УДК 519.3

Хомченко А. Н.

СЕРЕНДИПОВІ СКІНЧЕННІ ЕЛЕМЕНТИ: ФІЗИЧНА АДЕКВАТНІСТЬ

У статті описано явище фізичної неадекватності стандартних серендипових моделей вищих порядків (парадокс Зенкевича). Ми наводимо тут квадратний елемент(квадратична інтерполяція). Решта випадків аналогічні. Елементи серендипової сім'ї погано піддаються формалізації. Це дає нам повне уявлення про природу фізичної неадекватності. Цікаво вивчити можливість застосування конденсації для конструювання нових базисів серендипових скінченних елементів.

Ключові слова: *скінченні елементи серендипової сім'ї, базисні функції, фізична невідповідність інтегральних середніх*.

В статье описано явление физической неадекватности стандартных серендиповых моделей высших порядков (парадокс Зенкевича). Мы приводим здесь квадратный элемент (квадратичная интерполяция). Другие случаи аналогичны. Элементы серендипова семейства плохо поддаются формализации. Это дает нам полное представление о природе физической неадекватности. Интересно изучить возможность применения конденсации для конструирования новых базисов серендиповых конечных элементов.

Ключевые слова: *конечные элементы серендипова семейства, базисные функции, физическое несоответствие интегральных средних.*

The physical inadequacy of standard serendipity models of higher orders is described in the articles (Zienkiewicz paradox). We give some of square element (quadratic interpolation) here. The other cases are similar. Elements of serendipity family resist formalization. This gives us a complete picture of the nature of the physical inadequacy. It is interesting to study the possibility of application of condensation for the construction of new bases of serendipity finite elements.

Key words:*finite elements of serendipity family, basis functions, physical mismatch of integral averages.*

Постановка проблеми. Скінченні елементи(СЕ) часто використовуються у системах автоматизованого проектування (САПР), а також в автоматизованих системах наукових досліджень(АСНД). Основною проблемою СЕ серендипової сім'ї із самого початку їх існування (1968 р.) вважається фізична неадекватність вузлових навантажень від рівномірної масової сили.

Термін «навантаження» має узагальнюючий зміст і охоплює механічні, теплотехнічні,гідравлічні та інші навантаження на СЕ. Фізичні аномалії повузлового розподілу навантаження – суттєвий недолік елементів вищих порядків, а «від'ємні навантаження» – гостра форма неадекватності математичної моделі. Базис серендипового СЕ (ССЕ) у скінченно-елементних розрахунках відіграє потрійну роль. По-перше, він здійснює параметричні перетворення границь СЕ, по-друге, базис апроксимує фізичне поле, якщо відомі вузлові значення польової функції, по-третє, локалізація навантаження на вузли СЕ здійснюється шляхом інтегрального усереднення базисних функцій. Стандартні ССЕ лише з першими двома процедурами справляються задовільно . Процедура локалізації навантажень завжди супроводжується появою протиприродних від'ємних значень у повузловому розподілі (парадокс Зенкевича). Послідовні прихильники фізичних аналогій критикують стандартні моделі за те, що повузлові розподіли не узгоджуються із здоровим глуздом , хоча обчислення математично обґрунтовані. Варто зауважити, що аномальні розподіли зустрічалися і раніше, наприклад,у квадратурах Ньютона-Котеса. Зазвичай, довідники не рекомендують такі квадратури до практичного використання. В цьому випадку користувач має широкий вибір альтернативних квадратур. На стандартних ССЕ жодної альтернативи немає.

Фізична неадекватність з одного боку спричинила недовіру до стандартних ССЕ, а з іншого боку викликала хвилю підвищеного інтересу до серендипових апроксимацій і врешті решт вивела оптимістично налаштованих дослідників на альтернативні (нестандартні) моделі ССЕ. Сьогодні, коли парадокс від'ємних навантажень отримав пояснення, встановлено причини його виникнення і сконструйовано альтернативні базиси ,здається дивним, що поза увагою засновників стандартних ССЕ лишилася проста і наочна процедура конденсації. Тим більше, що на той час конденсація вже використовувалась у методі скінченних елементів (МСЕ). Саме конденсація переконливо доводить, що альтернативні розподіли існують, і це стимулює пошук нестандартних базисів.

