

**Трунов Олександр Миколайович** – кандидат технічних наук, в.о. професора, зав. кафедри медичних приладів та систем Миколаївського державного гуманітарного університету ім. Петра Могили.

## ОСОБЛИВОСТІ СИНТЕЗУ РЕГУЛЯТОРІВ НА БАЗІ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ АДЕКВАТНОГО НАБЛИЖЕННЯ МОДЕЛІ

*Досліджено можливості синтезу регуляторів як пошук розв'язку задачі про адекватне наближення моделі. Продемонстровано для лінійних САУ зв'язок такої постановки задачі із задачами синтезу за критеріями максимуму стійкості. Надані чисельні приклади синтезу регуляторів САУ третього, четвертого та п'ятого порядків.*

*Regulator synthesis possibilities were investigated as search for task solution about adequate model approximation. The communication between such target setting and synthesis tasks using maximum durability are demonstrated for linear automatic control system (ACS). Numerical examples of ACS regulator synthesis of third, fourth and fifth degree were also represented.*

Адаптивне управління станом динамічних систем утворює необхідність оцінювати його та прогнозувати, перевизначати за критерієм адекватності параметри моделі, ідентифікувати систему до моделі, адаптувати модель та переналаштовувати систему керування [1-5]. Існуючі методи оцінки та прогнозування характеризуються суттєвими недоліками, такими, як невисока достовірність та невисока ефективність визначення відхилень системи від моделі, і, як наслідок, невисока ефективність попередження поступових відмов систем автоматичного управління (САУ). Тому у сучасних теоретичних дослідженнях усе більше приділяється увага методам визначення та прогнозування стану на базі адекватних інваріантних критеріїв нелінійних динамічних моделей та пошуку ефективних з погляду обчислень методів їх аналізу [2-3]. Практична реалізація існуючих експериментально-аналітичних методів, методів багатовимірного прогнозування дозволяє підвищувати у багатьох випадках ефективність попередження поступових відмов нелінійних САУ, завдяки чому підвищується точність, безвідмовність та якість їх функціонування.

Не зважаючи на широке практичне застосування лінійних регуляторів у літературі недостатньо приділено уваги питанням вибору та оптимального налаштування параметрів адаптивних регуляторів. Практичній реалізації таких САУ, параметри яких визначені на проміжок часу прогнозування на базі класичних лінійних законів керування, а саме П, ПІ, ПІД, ПІДД, перешкоджає складність обчислювальних алгоритмів та неможливість забезпечення належної якості управління. У зв'язку з цим останній час досліджувались

методи синтезу законів керування з оптимізацією параметрів за критеріями мінімізації квадрату відхилення, максимізації ступеню стійкості, максимізації швидкості та інші [1-3]. Головною метою цих досліджень було розробити алгоритми, що набували б рис універсальності та простоти обчислень з погляду реалізації їх на ЕОМ. Привабливим є підхід, що базується на визначенні інтервалу прогнозування виходячи із адекватного наближення моделі та окремих властивостях цього процесу [4-5].

В роботі поставлено за мету дослідити особливості синтезу регуляторів за підходом до цієї задачі як до задачі максимальної адекватності моделі, провести також порівняльний аналіз застосовності та властивостей даного підходу побудованого на рекурентній апроксимації з існуючими методами, розробленими для лінійних САУ.

*Постановка задачі та виклад основного матеріалу дослідження.* Для прозорості викладу особливостей існуючих підходів розглянемо лінійну САУ динаміка якої описується системою лінійних диференціальних рівнянь з одним входом та одним виходом

$$L_1(x) = L_2(x), \quad (1)$$

де  $L_1(x)$  – лінійний диференціальний оператор із сталими коефіцієнтами

$$L_1 = \frac{d^m}{dt^m} + \sum_{j=0}^{m-1} a_j \frac{d^j}{dt^j},$$

$L_2(x)$  – також лінійний диференціальний оператор із сталими невідомими коефіцієнтами

$$L_2(x) = kU(x)$$

є пропорційним керуючому впливу  $U(t)$ , який визначено відповідно до координати  $x(t)$ , що регулюється, також тут позначено  $k$  – коефіцієнт передачі об'єкту,  $a_j$  ( $j = \overline{0, m-1}$ ) коефіцієнти при похідних, які покладені далі константами. Управляючий вплив узагальнимо, охопивши усі види регуляторів (наприклад П, ІІ, ПД, ІІД)

