

ГЕОМЕТРИЯ КЛАСТЕРІВ

На сьогодні візуалізація багатовимірних геометричних образів стає одним з основних чинників підвищення продуктивності праці людини. І досягти її у багатовимірному просторі можна шляхом візуалізації тілесних або об'єктних кластерів з векторами різних класів. Згідно з геометрією Тілесних кутів (первинних Прямокутних PT_h -кутів/ PT_h -кластерів, де $h = 1, 2, \dots, N$ – їх порядкові номери), будь-який вхідний вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ попадає в один з первинних PT_h -кластерів тіла гіпер кулі, яке має візуалізовану мапу. У тілі кожного первинного PT_h -кластера з об'єктами різних класів за заданими критеріями $F_{his}(X)$ візуалізуються вторинні PT_{his} -кластери (тут $his = 1his-, 2his-, 3his-$ вимір простору PT_{his} -кластера; $(i = 1, 2, \dots, m; s = 1, 2, \dots, S)$ – перший та другий порядкові номери PT_{his} -кластера. PT_{his} -кластери мають тілесні (PT) або об'єктні (PO) вектори – центроїди X^{PT}, X^{PO} . Належність нового вектора X до центроїдів (X^{PT}, X^{PO}) визначається за зваженими відстанями. Розглянуті n -вимірні Сферичні Координати та їх Тілесні кути (CT_h -кути, CT_h -кластери), Координати вторинних кластерів та об'єднуючі особливості Систем Координат.

Ключові слова: геометрія; багатовимірність; візуалізація даних; кластер.

1. Постановка проблеми. За даними Інституту Досліджень Даних та Візуалізації, заснованого в США у 2018 р., великого значення в аналізі складних систем набуває **візуалізація даних** [1]:

– 90 % інформації людина отримує за допомогою зору;

– у 60 тис. разів швидше сприймається візуальна інформація порівняно з текстовою та її засвоєнням.

Також на 17–28 % (залежно від виду діяльності) підвищується продуктивність праці у людини, озброєної візуалізацією об'єктів багатовимірного простору за публікаціями [2; 3]. І значення цих проблем зростатиме з плином часу. Наприклад, з 17 % до 59 % зросло використання Великих Розрахунків у період 2015–2017 рр. [1].

У виробництві послуг відбувається незворотний у часі **Процес Ускладнення**, за яким людині та машині потрібно мати можливість працювати з великими та збільшувальними даними у часі: об'ємами знань (**Великими Знаннями**), об'ємами даних (**Великими Даними**), об'ємами розрахунків (**Великими Розрахунками**) при **Великій Вимірності змінних, Інтегральній Інтерпретації та Взаємодії з Оточенням**.

Стаття присвячена проблемі подальшого розвитку візуалізації геометричних багатовимірних об'єктів на основі використання кластерів, оскільки відомий кластерний аналіз [4; 5; 6] у цьому відношенні потребує подальшого удосконалення [7].

У цьому випадку не розглядаються такі важливі дані візуалізованої інформації, як її захист, розподіленість, ієрархічність, багаторівневність, супровід додатковими **візуалізованими даними** (місцем розташування об'єктів; мнемосхемами; кольором, постійним чи переривистим світлом; текстом; числами; анімацією;

аналоговою інформацією), **звуквою інформацією** (голосового повідомлення, музики, постійного чи переривистого сигналу) та **тактильною інформацією** (наприклад, вібрацією, натисненням, температурою). Така інформація підвищує якість аналізу та прогнозованість, точність поточного управління багатовимірними системами, а розуміння процесів збільшує можливість уникнути або пом'якшити ризики критичних ситуацій чи їх наслідків.

На сьогодні існують Системи Координат (Радіальні, Паралельні, Багатовидні, Т-кутів, та ін.), які мають усі багатовимірні осі координат [8–20]. Це дозволяє візуалізувати у вигляді геометричної точки n – вимірний вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, а через подібні точки – поверхню та тіло відомих 1-, 2-, 3-вимірних **геометричних фігур у n – вимірному просторі**, обмежених прямими лініями, ізолініями, площинами, поверхнями, формулами (в об'ємі, на площині чи на прямій лінії), у тому числі представлених центроїдами тілесних (обмежених поверхнями тіла) або об'єктних (у вигляді «хмар» об'єктів) кластерів та інформацією «чорного ящика».

Унаслідок того, що у загальному випадку візуалізація об'єктів у n – вимірному просторі вимагає використання **сукупності Систем Координат** [17; 20], виникає необхідність об'єднуючого аналізу через кластери усіх існуючих Систем Координат та перегляду ряду звичних тверджень.

2. Аналіз досліджень та публікацій.

2.1. ДЕЯКІ ДАНІ БАГАТОВИМІРНИХ ДЕКАРТОВИХ КООРДИНАТ АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ.

Аналіз гіперфігур, гіперповерхонь та інших геометричних об'єктів виконується на основі відомих визначень та формул багатовимірної Евклідової

геометрії [21]. Вважаємо, що в будь-якій Системі Координат через дві точки n – вимірного простору можна провести лише одну пряму лінію (найкоротшу) і що дві площини пересікаються по прямій.

Гіперкуля n – вимірного простору – це геометричне тіло, всі точки якого знаходяться від центру на відстані, не більшої за гіперрадіус (рис. 2.1.1) [21].

$$R = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad (2.1.1)$$

$$C_{2n} = 2\pi R; \quad S_{2n} = \pi R^2; \quad S_{3n} = 4\pi R^2; \quad V_{3n} = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad (2.1.2)$$

де R – візуалізований радіус багатовимірного простору згідно з виразом (2.1.1).

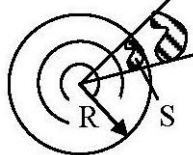


Рис. 2.1.1. Гіперкуля із зовнішнім радіусом R з вкладеними одна в одну порожнистими гіперкулями та тілесним гіперкутом (Т-кутом), що спирається на гіперплощу S гіперсфери радіусом R .

Унаслідок контекстності (необхідності лінгвістичного пояснення) числових значень метрик будь-якої координатної осі та змінних у формулах, нижче використовується поняття геометрії арифметичного простору – змінних без метрики або з довільною однаковою метрикою [21, с. 281–312].

2.2. ПРЯМОКУТНІ, ПОЛЯРНІ, ЦИЛІНДРИЧНІ, СФЕРИЧНІ ТА КУТОВІ КООРДИНАТИ.

З метою візуалізації точок $M(x_1, x_2, x_3)$, $M(\rho, \varphi)$, $M(\rho, \varphi, \theta)$, $M(\rho, \varphi, \theta)$ звичайно у фаховій літературі в Прямокутних, Полярних, Циліндричних та Сферичних Координатах (рис. 2.2.1, а, ..., г) використовуються

де $x_j, j=1, 2, \dots, n$, – координата гіперрадіусу R на відповідній осі координат. У n – вимірному просторі вектор, радіус вектора та модуль вектора помічаються літерою X або R .

