуса // Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили: Науково-методичний журнал. – Т. 41. – Вип. 28. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2005. – С. 22-31.
12. Трунов А.Н. Особенности синтеза регуляторов на базе развязки задачи про адекватне наближення моделі // Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили: Науково-методичний журнал. – Т. 57. – Вип. 44. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2006. – С. 174-180.
13. Трунов О.М. Визначення оптимальних параметрів технологічного підводного апарату // Наукові праці Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили: Науково-методичний журнал. – Т. 38. – Вип. 25. – 2005. – С. 120-124.
14. Трунов О.М. Застосування методу рекуррентної аппроксимації до задач діагностування та управління в лікувально-реабілітаційних комплексах // Український журнал медичної техніки і технології. – №3-4. – 2005. – С. 37-42.
15. Синтез параметрів ПІД регуляторів для систем функціонального біоуправління ритмом серця, що містять фільтри // Український журнал медичної техніки і технології. – К., 2006. – №1-2. – С. 37-42.
16. Трунов О.М. Збіжність рекуррентної послідовності розв’язків двоточкової крайової задачі для нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку” // 36. наукових праць НУК. – Миколаїв, 2005. – №1. – С. 50-60.
17. Трунов О.М. Узагальнення алгоритму розв’язку системи нелінійних диференціальних рівнянь динамічних систем механіки // 36. наукових праць НУК. – Миколаїв, 2005. – №2. – С. 45-55.