$$U(x) = -b_0 \int_0^t x(\tau) d\tau - b_1 x(t) - b_2 \frac{dx(t)}{dt}.$$

У роботах по дослідженню нелінійних систем управління задача прогнозування поставлена як задача про адекватність моделі та об'єкту [4,5]. Там же встановлено спорідненість задач нелінійного програмування та прогнозування стану. Продемонструємо плідність ідеї про адекватний опис моделі та об'єкту також для синтезу регуляторів. Припустимо, що процес синтезу САУ, тобто визначення параметрів регуляторів, здійснюється шляхом їх зміни. За цих умов об'єкт і регулятор утворюють новий оператор, що відхиляється від (1). Позначимо цей новий оператор

$$T(x, \bar{b}) = L_1(x) - L_2(x) \bar{b}.$$

Якщо у ході налаштування параметрів, що позначаються вектором  $\bar{b}$ , підібрано, то  $T(x, \bar{b}) \equiv 0$ . Таким чином, задача про адекватне налаштування параметрів у цьому уявному експерименті розв'язана. Отже поставимо її як задачу мінімізації оператору  $T(x, \bar{b})$ . Однак, оскільки диференціальний оператор  $T(x, \bar{b})$  є лінійним, то задачу про мінімізацію диференціального оператора зведено до задачі про мінімізацію алгебраїчного оператора, який отримаємо застосувавши перетворення Лапласа

$$\tilde{T}(p, \bar{b}) = p^m + \sum_{j=0}^{m-1} a_j p^j + k_0 \sum_{j=0}^n b_j p^{j-1},$$

де вектор  $\bar{b} = [b_0, \dots, b_n]^T$  визначає сукупність координат, що використовуються у законі управління. Таким чином поставимо задачу про мінімізацію відхилення квадрату

оператору  $\tilde{T}(p, \bar{b})$ , або максимізації адекватного управління, за умов обмежень, які визначають адекватність похідних моментів оператору, кількість яких визначається законом управління. У даному випадку, оскільки оператор  $L_2(x)$  після перетворення Лапласа утворює алгебраїчний оператор другого порядку, то кількість обмежень дорівнює трьом, тобто на одиницю більше ніж порядок. Такий підхід забезпечує адекватність моделі та об'єкту нульового, першого, другого та третього роду для оператору та моментів від оператору обчислених відносно початку осі  $p$ . Введемо функцію Лагранжа

$$L(p, \bar{b}) = \tilde{T}^2(p, \bar{b}) + \lambda_1 \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_2 \left. \frac{\partial^2 [p\tilde{T}]}{\partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_3 \left. \frac{\partial^2 [p\tilde{T}]}{\partial p^2} \right|_{p=-c} + \lambda_4 \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{T}]}{\partial p^3} \right|_{p=-c}, \quad (2)$$

де  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  множники Лагранжа, а  $c$  додатне число, величина якого визначає стійкість однорідної системи. Далі відповідно до методу множників Лагранжа отримаємо систему рівнянь

$$\begin{aligned} 2\tilde{T}(p, \bar{b}) \frac{\partial \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_0} + \lambda_1 \left. \frac{\partial^2 \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_0 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_2 \left. \frac{\partial [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_0 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_3 \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_0 \partial p^2} \right|_{p=-c} + \lambda_4 \left. \frac{\partial^4 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_0 \partial p^3} \right|_{p=-c} &= 0, \\ 2\tilde{T}(p, \bar{b}) \frac{\partial \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_1} + \lambda_1 \left. \frac{\partial^2 \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_1 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_2 \left. \frac{\partial [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_1 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_3 \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_1 \partial p^2} \right|_{p=-c} + \lambda_4 \left. \frac{\partial^4 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_1 \partial p^3} \right|_{p=-c} &= 0, \\ 2\tilde{T}(p, \bar{b}) \frac{\partial \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_2} + \lambda_1 \left. \frac{\partial^2 \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial b_2 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_2 \left. \frac{\partial [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_2 \partial p} \right|_{p=-c} + \lambda_3 \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_2 \partial p^2} \right|_{p=-c} + \lambda_4 \left. \frac{\partial^4 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial b_2 \partial p^3} \right|_{p=-c} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{T}(p, \bar{b})}{\partial p} &= 0, \\ \left. \frac{\partial [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial p} \right|_{p=-c} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^2 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial p^2} \right|_{p=-c} &= 0, \\ \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{T}(p, \bar{b})]}{\partial p^3} \right|_{p=-c} &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Перетворимо (3) скориставшись незалежністю  $\tilde{L}_1(p)$  від вектора  $\bar{b}$  та попередньо