Довжину кола C_{2n} , площу круга S_{2n} , площу сфери S_{3n} і об'єм кулі V_{3n} n – вимірного простору розраховуємо за формулами, аналогічними відповідним формулам двовимірного та трьохвимірного простору (рис. 2.1.1).

$$x_j = \rho \cdot \cos(\varphi_j); \quad 1 = \sum_{j=1}^n \cos^2 \varphi_j; \quad \rho = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}; \quad [22].$$

Системи координат рис. 2.2.1, а, ... , г можуть візуалізувати вектори не більше третього порядку, а Кутові Координати рис. 2.2.1, д не є зручними. Тому нижче наводяться більш зручні системи координат для візуалізації n – вимірного простору.

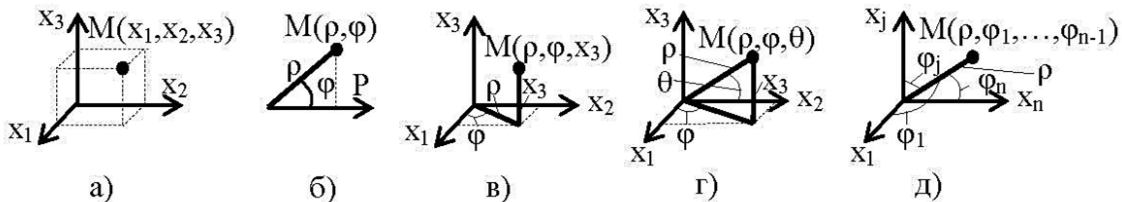


Рис. 2.2.1. Системи Координат: а) Прямокутні $M(x_1, x_2, x_3)$; б) Полярні $M(\rho, \varphi)$; в) Циліндричні $M(\rho, \varphi, x_3)$; г) Сферичні $M(\rho, \varphi, \theta)$; д) Кутові $M(\rho, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})$

2.3. КООРДИНАТИ ТІЛЕСНИХ КУТІВ.

Сукупність площин, кожна з яких проходить через дві сусідні Декартові осі координат вектора $X = (x_1,$

$x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$, виділяє в гіперкулі первинний тілесний кут (ПТ – кут чи ПТ – кластер) (рис. 2.3.1) [17; 20].

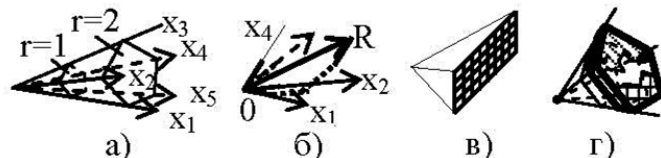


Рис. 2.3.1. Простір змінних первинних ПТ-кутів: а) візуалізація будівництва п'ятигранної піраміди одного первинного ПТ-кута 5-вимірного простору при радіусах гіперкулі $r=1$ та $r=2$; б) візуалізація будівництва в 4-вимірному просторі кінцевої точки вектора X , або радіус-вектора R ; в) мапа гіперкулі з первинними Т-кутами 5-вимірного простору в кількості $2^n = 2^5 = 32$ з урахуванням їх порядкових номерів на гіперсфері; г) обмеження границь переміщення вектора $R=X$ (чорна точка) в межах гіперповерхні первинного ПТ-кута 5-вимірного простору [17; 19; 20]

Усі ПТ-кути гіперкулі мають однакову геометричну форму, а тіло гіперкулі та її гіперсфера порівну розділяються між ними. Прямими лініями в ПТ-кути можна візуалізувати довільну геометричну фігуру 1-, 2- та 3-вимірному простору.

У **Декартових Координатах при однакових знаках змінних** вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ кількість первинних Прямокутних тілесних кутів (ПТ-кутів) дорівнює n : тут урахуємо незалежність ПТ-кутів та не урахуємо, що в Прямокутних Координатах відомі лише 5 типів правильних багатогранників [23, с. 174]. Внутрішня ось симетрії x_{CMj} кожного первинного ПТ-кута розглядається з власним кульовим сектором [23, с. 177], а порядкові номери ПТ-кутів у десятичній системі числення дорівнюють $g=0, 1, 2, \dots, (n-1)$ – якщо нумерація починається з нуля; розміщувати ПТ-кути рекомендується у ряд при паралельних осях симетрії координат x_{CMj} .

У **Декартових Координатах за наявності не негативних та негативних півосей координат змінних** вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ загальна кількість первинних ПТ-кутів (ПТ- кластерів) у n – вимірному просторі дорівнює 2^n з порядковими номерами ПТ-кутів у десятичній системі числення

$g=0, 1, 2, \dots, (2^n - 1)$. Нижче в основному розглядаються випадки, коли кожна Декартова ось $x_j, j=1, 2, \dots, n$, вміщує не негативні та негативні числові значення [17, 20].

Порядковий номер первинного ПТ-кута з не негативними та негативними півосями Декартових координат, в якому знаходиться, наприклад, вектор $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (15, 4, 6, -43, -10)$ визначається у двоїстій системі числення кодом $d=11100$ (за правилом: не негативна координата дорівнює 1, а негативна – 0) з наступним переведенням двоїстого коду $d=11100$ у десятичне число $g=28$ (отримуємо позначення $d_{g=28}=11100$) [17, 19, 20].

На мапі первинні ПТ-кути можна розміщувати або за їх порядковими номерами, або суб'єктивно. У результаті для поверхні гіперкулі отримані дві візуалізовані мапи – одна складається з суб'єктивно розміщених експертом ПТ-кутів (ПТ-кластерів) з їх порядковими номерами, а інша мапа має вигляд «географічної» [17, 20].

2.4. РАДІАЛЬНІ КООРДИНАТИ.

Радіальні Координати з окремою віссю функції виходу F розглянуті в роботі [11]. Частка методів використання координат [11] зображена на рис. 2.4.1.