Аналіз попередніх публікацій. Без перебільшення можна стверджувати, що за останні сорок років про ССЕ написано десятки монографій та підручників і сотні статей. В цій роботі ми посилаємося лише на ті джерела , які безпосередньо стосуються теми. Перша робота, з якої почалася історія ССЕ, з'явилася у 1968р.[1]. А вже через

три роки в англомовному варіанті книги[2]О. Зенкевич відверто визнає, що на всіх елементах серендипової сім'ї повузловий розподіл рівномірної масової сили має протиприродний характер і не узгоджується із здоровим глуздом. Зрозуміло, що йдеться про стандартні ССЕ. На той час альтернативних базисів ще не існувало .Перші альтернативні моделі з'явилися у 1982 р.[3], коли стало зрозумілим, що роль матричної алгебри в задачах інтерполяції дещо перебільшена, особливо, для функцій двох та трьох аргументів. В роботі[3] вперше застосовано ймовірнісно-геометричний підхід, що забезпечує математичну обґрунтованість і фізичну адекватність нових(альтернативних) моделей. Деякі подробиці про альтернативні моделі ССЕ та їх властивості є в [4]. А в [5] наведено прості приклади конденсації, яку деякі фахівці називають згущенням, редукцією, виключенням параметрів. На нашу думку, побудову ССЕ краще починати саме із виключення внутрішніх параметрів відповідного елемента лагранжевої сім'ї. Цей крок переконує в існуванні альтернативних моделей ССЕ і надихає на подальші пошуки . Зауважимо,що в [1] автори винахідливо підібрали необхідну модель, не використовуючи внутрішні вузли.

Мета роботи – на прикладі ССЕ другого порядку отримати і порівняти повузлові розподіли рівномірної масової сили лагранжевої та серендипової (стандартної і нестандартної) моделей.

Основна частина. На рис. 1 зображені скінченні елементи другого порядку: лагранжевий (9 вузлів) і серендиповий(8 вузлів). Ці елементи здійснюють біквадратичну інтерполяцію функції двох аргументів.

$$|x| \le 1,$$
$$|y| \le 1.$$

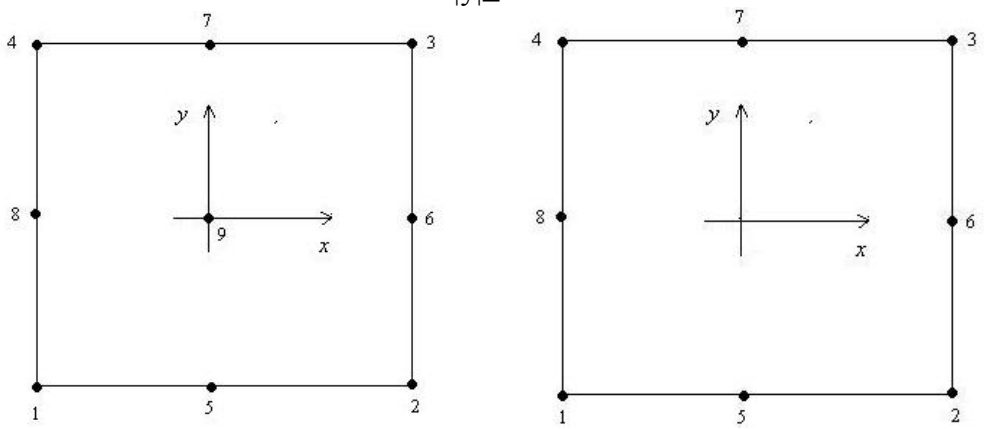

Рис.1. СЕ другого порядку: лагранжева модель (9 вузлів), серендипова модель (8 вузлів).