$$\begin{cases} 2\tilde{T}(p) \frac{k_0}{p} - \lambda_1 \left( \frac{k_0}{p^2} \right) = 0, & 2\tilde{T}(p) k_0 + \lambda_2 k_0 = 0 \\ 2\tilde{T}(p) k_0 p + \lambda_1 k_0 + 2\lambda_2 k_0 p + 2\lambda_3 k_0 = 0 \\ \frac{\partial \tilde{L}_1(p)}{\partial p} + k_0 \left( b_2 - \frac{b_0}{p_2} \right) = 0 \\ \left. \frac{\partial^2 [p\tilde{L}_1(p)]}{\partial p^2} \right|_{p=-c} + k_0 (2b_2 p + b_1) = 0 \\ \left. \frac{\partial [p\tilde{L}_1(p)]}{\partial p} \right|_{p=-c} + k_0 b_2 = 0 \\ \left. \frac{\partial^3 [p\tilde{L}_1(p)]}{\partial p^3} \right|_{p=-c} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

спростивши функцію Лагранжа

Розв'язок перших трьох рівнянь дає значення множників Лагранжа

$$\lambda_1 = \tilde{T}(p)p; \quad \lambda_2 = -2 \cdot \tilde{T}(p); \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Розв'язок останнього рівняння системи (4) дає значення оптимального параметру  $c$ . Підставляючи його значення у передостаннє рівняння знайдемо  $b_2$ , а далі знайдемо  $b_1$  та  $b_0$  як розв'язок системи рівнянь п'ятого та четвертого, після чого параметри регулятора повністю визначено.

З метою порівняння динамічних властивостей подамо аналіз для ПІД – регулятора, що синтезовано на базі підходу максимізації дійсної частини коренів [3]. Порівняння подамо для типового вхідного впливу одиничного стрибку  $1(t)$  [3]. Покладемо передаточну функцію у вигляді

$$W_0(p) = k_0 / (T_0 p + 1)^m, \quad (5)$$

управляючий пристрій ПІД – регулятор

$$U = b_0 \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + b_1 \varepsilon(t) + b_2 \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (6)$$

за умов, що  $t_0 = 0$ ,  $\varepsilon(t)$  – сигнал похибки, коефіцієнти  $b_0$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  – константи. Тоді передаточна функція та оператор системи мають відповідно вигляд

$$W_3(p) = \frac{k_0(b_0 + b_1 p + b_2 p^2)}{p(T_0 p + 1)^m + k_0(b_0 + b_1 p + b_2 p^2)},$$

$$\tilde{T}(p) = \tilde{L}_1(p) + k_0 \left( \frac{b_0}{p} + b_1 + b_2 p \right),$$

$$\tilde{L}_1 = (T_0 p + 1)^m,$$

$$\frac{\partial}{\partial p} [p \tilde{L}_1(p)] = \frac{\partial}{\partial p} [p(T_0 p + 1)^m] = (T_0 p + 1)^m + m p (T_0 p + 1)^{m-1} T_0,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2} [p \tilde{L}_1(p)] = \frac{\partial^2}{\partial p^2} [p(T_0 p + 1)^m] = 2m T_0 (T_0 p + 1)^{m-1} + m(m-1) T_0^2 p (T_0 p + 1)^{m-2},$$

$$\frac{\partial^3}{\partial p^3} [p \tilde{L}_1(p)] = \frac{\partial^3}{\partial p^3} [p(T_0 p + 1)^m] = 3m(m-1) T_0^2 (T_0 p + 1)^{m-2} + m(m-1)(m-2) T_0^3 p (T_0 p + 1)^{m-3},$$

При вхідному впливі у вигляді одиничного стрибка  $\varepsilon(t) = y_{перех}(t) = h(\infty) - h(t) = 1 - h(t)$ ,

де  $h(t)$  – перехідна функція системи, тоді звичайний інтегральний критерій синтезу, наприклад, інтегралу від квадрату похибки, набуває вигляду

$$J_0 = \int_0^{\infty} y_{перех}^2(t) dt$$

Для порівняння ефективності підходу до синтезу регуляторів за цим критерієм та критерієм максимуму адекватності (4) синтезуємо регулятор. Лишаючи  $m$  як параметр, визначимо оптимальне значення з останнього рівняння системи (4), яке запишеться за цих умов

$$\left. \frac{\partial^3}{\partial p^3} [p(T_0 p + 1)^m] \right|_{p=-c} = \left[ \frac{3m(m-1)T_0^2(T_0 p + 1)^{m-2} + m(m-1)(m-2)pT_0^3(T_0 p + 1)^{m-3}}{p} \right]_{p=-c} = 0.$$