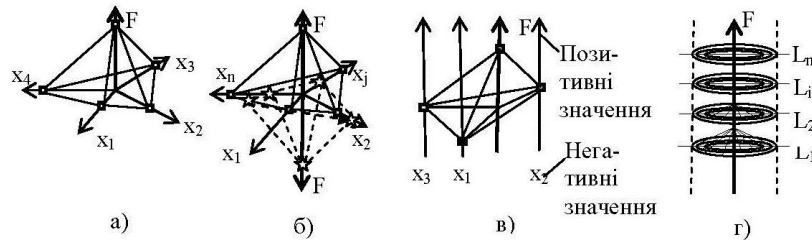


Рис. 2.4.1. Радіальні Координати багатовимірного простору [11]: а) пірамідальний координатний простір при $x_j \geq 0$; б) діамантовий координатний простір при $x_j \geq 0$ та $x_j < 0$; в) паралельний чотирьохвимірний координатний простір (має три вхідні змінні x_1, x_2, x_3 та одну центральну ось виходу F ; може мати довільну кількість вхідних змінних x_1, \dots, x_n ; може мати горизонтальне положення); г) нескінченно – вимірний координатний простір з рівнями $L_1, \dots, L_i, \dots, L_m$

2.5. ПАРАЛЕЛЬНІ КООРДИНАТИ

Паралельні Координати для візуалізації об'єктів багатовимірного простору були запропоновані Ф. М. д'Окань (1885) [8], але у практичних дослідженнях були застосовані та удосконалені А. Інсельбергом [9; 10]. Багатовимірні Паралельні Координати показані на рис. 2.5.1 у вигляді паралельних осей координат вектора $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ та вихідних функцій

$F_1(X), F_2(X)$. Координати вектора $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ з'єднані жирними штриховими лініями, які візуалізують одну точку. Ось x_1 використана для масштабування інших осей (x_2, x_3, x_4, x_5). Вказана на рис. 2.5.1 ламана штрихова лінія візуалізує не лише координати точки в Паралельних Координатах $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, але й виділяє порядковий номер Т-кута [17] $d_{g=26} = 11010$ та площину, в якій знаходиться вхідний вектор.

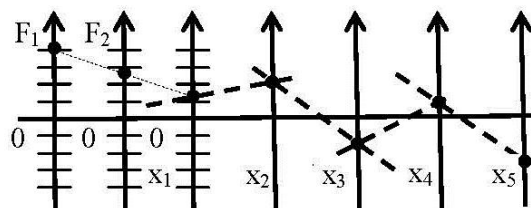


Рис. 2.5.1. Візуалізація в Паралельних Координатах $X=(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ положення точки за допомогою ламаної штрихової лінії [9; 10]

Паралельні Координати використані також і в інших напрямках візуалізованого аналізу:

– як паралельні дані виходів залежно від часу або іншої однієї змінної;

– у вигляді нормованих діаграм [13].

При цьому для візуалізації використана відома формула середнього зваженого при позитивних значеннях змінних [23, с. 568]

$$\bar{x} = \frac{1}{\sum_{j=1}^n w_j} \sum_{j=1}^n w_j x_j = 0 \dots 1; \quad (2.5.1)$$

- у радіальних координатах [11];
- у координатах Т-кутів [19];
- для урахування у формулі (2.5.1) впливу поточних даних та їх особливостей по відношенню до використаних середньостатистичних значень [18].

2.6. КООРДИНАТИ БАГАТОВИДІВ.

Геометрична теорія багатовидів, розроблена в Україні та описана в кількох дисертаційних роботах за спеціальністю 05.01.01 – «Прикладна геометрія, інженерна графіка». Багатовиди розглядаються як багатовимірні геометричні фігури, криві лінії і поверхні в роботах [14; 15]. С. Є. Лясковська використала осі координат, кожна з яких має і не негативні і негативні числові значення, розміщені у площині, наприклад, у вигляді осей координат рис. 2.6.1.

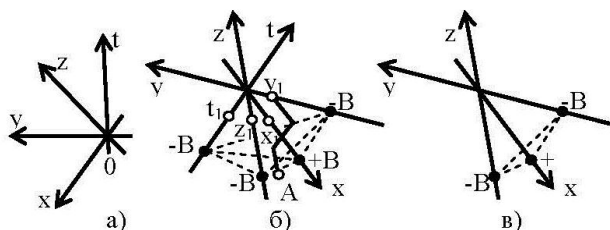


Рис. 2.6.1. Узагальнена чотирьохвимірна Декартова Система Координат хуyzt: а) розміщення осей координат; б) точка А та гіперплощина $x-y-z-t=B$ у чотиривимірному просторі хуyzt; в) проєкція гіперплощини у чотиривимірному просторі хуyzt при $t=0$ [15]

О. М. Гумен розробила теорію, яка дозволяє конструювати раціональні візуалізовані n – вимірні багатовиди для моделювання багатопараметричних процесів [16].

2.7. ПІВОСЬОВІ КООРДИНАТИ.

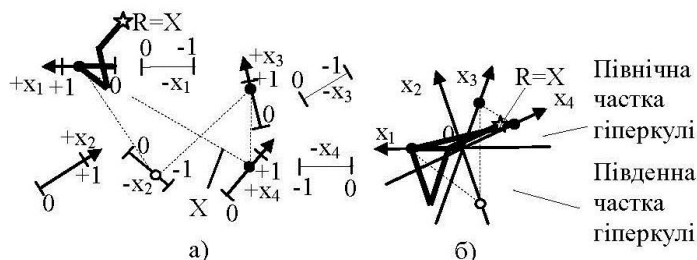


Рис. 2.7.1. Півосьові Координати (ПК) для $n=4$: а) індивідуальна система ПК (кількість подібних індивідуальних систем ПК є незліченною).

- Якщо вхідна змінна може отримувати числові значення різних знаків, то вона повинна мати дві числові півосі: одну для не негативних величин (координата на півосі помічається чорною кулею при числовому значенні змінної $x_j = 0 \dots +1$), а іншу – для негативних значень при $x_j < 0$, на якій координата помічається білою кулею;
- б) приклад створення Радіальних Координат з ПК з побудовою вектора X за його координатами (можна також отримати й інші відомі Системи Координат [20])

У роботі [20] показано, що хаотично (але фіксовано) розміщені півосі координат (кожна півось має або не негативні або негативні значення змінної) є моделлю, яка дозволяє отримати будь-які існуючі Системи Координат (рис. 2.7.1).

3. Виклад основного матеріалу.

3.1. КООРДИНАТИ СФЕРИЧНИХ ТІЛЕСНИХ КУТІВ ЗІ ЗМІННИМИ ОДНАКОВИХ ЗНАКІВ.

На додаток до відомих Координат тілесних кутів (Т-кутів) [17] розглянемо аналогічні Т-кути у Сферичних Координатах.