Локалізація навантаження на вузли елемента здійснюється шляхом інтегрального усереднення базисних функцій .Ця традиція започаткована ще Ньютоном і Котесом при побудові квадратурних формул для функції одного аргументу. Для функції двох аргументів вузлове навантаження на вузол i від одиничної масової сили визначається за правилом:

$$\gamma_i = \frac{1}{S} \int_D \Phi_i(x,y)\, dx\, dy, \qquad (1)$$

де S – площа області D; $\Phi_i(x,y)$ – базисна функція , що асоціюється з вузлом i . Базисні функції (незалежно від моделі інтерполяції) задовольняють умовам:

$$\Phi_i\ x_k, y_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = k, \\ 0, & \text{якщо } i \neq k; \end{cases} \quad \sum_{i=1}^{M} \Phi_i\ x, y = 1, \qquad (2)$$

де M – кількість вузлів; i – номер функції ; k – номер вузла.

Базис лагранжевої моделі складається із функцій

$$L_1(x,y) = \frac{1}{4}(1-x)(1-y)xy$$
$$L_5(x,y) = -\frac{1}{2}(1-x^2)(1-y)y; \qquad (3)$$
$$L_9(x,y) = (1-x^2)(1-y^2)$$

Решту функцій базиса $\{L_i(x,y)\}$ отримують з $L_1(x,y)$ і $L_5(x,y)$ переставленням змінних x і y.

Серендипів стандартний базис складається із функцій [2]:

$$N_1(x,y) = -\frac{1}{4}(1-x)(1-y)(x+y+1);$$
$$N_5(x,y) = \frac{1}{2}(1-x^2)(1-y) \qquad (4)$$

Із (4) не важко отримати решту функцій стандартного базису ССЕ.

Навантаження на вузли елемента лагранжевої сім'ї згідно з формулою (1) має вигляд:

$$\gamma_i = \frac{1}{36}, i = 1,2,3,4; \quad \gamma_i = \frac{4}{36}, i = 5,6,7,8; \quad \gamma_9 = \frac{16}{36}.$$

Навантаження на вузли елемента серендипової сім'ї має протиприродний характер:

$$\gamma_i = -\frac{1}{12}, i = 1,2,3,4; \quad \gamma_i = \frac{1}{3}, i = 5,6,7,8;$$

Від'ємні навантаження у кутових вузлах – загальний недолік усіх стандартних ССЕ [2]. На жаль, в пакетах прикладних програм використовують винятково стандартні ССЕ. На нашу думку, це сталося тому, що провідні фахівці з МСЕ виховані на ідеях авторитетного лідера – професора Зенкевича, який помилково вважав, що цього недоліку позбутися неможливо [2]. Майже усі справжні фахівці з МСЕ – це учні Зенкевича або учні його учнів. Автор цієї статті більшість важливих наукових результатів також отримав під стимулюючим впливом Зенкевича.

Отже, авторитет Зенкевича похитнути неможливо, але виправити помилку – обов'язок вдячного послідовника. Цікаво не просто знайти пояснення «парадокса

Зенкевича», але й зробити певний внесок у конструктивну теорію серендипових апроксимацій. В цьому відношенні наша стаття є продовженням [6].

Конденсація (редукція) – це ущільнення інформації у граничних вузлах СЕ з метою вилучення внутрішнього вузла. Виявляється, що процедура перетворення лагранжевої моделі на серендипову досить проста і легко формалізується. Наприклад, у нашому випадку (рис. 1) необхідно $\gamma_9 = \frac{16}{36}$ правильно розподілити між вузлами на границі. Зрозуміло, що «рецептів» розподілу безліч. Серед них є природні і протиприродні. Нижче показано, що стандартний базис ССЕ – це результат протиприродної конденсації. А зараз спробуємо знайти альтернативний базис біквадратичної інтерполяції на ССЕ: математично обґрунтований і фізично правдоподібний. Що в першу чергу спадає на думку? Безумовно, це рівномірне розподілення внутрішньої частки $\frac{16}{36}$ по граничних вузлах. Так виникає коефіцієнт (кількість граничних вузлів – 8). Від простої і зрозумілої фізичної схеми один крок до математичного правила побудови відповідної базисної функції. Кожна базисна функція $N_i(x,y)$ серендипової моделі утворюється із відповідної базисної функції $L_i(x,y)$ лагранжевої моделі шляхом <u>додавання</u> певної частки внутрішньої функції $L_9(x,y)$:

$$N_i(x,y) = L_i(x,y) + \alpha_i L_9(x,y), \sum_{i=1}^{8} \alpha_i = 1 , \qquad (5)$$

де i – номер вузла на границі СЕ.