Розв'язавши останнє відносно  $c$  отримаємо

$$c = \frac{3}{T_0(m+1)}.$$

Далі із шостого рівняння (4) після диференціювання та підстановки  $c$  отримаємо  $b_2$

$$2mT_0(T_0 p + 1)^{m-1} + m(m-1)pT_0^2(T_0 p + 1)^{m-2} + 2k_0 b_2 = 0,$$

$$b_2 = \frac{mT_0}{2k_0} \left( \frac{m-2}{m+1} \right)^{m-2}.$$

Тепер визначимо послідовно  $b_1$  та  $b_0$ , перетворюючи п'яте та четверте рівняння після підстановки опти-мального значення для  $c$

$$b_1 = \frac{1}{k_0} [m - 2]^{m-2} \frac{(5m - 4)}{(m + 1)^{m-1}}, \text{ а } b_0 = \frac{27 [m - 1][m - 2]^{m-2}}{2 k_0 T_0 (m + 1)^{m+1}}.$$

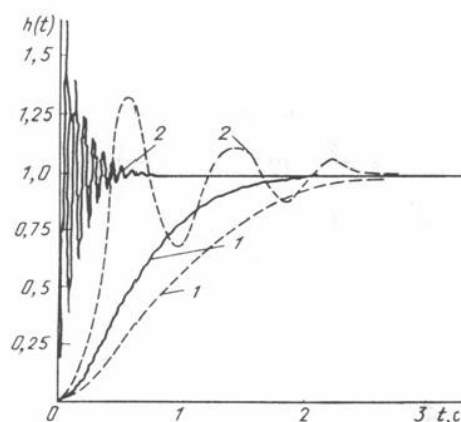
Аналіз системи (3) та (4) свідчить, що остання, у зв'язку із лінійністю вихідного оператору, розпадається на дві групи незалежних рівнянь. Крім того, оскільки система лінійна, то її можливо замінити на систему, що може бути утворена виходячи із умови нульового відхилення похідної від оператору, похідних від моменту оператору. Так забезпечуючи адекватність моделі та об'єкту під час управління, ці умови подамо

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} [\tilde{T}(p, \bar{b})] \Big|_{p=-c} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial p} [p \tilde{T}(p, \bar{b})] \Big|_{p=-c} &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial p^2} [p \tilde{T}(p, \bar{b})] \Big|_{p=-c} &= 0 \\ \frac{\partial^3}{\partial p^3} [p \tilde{T}(p, \bar{b})] \Big|_{p=-c} &= 0 \end{aligned}$$

Не складно переконатись, що розв'язком цієї системи за умов розглянутого тільки прикладу є абсолютно ідентичні вирази із виразами, що отримані на основі критерію максимального степеню стійкості у роботі [3]. Значення коефіцієнтів ПД – регулятора подані у таблиці 1 для значень  $T_0 = 0,2$ ;  $k_0 = 1$ ;  $m = 3, 4, 5$ .

**Таблиця 1. Коефіцієнти регулятора САУ.**

Порядок системи $m$	Коефіцієнти регулятора			Оптимальний параметр $c$
	$b_0$	$b_1$	$b_2$	
3	1,58203	0,6875	0,075	3,75
4	1,0368	0,512	0,064	3
5	0,78125	0,4375	0,0625	2,5



**Рис. 1. Перехідні процеси для об'єкту (5): –  $m=4$ ; ----  $m=3$ . Регулятор синтезовано за критерієм: 1 – максимуму адекватності; 2 – мінімум інтеграла від квадрата похибки**

Аналіз кривих (рис.1.) для процесів з  $m=3,4,5$ , тобто для систем третього, четвертого та п'ятого порядків, з регулятором, що синтезовано за критерієм максимуму адекватності, свідчить, що, як і слід було очікувати, виходячи із змісту критерію синтезу, є аперіодичні перехідні процеси на відміну від перехідних процесів, з регулятором синтезовано за критерієм мінімум інтеграла від квадрата похибки [3].

Продемонструємо можливості та переваги такого підходу до синтезу регулятора САУ за алгоритмом максимуму адекватності для утворення перехідних процесів з різним ступенем коливальності та згасання. Розкладемо корені у околі оптимального значення  $p = -c$  на площині комплексних чисел. Для прозорості викладу конкретизуємо систему задавши її порядок  $m=3$  та  $k_0=1$ . За цих умов момент оператора має вигляд

$$p\tilde{T}(p, \bar{b}) = p(T_0 p + 1)^3 + b_2 p^2 + b_1 p + b_0,$$

а корені подамо

$$p_{1,2} = \pm \omega_1 i - c, p_{3,4} = \pm \omega_2 i - c.$$

Тоді, скориставшись підходом, сформульованим системою (4)

$$b_2 = -\frac{mT_0(T_0 p + 1)^{m-2}[2 + (m+1)T_0 p]}{2k_0}, \quad (7)$$

$$b_1 = -[(T_0 p + 1)^m + mp(T_0 p + 1)^{m-1} - mT_0(T_0 p + 1)^{m-2}[2 + (m+1)T_0 p]p], \quad (8)$$

$$b_0 = p^2 \left[ b_2 + \frac{mT_0(T_0 p + 1)^{m-1}}{k_0} \right] = \frac{mT_0^2 p^3}{2k_0} (T_0 p + 1)^{m-2} (1 - m). \quad (9)$$