Згідно з рис. 3.1.1, а зв'язок між Сферичною та Декартовою Системами Координат описують відомими формулами:

$$z_1 = R \cos \theta \cos \varphi; \quad z_2 = R \cos \theta \sin \varphi; \quad z_3 = R \sin \theta, \quad (3.1.1)$$

де $R = 0 \dots \infty$ – радіус гіперсфери;

$\varphi = 0^\circ \dots 360^\circ = \sum_{i=1}^m \Delta\varphi_i = m \cdot \Delta\varphi$, – кут довготи гіперсфери (Д-кут), який дозволяє меридіанами розрізати/розділити гіпершар на окремі **первинні**

ТС-кути/ТС – кластери. Кут φ може складатися з маленьких кутів $\Delta\varphi_i = \text{const}$, $i=1, 2, \dots, m$, і вимірюватись ними у площині двох ліній $(0z_1, 0z_2)$, які пересікаються. Кут φ збільшується від $\varphi=0^\circ$ на «нульовому меридіані (Грінвіча)» уздовж «екватора» гіперсфери під час руху проти ходу стрілки годинника (дивимось з північного полюсу) від $\varphi=0^\circ$ до $\varphi=360^\circ$ без урахування розділу гіперкулі на «Схід» та «Захід»; m – суб'єктивно задана дослідником загальна кількість **первинних ТС-кутів/ТС-кластерів**, а також – однакових маленьких Д-кутів (однакових **первинних ТС-кутів/ТС-кластерів**) $\Delta\varphi_i = \text{const}$, $i=1, 2, \dots, m$, в гіперкулі уздовж екватора; $i=1, 2, \dots, m$, – порядковий номер Д-кута $\Delta\varphi_i$ (ТС-кута/ТС-кластера) уздовж екватора;

$\theta = +90^\circ$ (північної широти) $\dots 0^\circ \dots +90^\circ$ (південної широти) – кут широти гіперсфери (Ш-кут), який використовується поряд зі зміною радіуса гіперкулі R лише для отримання **вторинних ТС-кутів/ТС-клас-**

терів (при $\theta^{\max} = \sum_{p=1}^P \Delta\theta_p = P \cdot \Delta\theta = +90^\circ$). Ш-кут θ може складатися з маленьких **вторинних** кутів $\Delta\theta_p$, $p=1, 2, \dots, P$, і вимірюватися ними у площині двох ліній (Oz_1, Oz_3). Ш-кут θ може збільшуватися в північній гіперкулі від 0° на екваторі до $+90^\circ$ на північному полюсі, а в південній гіперкулі – від 0° на

екваторі до $+90^\circ$ на південному полюсі; P – суб'єктивно задана дослідником загальна кількість однакових Ш-кутів $\Delta\theta_p$ у північній та південній частках гіперкулі (при їх однаковості модуль $|\Delta\theta_p| = 90^\circ/P$; $p = 1, 2, \dots, P$ – порядковий номер Ш-кута $\Delta\theta_p$ при переміщенні від екватора до полюса.



Рис. 3.1.1. Сукупність Прямокутних (z_1, z_2, z_3), Сферичних та Радіальних ($R; \Delta\phi_i, i=1, 2, \dots, m; \Delta\theta_p, p = 1, 2, \dots, P$) координат для **первинних** тілесних сферичних ТС-кутів/ТС-кластерів, *вектори яких мають змінні однакових знаків*: а) зв'язок Прямокутних Координат (z_1, z_2, z_3) та Сферичних Координат (R, ϕ, θ) через радіус гіперкулі R та відповідні кути; б) сукупність Прямокутних (z_1, z_2, z_3), Сферичних та Радіальних координат (R, ϕ, θ) з ТС-кластерами в Сферичних Координатах гіперкулі; в) узгодження n – вимірної ($n=5$) ($x_1=z_1, x_2, x_3, x_4, x_5$) та трьохвимірної (z_1, z_2, z_3) Систем Координат при співпадінні осей $x_1=z_1$ та при охопленні відповідної площини гіперсфери з границею у вигляді кола відповідного масштабу

Порядковий номер кута довготи $\Delta\phi_i, i=1, 2, \dots, m$, визначає порядковий номер відповідного **первинного** тілесного сферичного ТС-кластера, а для однієї кулі з радіусом R загальна кількість первинних ТС-кутів (ТС-кластерів) задається експертом і дорівнює m . Ряд Ш-кутів $\Delta\theta_p, p = 1, 2, \dots, P$, а також ряд гіперсфер з різними радіусами використовуються для визначення **вторинних** ТС-кутів (ТС-кластерів) усередині **первинних** ТС-кутів (ТС-кластерів). Звичайно експерт може задавати іншу нумерацію та інше упорядкування ТС-кутів.

Для аналізованих систем розділ гіперкулі за трьома меридіанами дозволяє отримати її візуальну мапу (рис. 3.1.2, а) у вигляді окремих **первинних** пірамідальних нумерованих Сферичних Тілесних кутів (СТ-кутів, СТ-кластерів) з однаковими «ромбовидними» основами та однаковими знаками змінних векторів.

Якщо розглянути гіперсферу зовні (з боку «Північного полюсу»), поділену на три Тілесних Сферичних кути (ТС-кути, ТС-кластери: $\Delta\phi_1, \Delta\phi_2,$

$\Delta\phi_3$), то отримаємо прямокутну-сферичну-радіальну мапу гіперсфери (рис. 3.1.2, в, г, д) у якій угорі спостерігаємо північну гіперкулю (рис. 3.1.2, в), за якою «захована» південна гіперкуля (за можливості візуалізовані об'єкти з обох сторін з різницею, наприклад, в кольорі). Рис. 3.1.2, г, д, стосовно рис. 3.1.2, в вказують проєкції багатовимірної гіперкулі в, трьохвимірних Прямокутних Координатах (z_1, z_2, z_3).

В інтелектуальних системах для спрощення визначення місця знаходження кінцевої точки вектора в первинному ТС-куті, можна урахувати незалежність координат ТС-кутів і замінити складну за аналізом «ромбовидну» сферичну основу пірамідального геометричного образу ТС-кутів на спрощену (у вигляді плоских ромбів рис. 3.1.2, б, або кругів чи квадратів у площині) за умови дотримання однаковості геометричної форми усіх ТС-кутів, площі їх гіперсфери та об'єму гіпертіла. При цьому вважаємо, що перераховані координати векторів не втрачають основну інформацію стосовно реальних даних.



Рис. 3.1.2. Мапи для **первинних** ТС-кутів (ТС-кластерів) у сукупності Сферичних, Радіальних та Прямокутних Координат, вектори яких мають змінні однакових знаків: а) мапа **первинних** пірамідальних ТС-кластерів на площині з «ромбовидною» основою (КВ – тілесний векторний кут див. далі); б) мапа спрощених первинних ТС-кластерів з ромбом в основі); в), г), д) сукупна мапа первинних ТС-кластерів у Прямокутних, Сферичних та Радіальних Координатах

3.2. КООРДИНАТИ СФЕРИЧНИХ ТІЛЕСНИХ КУТІВ ЗІ ЗМІННИМИ РІЗНИХ ЗНАКІВ.