Для $\alpha_i = \frac{1}{8}$ маємо альтернативний базис:

$$N_1(x,y) = \frac{1}{8}(1-x)(1-y)(3xy + x + y + 1);$$

$$N_5(x,y) = \frac{1}{8}(1-x^2)(1-y)(1-3y). \qquad (6)$$

Повузловий розподіл рівномірної масової сили тепер має вигляд:

$$\gamma_i = \frac{1}{12}, i = 1,2,3,4; \qquad \gamma_i = \frac{1}{6}, i = 5,6,7,8;$$

Цей розподіл, до речі, ідеально узгоджується із правилом Симпсона, якщо СЕ – це конструкція із 4-х одновимірних СЕ (стержнів). Зрозуміло, що усі функції нового базису задовольняють умовам (2).

Універсальне правило (5) приваблює простотою і наочністю. До речі, воно спростовує твердження Зенкевича про те, що СЕ погано піддаються будь-якій формалізації. Варто зауважити, що базис (6) неможливо отримати методом оберненої матриці, що свідчить про неефективність матричної алгебри в задачах інтерполяції функцій багатьох змінних.

Щоб отримати базис Зенкевича (4), треба у формулі (5) взяти $\alpha_i = -\frac{1}{4}$ (для i = 1, 2, 3, 4), $\alpha_i = \frac{1}{2}$ (для i = 5, 6, 7, 8). З математичної точки зору тут помилок немає, але фізичну неадекватність розподілу приховати неможливо . Дуже важко знайти переконливе тлумачення такої конденсації. Наявність двох базисів (4) і (6) відкриває необмежені можливості для систематичного генерування альтернативних базисів ССЕ. Наприклад, арифметичне усереднення (4) і (6) звільнює кутові вузли від будь-яких навантажень:

$$\gamma_i = 0 \text{ для } i = 1,2,3,4; \ \gamma_i = \frac{1}{4} \text{ для } i = 5,6,7,8.$$

Для отримання змістовних моделей краще використовувати зважене усереднення.

Висновки. Для усунення фізичних аномалій в поузлових розподілах рівномірної масової сили ССЕ існує проста, наочна і ефективна процедура конденсації. Конденсація – переконливий аргумент на користь нематричних методів конструювання ССЕ. Подальші дослідження пов'язані із вивченням можливості розповсюдження цієї процедури на просторові елементи серендипової сім'ї.

ЛІТЕРАТУРА

1. Ergatoudis I. Curved isoparametric «quadrilateral» elements for finite element analysis / I. Ergatoudis, B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz// Internat. J. Solids Struct, 4, 1968.-P. 31-42.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / О. Зенкевич.- М.: Мир, 1975.-541 с.
3. Хомченко А. Н. Некоторые вероятностные аспекты МКЭ/ А. Н. Хомченко.- Ивано-Франковск: Ив. –Франк. ин-т нефти и газа, 1982.-9 с.- Деп. в ВИНИТИ 18.03.82, № 1213.
4. Астионенко И. А. Конструирование многопараметрических полиномов на бикубическом элементе серендипова семейства / И. А. Астионенко, Е. И. Литвиненко, А. Н. Хомченко // Научные ведомости Белгородского государственного ун-та. Математика. Физика.- Вып. 16, № 5 (60).- Белгород: Бел ГУ, 2009.- С. 15-31.
5. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э. Митчелл, Р. Уэйт.- М.: Мир, 1981.- 216 с.
6. Хомченко А. Н. Стандартные серендиповы многочлены и линейчатые поверхности / А. Н. Хомченко, Е. И. ,Литвиненко, И. А. Астионенко // Комп'ютерно- інтегровані технології: освіта, наука, виробництво.- № 6.- Луцьк: ЛНТУ, 2011.- С. 266-269.

Дата надходження статті до редколегії 26.04.2012 р.

ХОМЧЕНКО А. Н. – д.ф-м.н., професор, зав.кафедри вищої і прикладної математики ЧДУ імені Петра Могили.
Коло наукових інтересів: метод скінченних елементів, математичне моделювання.