Таким чином, задаючи значення  $\omega_1$  та  $\omega_2$  можна змодельовати для конкретних значень синтезованого регулятора перехідні процеси, скориставшись оптимальним значенням дійсної частини

$$\operatorname{Re}(p) = -c = -\frac{3}{T_0(m+1)}$$

знайденої як розв'язок системи (4). Для аналізу узято систему з  $m=3$ ,  $k_0=1$ ,  $T_0=\frac{1}{5}c$ .

Поклавши  $\omega_1=0$  та  $\omega_2=\beta c$ , визначимо оптимальне на-лаштування вектора параметрів з коливальністю  $\varphi$  та згасанням  $\beta$ , де згасання визначимо

$$\beta = 1 - e^{-\frac{2\pi}{\varphi}}.$$

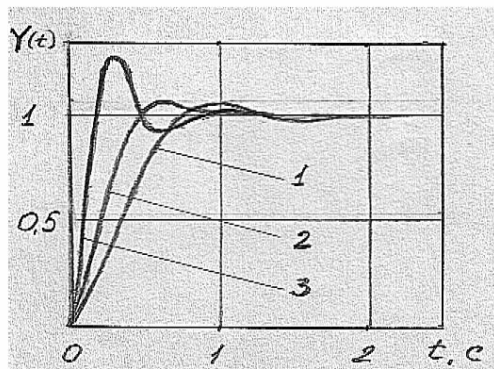


Рис. 2. Перехідні процеси для об'єкту (5), регулятор синтезовано за критерієм максимуму адекватності: 1— $\varphi = 0,8026$ , 2— $\varphi = 1,3333$ , 3— $\varphi = 2,668$ .

На малюнку 2 продемонстровано перехідні процеси, що виникають у замкненій системі регулювання (5) з регулятором, що реалізує закон управління (6) із значенням вектору параметрів  $[b_0, b_1, b_2]^T$  синтезованих за критерієм максимуму адекватності відповідно до виразів (7-9) є абсолютно ідентичними до процесів, що побудовані за принципом максимуму стійкості [3]. Наведені результати свідчать про здатність регулятора, синтезованого за алгоритмом (4), що реалізовує принцип максимуму адекватності, забезпечувати збіжні перехідні процеси у широких межах зміни затухання у межах  $0 \div 2,66$ . Останнє на ряду з простотою самого процесу синтезу робить цей критерій, на відміну від інтегрального критерію мінімізації похибки управляємої величини, більш привабливим. Оскільки у реальних умовах функціонування САУ різні фактори, що випадково змінюються, такі як властивості датчиків, параметрів об'єкту управління призводять до можливої втрати стійкості системи.

*Висновки:* 1. Алгоритм вибору параметрів за співвідношеннями (7–9) у основу якого покладено принцип максимуму адекватності, тобто мінімізації квадрата відхилення оператору, що моделює систему і незмінність відхилення оператору, моментів оператору і похідних від моментів у вигляді обмежень до задачі оптимізації з обмеженнями дає результати для лінійних систем ідентичні до принципу синтезу, що реалізує реалізує максимальну стійкість.

## Література

1. Александров А.Г. Синтез регуляторов многомерных систем М., “Машиностроение”, 1986. – С. 272.
2. Александров А.Г. Оптимальные и адаптивные системы М., “Высшая школа”, 1989. – С. 263.
3. Загарий Г.И., Шубладзе А.М. Синтез систем управления на основе критерия максимальной степени устойчивости. М. Энергоатом издат 1988. – С. 100.
4. Трунов О.М. Застосування методу рекурентної апроксимації до задач підвищення точності та безвідмовності систем керування Науково-методичний журнал, т. 35, вип. 22, МДГУ ім. Петра Могили, Миколаїв 2004. – С. 93-101.
5. Трунов О.М. Керованість, спостережність та ідентифіковність нелінійних систем керування підводними апаратами. – 36. Наукових праць НУК, Миколаїв. – С. 133-141.