Система координат первинних сферичних тілесних кутів зі змінними різних знаків у векторах схожа з координатами первинних сферичних тілесних кутів зі змінними однакових знаків у векторах. Але у формулах (3.1.1) *кут широти гіперсфери* (Ш-кут) змінює знак $\theta = -90^\circ$ (*північної широти*)... 0° ... $+90^\circ$ (*південної широти*), а екватор розділяє між собою ТС-кути і тим самим удвічі збільшує кількість первинних пірамідальних ТС-кутів (до $2m$), основа яких набуває трикутну форму. ТС-кути уздовж екватора можна розміщувати декількома рядками згідно з заданим експертом порядковим номером («від меридіана Грінвіча»). Їх також можна розподіляти на частки поверхнями гіперсфер різних радіусів.

3.3. КООРДИНАТИ ВЕКТОРНИХ ТІЛЕСНИХ КЛАСТЕРІВ.

Тілесні векторні кути (ТВ-кути, ТВ-кластери) охоплюють частку тіла та поверхні гіперкулі заданими експертом граничними векторами $X^b = (x_1^b, x_2^b, \dots, x_j^b, \dots, x_n^b)$, $b = 1, 2, \dots, B$. Проведені площини через відповідні сусідні радіус-вектори R^b , $b=1, 2, \dots, B$, та початок координат виділяють у тілі гіперкулі тілесний векторний кут (ТВ-кут/ТВ-кластер), усі вектори якого об'єднані визначеним експертом критерієм чи властивістю. Належність нового вектора X до ТВ-кута може бути визначеною за центроїдом ТВ-кластера або за методом сусідства. Приклад ТВ-кута/ТВ-кластера наведений на рис. 3.1.2, а у вигляді контура ТВ вказаного жирною штриховою лінією на поверхні гіперсфери, якої ковзає кінець вектора, що проходить також через центр гіперкулі, і створює поверхню, яка охоплює частку тіла та поверхні гіперкулі. **Первинний** ТВ-кут може бути поділений на частки **вторинними** ТВ-кутами чи гіперфігурами (наприклад, гіперсферами різних радіусів). ТВ-кути/ТВ-кластери можуть бути первинними або вторинними кластерами.

3.4. КООРДИНАТИ СКЛАДНОГО ТІЛЕСНОГО КЛАСТЕРА.

Складний тілесний кластер складається з кількох різних кластерів з векторами однакових класів. У тілі ТП-кута багатовимірних Прямокутних Координат, або в тілах ТС-кутів багатовимірних Сферичних Координат експерт може виділити кластери з векторами однакових класів у вигляді відомих геометричних об'єктів малих 1-, 2-, 3-вимірів (прямих ліній, площин, поверхонь, куль, сфер, еліпсоїдів тощо). З цих об'єктів можна скласти складні кластери.

За результатом у багатовимірному просторі отримуємо складний тілесний кластер для векторів одного класу, складений з кількох сумісно та окремо розміщених відомих фігур.

3.5. КООРДИНАТИ ВТОРИННИХ ТІЛЕСНИХ КЛАСТЕРІВ.

Вторинними називаються кластери, які є складовими визначених раніше первинних кластерів. При цьому частка первинних кластерів є порожніми, частка вміщує вектори однакового класу, а частка має вектори різних класів. Саме частка *первинних* кластерів, яка вміщує вектори різних класів, потребує подальшого розподілу тіла на деяку сукупність тіл *вторинних* кластерів (з еквівалентними об'ємом, поверхнею гіперсфери та вміщеними в них векторами) до отримання в усіх кластерах лише векторів одного класу. Таким чином, кожен *первинний* кластер з векторами різних класів повинен мати *вторинну* (нову, локальну, власну) Систему Координат для визначення адрес *вторинних* кластерів, сукупність яких загалом заповнює вказаний *первинний* кластер з векторами різних класів. При цьому потрібно передбачувати можливість розподілу й *вторинних* кластерів на наступні *допоміжні* та *додаткові* кластери. Можливий ряд напрямів створення подібних вторинних кластерів:

1. Використовувати однаковий тип Системи Координат. Для подальшого розподілу *кожного первинного Т-кута* з векторами різних класів, критеріїв чи властивостей, можна використати метод переносу центра координат зі старого місця у нову точку осереднених координат векторів вказаного первинного Т-кута з *перерахунком нових координат його векторів* і визначенням адрес їх вторинних кластерів згідно з роботою [7].

2. Для кожного первинного Т-кластера з векторами різних класів використати визначену експертом нову індивідуальну *вторинну* Систему Координат, стосовно якої нам відомі координати первинного Т-кута та відомі змінні (координати) його векторів різних класів. Тому що існує нескінченна кількість варіантів визначення *вторинної* Системи Координат (починаючи з півосьових координат [20]), для вторинних кластерів треба поставити обмеження: доведення необхідності переходу на новий тип координат; вторинні координати повинні мати єдину теоретичну основу, єдиний загальний геометричний вигляд та загальну основу алгоритму розв'язання задачі. Прикладом початкових первинних даних для створення вторинних кластерів може бути візуалізовані 1-, 2-, 3- вимірні фігури багатовимірного простору рис. 3.5.1.

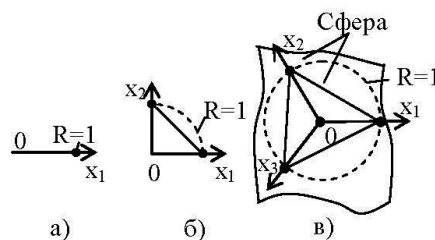


Рис. 3.5.1. Фігури для будовання вторинних кластерів багатовимірного простору:
а) 1-вимірна фігура; б) 2-вимірна фігура; в) 3-вимірна фігура

Приклади можливого розподілу первинного ТС-кластера на сукупність вторинних кластерів меншого об'єму наведені на рис. 3.5.2, згідно з якими вважаємо, що кожній осі координат $x_j, j=1, 2, \dots, n$, належить Тілесний Кульовий Сектор, аналіз якого відомий з довідників [23, с. 177].

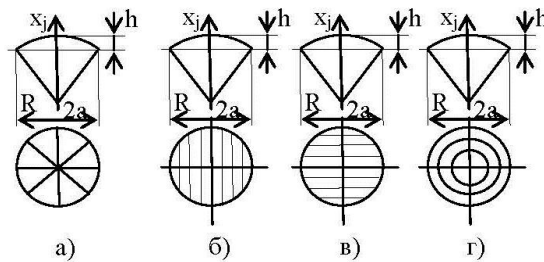


Рис. 3.5.2. Приклади вторинних кластерів первинного ТС-кластера

Побудувати в n -вимірному просторі кластер, який охоплює вектори з індивідуальними заданими експертом властивостями, може допомогти 3-х вимірний вектор $R = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (z_k)^2} z_j, k = 1, 2, 3$, який є тотожним n -вимірному вектору $R = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2}$ при $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, наприклад, за умови, що $z_1=x_1; z_2=x_2; z_3 = \sqrt{\sum_{j=3}^n (x_j)^2}$. Виходить, що однозначно візуалізувати вектор R за координатами багатовимірного простору $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, ми можемо, але його координати за осями (z_1, z_2, z_3) є багатоваріантними стосовно координат $x_j, j = 1, 2, \dots, n$, і ми не можемо за заданими координатами 3-вимірного простору (z_1, z_2, z_3) отримати однозначні координати у n -вимірному просторі $x_j, j = 1, 2, \dots, n$.

