УДК 004.42:51

Кравець І.О. кандидат технічних наук, старший викладач факультету комп'ютерних технологій;

Кравець Ірина Олександрівна, кандидат технічних наук, старший викладач факультету комп'ютерних технологій. Має до 30-ти наукових публікацій, у тому числі у провідних журналах Росії, України, США. Коло наукових інтересів: математичне моделювання електротехнічних процесів, чисельні методи, статистична обробка даних на комп'ютері.

Використання пакета Mathcad для розв'язання нестаціонарних диференціальних рівнянь у частинних похідних

Показана можливість використання математичного пакета Mathcad для розв'язання нестаціонарних рівнянь у частинних похідних, для розв'язання яких нема вбудованих функцій. Приведений алгоритм та програма розв'язання рівняння теплопровідності у середовищі пакета Mathcad.

The possibility of using the programming product Mathcad for solving dynamic partial differential equations is shown, because there are no built-in functions for solution such an equations. There are also given the algorithm and the program of the solution heat conduction equation.

Математичий пакет Mathcad-8.0 professional є найпотужнішим математичним пакетом, який поєднує широкий спектр обчислювальних інструментів з використанням сучасних методів обробки чисельних і символьних даних і побудову графіків на площині і в просторі. Такі задачі, як розв'язання систем нелінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання систем нелінійних звичайних диференціальних рівнянь, пошук екстремумів багатовимірної функції, обробка статистичних даних, виконується за допомогою вбудованих функцій пакета Mathcad. Однак, там нема вбудованих функцій для розв'язання нестаціонарних рівнянь у частинних похідних. Але середовище пакета Mathcad є дуже зручним для розв'язання таких задач: по-перше, завдяки операторам програмування, які вбудовані в пакет і дозволяють скласти свою програму; по-друге, завдяки вбудованим функціям, які виконують окремі блоки програми; по-третє, завдяки зручному інтерфейсу і графічним засобам представлення рішення.

Розглянемо, як приклад, рівняння теплопровідності, яке часто використовується в екологічних та технічних задачах:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \mathrm{f}(x,t),$$

нехай у даному випадку f(x,y) = 0. Початкові умови: $V_i^0 = \varphi(x_I)$; крайові умови $V_0^j = \psi_1(t)$; $V_{NX}{}^j = \psi_2(t)$.

$$\frac{V_i^{\,j} - V_i^{\,j-1}}{\tau} = \alpha^2 \left(\frac{V_{i+1}^{\,j} - 2V_i^{\,j} + V_{i-1}^{\,j}}{h_x^2} \right).$$

У формулі використані такі позначення: V_I^J – значення невідомої функції на j-му часовому шарі у i-ій точці по координаті X; NX – число точок по координаті X; NT – число часових шарів; h_x – крок по координаті X; τ – крок по часу; α – коефіцієнт теплопровідності; $\psi_1(t)$ – крайові умови у точці $X = 0$ в залежності від часового шару; $\psi_2(t)$ – крайові умови у точці $X = Nx \cdot h_x$ в залежності від часового шару; $\varphi_1(X_i)$ – значення шуканої функції у початковому шарі за часом.

При зображенні похідних скінченними різницями і використанні неявної чисельної схеми інтегрування на кожному j-му часовому шарі маємо систему алгебраїчних рівнянь:

$$\gamma V_{i-1}^{j} - (1+2\gamma) V_i^{j} + \gamma V_{i+1}^{j} = -V_i^{j-1}$$

Або у результаті маємо таку систему алгебраїчних рівнянь на кожному j-му часовому шарі:

для $i = 1 \ldots NX$-1, $\gamma = \frac{a^2 \cdot \tau}{h_x^2}$

Позначимо $A_{i,j}$ як елементи матриці коефіцієнтів системи алгебраїчних рівнянь **AX** = **B,** яку ми отримуємо при заміні частинних похідних скінченними різницями, b_I – як елементи вектора вільних членів системи алгебраїчних рівнянь.

Це система лінійних алгебраїчних рівнянь, матриця коефіцієнтів якої має тридіагональну форму тільки при зміні однієї координати. У цьому випадку систему можна розв’язувати методом прогонки. Але у випадку зміни двох або трьох координат матриця коефіцієнтів не має тридіагональну форму, і метод прогонки використовувати неможна. Тому такі задачі краще розв’язувати методом LU-розкладання, де матрицю коефіцієнтів **A** розкладаємо на верхню трикутну **U** та нижню трикутну **L** так, щоб **A** = **L•U**. Розкладання виконуємо тільки один раз на першому часовому шарі. При переході на 2,3…- часові шари використовуємо матриці **L, U,** які ми вже отримали, підставляючи тільки нові значення вільних членів у формули знаходження рішення системи.