Додатковим засобом виділення візуалізованих кластерів у Т-кутах n -вимірного простору є гіперсфера багатовимірного вектора $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n), j = 1, 2, \dots, n$, з деяким іншим радіусом його гіперкулі $R = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$ (але загалом розподіл може бути виконаний будь-якою гіперповерхнею). Ця гіперкуля

Тіло Кульового Сектора [23, с. 177] в Сферичних Координатах може бути розподілений на задану експертом кількість вторинних Т-кластерів (з можливістю використання різних радіусів гіперкулі R та різної сукупності координат рис. 3.5.2).

вектора X у n -вимірній Евклідовій Системі Координат вміщує 2^n Тілесних кластерів (Т-кластерів) у вигляді Тілесних кутів (Т-кутів) з часткою площини гіперсфери $S_g = \frac{4\pi R^2}{2^n}$ та часткою об'єму гіперкулі $V_g = \frac{4}{3(2^n)} \pi R^3$, які приходяться на кожен Т-кластер.

У Сферичних Координатах центроїд Т-кластера знаходиться на сфері радіусом r , яка розподіляє усі Т-кути на дві задані частки за об'ємом (за «вагою»).

Радіус r знаходять з рівності $q \left(\frac{4}{3} \pi R^3 \right) = \frac{4}{3} \pi r^3$, звідки

$$r = \sqrt[3]{qR} = \sqrt[3]{q} \sqrt[3]{\sum_{j=1}^n x_j^2}, \quad (3.5.1)$$

де $q = 0 \dots 1$ – задане експертом відношення об'єму («ваги») тіла гіперкулі радіусом r до об'єму (до «ваги») гіперкулі радіусом R .

3.6. ПРИКЛАД ВИКОРИСТАННЯ СУКУПНОСТІ ОСЕЙ КООРДИНАТ.

Сукупність осей координат наведена на рис. 3.6.1, що розподілений на три частки:

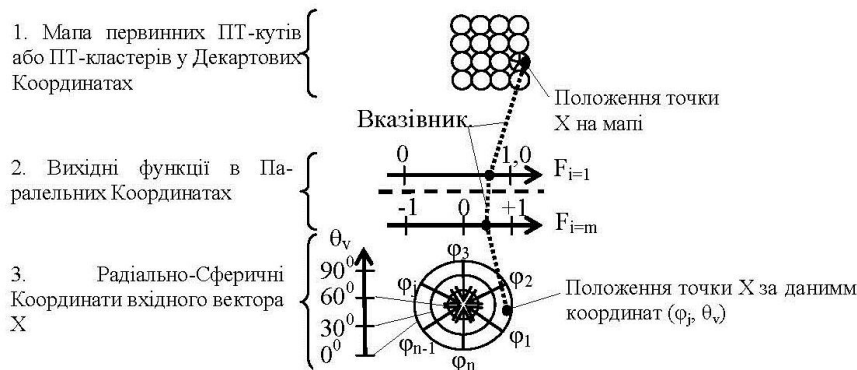


Рис. 3.6.1. Сукупність систем осей координат багатовимірного простору:

1. «Мапу первинних Т-кутів або Т-кластерів» з нумерованими Т-кутами та «Вказівником», який визначає ПТ-кут, в який попадає вхідний вектор X . Мапи первинних та вторинних ПТ-кластерів мають аналогічний вигляд і номери їх Т-кутів не змінюються. 2. «Вихідні функції в Паралельних Координатах» $F_i, i = 1, 2, \dots, m$.

3. «Радіально-Сферичні Координати вхідного вектора X », які мають «Вказівники» для вказівки значень окремих координат (координати наведені лише з одного боку Радіально-Сферичних Координат).

Для визначення числового значення координат використана вертикальна ось координат θ_v , та відповідні у вигляді кола круги $\theta_v, v = 1, 2, 3, 4; (\theta_1=0^\circ, \theta_2=30^\circ, \theta_3=60^\circ, \theta_4=90^\circ)$. У Радіально-Сферичних Координатах верхня частка мапи відноситься до Північної півкулі, а нижня (не показана) до Південної півкулі

4. Висновки.

1. Існуючі Системи Координат (Паралельні, Радіальні, Багатовидні, Т-кутів, одновимірні тощо) у сукупності дозволяють отримати:

– 100 %-ву візуалізацію змінних вхідного вектора $X=(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ та числових значень усіх вихідних функцій $F_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$ (найліпше – в Радіальних, Сферично-Радіальних або Паралельних Координатах);

– 100 %-ву візуалізацію місця знаходження в первинних кластерах вхідного вектора $X=(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ в універсальних (однакових для заданого n) мапах гіперкулі в Координатах ПТ- та СТ-кутів, які є дійсними для всіх Систем Координат (найліпше – в Координатах Т-кутів, у Сферичних та Сферично-Радіальних Координатах);

– 100 %-ву можливість уточнення місця знаходження вхідного вектора X в первинному кластері на мапі за рахунок використання вторинних кластерів. Мапа гіперкулі є однаковою для всіх Систем Координат при однаковому числі змінних n , і вона не змінюється при зміні положення центра координат;

– 100 %-ву можливість створення експертом в n -вимірному просторі заданих індивідуальних геометричних фігур 1-, 2-, 3-го вимірів, що охоплюють n -вимірні вектори X із заданими числовими змінними або за оцінками експерта за функціями $F(X)$ (найліпше – з використанням Прямокутних Координат);

– 100 %-ву можливість виділення на мапі кластерів із заданою довільною сукупністю числових значень вхідних змінних та із заданою експертом функціональною їх оцінкою $F(X)$.

2. Первинні та вторинні кластери є засобами візуалізації координат змінних векторів X (об'єктів та процесів у багатовимірному просторі), а візуалізовані вихідні функції $F_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$, визначають функціональні залежності від змінних вектора X у кластерах.

3. Заміною змінних (наприклад, $z_1 = \sqrt{\sum_{j=1}^n (x_j)^2}$;

$$z_1=x_1, z_2 = \sqrt{\sum_{j=2}^n (x_j)^2}; z_1=x_1, z_2=x_2, z_3 = \sqrt{\sum_{j=3}^n (x_j)^2}$$

можна візуалізувати багатовимірні вхідні вектори $X=(x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ у вигляді їх моделей у 1-, 2-, 3-вимірному просторі та виділити візуалізовані кластери в тілі гіперкулі із заданими експертом довільними вихідними функціями $F_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$.

4. Візуалізовані вихідні функції $F_i(X)$, $i = 1, 2, \dots, m$, можна використовувати як сукупність згорнутих змінних для подальшого аналізу досліджуваної системи, наприклад, на основі одновимірної геометрії багатовимірною аналізу [9; 10].

5. Евристично отримані номери квадрантів та октантів [21, с. 16, 26–28] належить замінити на науково обґрунтовані порядкові номери ПТ-, ПС-кластерів, які забезпечують візуалізацію n -вимірних об'єктів.

6. Людина живе у багатовимірному просторі, щоденно використовує його особливості, але не має всієї інформації про багатовимірні змінні. Людина багато чого не бачить, не знає, не вміє і не розуміє. Наприклад, не бачить поле тиску всередині тіла, магнітні, електричні, гравітаційні, температурні поля; поля гіпнотичного впливу на людину; магнітне поле

та ауру людини. У багатовимірному просторі людина ураховує фізичні метрики змінних лише внаслідок незалежності осей їх «взаємно перпендикулярних» координат (тому що осям змінних можна надавати довільні напрями, назви, метрики та числові значення, бо всі вони – математично незалежні). Для отримання повнішої інформації про багатовимірний простір потрібно мати відповідні датчики та системи прийняття рішень.

7. У n -вимірному просторі можна візуалізувати довільні 1-, 2-, 3- вимірні геометричні фігури та кластери (або їх центроїди) для будь-якої функціональної залежності в усіх відомих системах координат. Це означає можливість візуалізації складної формули, інформації «чорного ящика» та складного багатовимірного об'єкта.

АНАЛІЗ ДЕЯКИХ ТВЕРДЖЕНЬ.

Деякі твердження (навіть у фаховій літературі) на сьогодні є застарілими і не відповідають потребам геометричної багатовимірної візуалізації об'єктів:

1. «Людина живе в трьохвимірному просторі» – це відоме твердження Арістотеля 3000 років назад живе і в наші дні. Але з точки зору геометрії, людина живе в n -вимірному арифметичному просторі з контекстними арифметичними метриками. Геометричний трикутник можна отримати також й в координатах психічних вимірювань. І ознаки (змінні) людини можуть виходити за рамки його фізичного тіла (температура тіла; аура; погляд; здатність тіла притягувати немагнітні об'єкти; здатність людини бачити те, що знаходиться за межами його зору). Деякі змінні людина бачить (розміри, колір), деякі відчуває (вітер, час, запах, звук, дотик), а інші вимірює, розраховує або оцінює (електрострум, інтелект, фінансовий стан).

2. «Людина нездатна сприймати більше ніж три взаємно перпендикулярні напрями» [21, с. 282] – це твердження є неправильним, бо в геометрії контекстна «взаємна перпендикулярність» означає контекстну «незалежність» змінних, а в дійсності людина бачить незалежні розміри об'єкта (x_1, x_2, x_3), плюс кольори (x_4, x_5), плюс швидкість і напрямки руху (x_6, x_7) та ін. І на сьогодні існують Системи Координат з n -вимірними та візуалізованими контекстно незалежними («взаємно перпендикулярними») осями [8–20].

3. Потрібно ввести опис контекстної Системи Координат Арифметичного Багатовимірного Простору [21, с. 281–309] у Міжнародну Систему Одиниць, державні стандарти, навчальні посібники та довідники – поряд з контекстною Міжнародною Системою «СІ».

4. При навчальних закладах сукупність Систем Координат в аналізі звичайно не використовують. Але подібний напрям для загального випадку є *шкідливим*, бо саме сукупність Систем Координат дозволяє більш повно описати складні системи [20].

5. За Арістотелем є лише одна Система Координат для вимірювання трьохвимірного простору (бо більше за три виміри не існує). Цей центр координат за формулою його перенесення може знаходитися в будь-якій точці, **яка визначена людиною**. Між тим наука не може заперечити факт, що кожен об'єкт

(Всесвіт, Земля, людина, тварина, рослина чи камінь) має власну контекстно незалежну («взаємно перпендикулярну») Систему Координат з різною кількістю змінних та різними арифметичними діапазонами, і їх належить аналізувати з урахуванням індивідуальності. Співпадіння змінних (координат) векторів X двох об'єктів ще не означає їх тотожності (внаслідок їх різних функцій $F(X)$). Групування об'єктів, як це зроблено в зазначеній статті, означає намагання отримати не завжди точну їх класифікацію, бо кожен Об'єкт Всесвіту є Індивідуальним, а їх намагаються «зробити Однаковими». Сторонній камінь знаходиться в багатовимірному полі людини, але, через незалежності осей координат каменя та людини, їх координатний зв'язок є двостороннім,

контекстним, а головне – рівноправним. Тварини митять свою територію (визначають її координати), не питаючи у людини про Систему Координат. **Бо людина – не Бог Справедливості**, і його виміри не є вічними. Людина не раз помилялася стосовно Координат: Землю визнавала «пласкою»; помилково вибирала за ознаками царів, Тельців та Богів; визначала «своїх та чужих недолудей», яких належить експлуатувати, грабувати та знищувати з метою наживи; не знаючи мови тварин, відмовила всім їм (від черв'яків до приматів) у почуттях і поставила на них клеймо «інстинктів»; поставила все живе на Землі на грань виживання заради тієї ж наживи у вигляді безтурботного споживання запасів енергії.