Тому алгоритм розв’язання диференціальних рівнянь у частинних похідних має такий вигляд:

1. Завдання NT, NX, h, τ, λ, $\phi(x)$, $\psi_1(t)$, $\psi_2(t)$.

2. Заповнення нульового шару за часом $V_i^0 = \phi(x_i)$.

3. $J = 1$.

4. Знаходження значень функції в крайових точках $V_0^j = \psi_1(t_j)$; $V_{NX}^j = \psi_2(t_j)$.

5. Якщо $J > 1$, то переходимо до пункту **7.**

6. Формування матриці коефіцієнтів **A** та її розкладання на нижню трикутну матрицю **L** і верхню трикутну матрицю **U.** Для розкладання матриці **A** використовуємо вбудовані функції пакета Mathcad: **AO** = lu**(A)** – саме розкладання матриці **A**; **L** = submatrix (**AO**, 0, NX–2, NX–1,2•NX–3), **U** = submatrix (**AO**, 0, NX–2, 2•NX–2,3•NX–4) отримання матриць **L, U**, які є підматрицями матриці результатів **AO.**

7. Знаходження елементів вектора вільних членів $b_i = -V_i^{j-1}$, $b_1 = -V_1^{j-1} - \lambda V_0^j$, $b_{NX-1} = -U_{NX-1}^{j-1} - \lambda U_{NX}^j$.

8. Отримання рішення системи рівнянь **AX = B.**

Оскільки **A** = **L•U**, тоді **L•U•X** = **B**. Позначимо **UX** = **Z**, тоді **LZ** = **B**. Завдяки нижній трикутній формі матриці **L** легко знайти **Z:**

$z_1 = b_1$,

$$z_i = \frac{(b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} \cdot z_k)}{l_{ii}},$$

$i = 2,\ldots NX\text{-}1$.

Тепер завдяки верхній трикутній матриці **U** можна знайти **X:**

$x_{nx-1} = z_{nx-1}$,

$i = NX\text{-}2,\ldots 1.$

$$x_i = \frac{(z_i - \sum_{k=nx-1}^{i-1} u_{i,k} \cdot x_k)}{u_{ii}},$$

Якщо $J = NT$, то це кінець, інакше $J = J + 1$, і повертаємось до п.4.

За таким же алгоритмом можливо розв’язання хвильового рівняння та будь-якого лінійного нестаціонарного рівняння у частинних похідних.

Нижче наведена програма розв’язання рівняння теплопровідності у середовищі пакета Mathcad:

```
V := for i ∈ 0 .. nx
         x ← i·hx
         V0,i ← ϕ (x)
     for j ∈ 1 .. nt
         t ← τ ·hx
         Vj,0 ← ψ 1(t)
         Vj,nx ← ψ 2(t)
         if j<2
             for i ∈ 0 .. nx − 2
               for i1 ∈ 0 .. nx − 2
                 Ai,i1 ← 0.0
             for i ∈ 0 .. nx − 2
                 Ai,i ← -(1 + 2·λ )
                 Ai−1,i ← λ   if i>0
                 Ai+1,i ← λ   if i<nx − 2
             AO ← lu(A)
             P ← submatrix(AO, 0, nx − 2, 0, nx − 2)
             L ← submatrix(AO, 0, nx − 2, nx − 1, 2·nx − 3)
             U ← submatrix(AO, 0, nx − 2, 2·nx − 2, 3·nx − 4)
         for i ∈ 1 .. nx − 1
           Bi−1 ← -Vj−1,i
         B0 ← -Vj−1,1 − λ ·Vj,0
         Bnx−2 ← -V(j−1,nx−1) − λ ·Vj,nx
         for i ∈ 0 .. nx − 2
             Z0 ← B0   if i<1
             Zi ← (Bi − Σ[k=0..i−1] Li,k·Zk)·1/Li,i   if i>0
         for i ∈ nx − 2, nx − 3 .. 0
             Xi ← Zi/Ui,i   if i>nx − 3
             Xi ← (Zi − Σ[k=i+1..nx−2] Ui,k·Xk)·1/Ui,i   if i<nx − 2
         for i ∈ 1 .. nx − 1
           Vj,i ← Xi−1
     V
```