Список використаних джерел

1. <https://www.us1sp.edu/institute-for-data-analytics-and-visualization/>. Інститут аналізу даних та візуалізації.
2. <https://www.workingknowledge.com/blog/improve-productivity-through-data-visualization/>, Improve Productivity through Data Visualization, Dec 16th 2012 Andrea Meyer.
3. [https://www.salesforce.com/hub/analytics/data-visualization-advantages/#Data visualization, 20.12.2019.](https://www.salesforce.com/hub/analytics/data-visualization-advantages/#Data%20visualization,20.12.2019.)
4. Tryon R. C. Cluster analysis. – London : AnnArborEdwardsBros, 1939. – 139 p.
5. Жамбю М. Иерархический кластер-анализ и соответствия. – М. : Финансы и статистика, 1988. – 345 с.
6. Kohonen T. Self-Organizing Formation of Topologically Correct Feature Maps // Biological Cybernetics. – 1982. – 43. – P. 59–69.
7. Кутковецький В. Я. Теорія кластерів. // Наукові праці. Серія «Комп'ютерні технології». – Вип. 305. – Т. 317. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 63–69.
8. d'Ocagne M. Coordonnées parallèles et axiales : Méthode de transformation géométrique et procédé nouveau de calcul graphique déduits dela considération des coordonnées parallèles. – Paris : Gauthier-Villars, 1885.
9. Inselberg A. The Plane with Parallel Coordinates. // The Visual Computer. – 1 (4). – 1985. – P. 69–91.
10. Inselberg A. Parallel Coordinates : Visual Multidimensional Geometry and its Applications. – New York : Springer, 2009.
11. Глейзер Г. І. Історія математики в школі IX – X класи. – К., 2004.
12. Mario Arturo Reiz Estrada. Multi-Dimensional coordinate spaces. // Journal of the Physical Science. – Vol. 6 (3). – 4 February, 2011. – P. 340–357.
13. Тарасюк О. М., Харченко В. С. Динамические радиальные метрические диаграммы в задачах управления качеством программного обеспечения. // 36. наук. праць ін-ту проблем моделювання в енергетиці ім. Г. С. Пухова. – К. : НАНУ, ІПМЕ, 2003. – Вип. 22. – С. 202–205.
14. Романенков Ю. А., Вартачан В. М., Прончаков Ю. Л., Зейниев Т. Г. Средства инфографического анализа агрегированных показателей многомерных объектов и систем // Системи обробки інформації. – Харьков : Национальний аерокосмічний університет ім. Н. Е. Жуковського «ХАІ». – 2016. – Випуск 8 (145). – С. 157–165.
15. Гумен С. М. Моделювання біомедичних багатопараметричних систем методами багатовимірної геометрії. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Спеціальність 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Київ: Київський національний університет будівництва і архітектури, 2007. – 23 с.
16. Ляковська С. С. Геометричне моделювання багатопараметричних систем способом епюра n-простору. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук. Спеціальність 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Мелітополь : Міністерство аграрної політики України, Таврійський державний агротехнологічний університет, 2010. – 25 с.
17. Гумен О. М. Моделювання проєктивних n-просторів багатопараметричних технічних систем. Автореферат дисертації на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук. Спеціальність 05.01.01 – Прикладна геометрія, інженерна графіка. – Мелітополь : Таврійський державний агротехнологічний університет, 2011. – 39 с.
18. Кутковецький В. Я. Аналітична геометрія в n-вимірних тілесних кутах // Наукові праці : Науково-методичний журнал. – Вип. 254. – Т. 266. Комп'ютерні технології. – Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2015. – С. 30–41.
19. Кутковецький В. Я. Одновимірна аналітична геометрія багатовимірного аналізу // Наукові праці. Серія «Педагогіка». – Вип. 291. – Т. 303. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2017. – С. 20–26.
20. Кутковецький В. Я. Аналітична геометрія тілесних кутів з паралельними осями координат // Наукові праці. Серія «Комп'ютерні технології». – Вип. 296. – Т. 308. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2017. – С. 9–13.
21. Кутковецький В. Я. Теорія візуалізації багатовимірних об'єктів аналітичної геометрії. // Наукові праці : наук. журн. Серія : «Педагогіка». – Вип. 301. – Т. 313. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2018. – С. 31–41.
22. Гриньков В. В., Кириченко І. К. Аналітична геометрія: підручник для вищих техн. навч. закладів. – Харків : Гімназія, 2008. – 340 с.
23. Немець К. А., Немець Л. М. Теорія і методологія географічної науки : методи просторового аналізу. – Х. : ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2014. – 172 с.
24. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике для инженеров и учащихся вузов. – М. : Госиздат, 1954. – 608 с.

ГЕОМЕТРИЯ КЛАСТЕРОВ

В данное время визуализация многомерных геометрических образов является одним из основных препятствий в повышении производительности труда человека. И добиться ее в многомерном пространстве можно путем визуализации телесных или объектных кластеров с векторами разных классов. Согласно геометрии Телесных углов (первичных Прямоугольных PT_h -углов/ PT_h -кластеров, где $h = 1, 2, \dots, H$ – их порядковые номера), любой вектор входа $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ попадает в один из PT_h -кластеров тела гипер шара, которое имеет визуализированную карту. В теле каждого первичного PT_h -кластера по заданным критериям $F_{his}(X^A)$ визуализируются вторичные PT_{his} -кластеры (здесь $his = 1his-, 2his-, 3his-$ измерение пространства PT_{his} -кластера; ($i = 1, 2, \dots, m$; $s = 1, 2, \dots, S$) – первый и второй порядковые номера PT_{his} -кластера. PT_{his} -кластеры имеют телесные (ПТ) или объектные (ПО) векторы-центроиды X^{PT}, X^{PO} . Принадлежность нового вектора X к центроидам (X^{PT}, X^{PO}) определяется по взвешенным расстояниям. Рассмотрены n -мерные Сферические Координаты и их Телесные углы (CT_h -углы, CT_h -кластеры), Координаты вторичных кластеров и объединяющие особенности всех Систем Координат.

Ключевые слова: геометрия; многомерность; визуализация данных; кластер.

V. Kutkovetsky,

Petro Mohyla Black Sea National University, Mykolaiv, Ukraine

GEOMETRY OF CLUSTERS

In present time visualization of multidimensional geometric objects became one of principal obstacles on raising the productivity of labour. To achieve it in the multidimensional space it is necessary to visualize bodily or object clusters with vectors of different classes. According to the geometry of Solid angles (initial Rectangular Solid RS_h - angles, RS_h -clusters, where $h = 1, 2, \dots, H$ is their order numbers), any incoming vector $X = (x_1, x_2, \dots, x_j, \dots, x_n)$ get into one of initial RS_h -clusters in body of hypersphere, which has visualized maps. In the body of each initial RS_h -cluster with objects of different classes according to the expert's criteria $F_{his}(X)$, are visualized secondary RS_{his} -clusters (here $his = 1his-, 2his-, 3his-$ dimension of RS_{his} -cluster's space; ($i = 1, 2, \dots, m$; $s = 1, 2, \dots, S$) – first and second order numbers of a RS_{his} -cluster. RS_{his} -clusters have bodily's (RB) or object's (RO) vectors-centroids X^{RB}, X^{RO} . Affiliation of the new vector X to centroids (X^{RB}, X^{RO}) is determined by weighted distances. The n -dimensional Spherical Coordinates and their Solid Angles (SA_h -angles, SC_h -clusters), the Systems of Coordinate for second clusters and the unification features of all Coordinate Systems are considered.

Key words: geometry; multidimensionality; data visualization; clusters.

Рецензенти: Мещанинов О. П., д-р. пед. наук, професор;

Мусієнко М. П., д-р. техн. наук, професор.