12. УПОРЯДКУВАННЯ НУМЕРАЦІЇ ВЕРШИН ОРІЄНТОВАНОЇ МЕРЕЖІ

Задача пошуку найкоротшого шляху в мережі спрямована на збереження витрат ресурсів, наприклад, на будівництво та ремонт доріг, або на переміщення вантажів. При розв’язанні цих задач бажано мати упорядковану нумерацію вершин орієнтованої мережі [45].

В орієнтованій мережі з входом та виходом при упорядкуванні нумерації вершин спрощується розрахунок оптимального шляху між вершинами та виходу з мережі. Алгоритми послідовної нумерації вершин [45] та зустрічного упорядкування вершин мережі [56] не завжди дає бажане упорядкування. Упорядкування також потребує структурна матриця – символьна матриця, для якої діагональні елементи «$\boldsymbol{a_{ii} = 1}$», а інші елементи – символьні позначення ребер, причому «$\boldsymbol{a_{ij} > 0}$» при $\boldsymbol{i < j}$, та «$\boldsymbol{a_{ij} < 0}$» при $\boldsymbol{i > j}$. Згідно з теоремою теорії графів, щоб знайти усі шляхи з вершини «i» у вершину «j», потрібно розкрити мінор $M(i,j)$ структурної матриці з використанням методу булевої алгебри. Розкриття мінору визначає повний комбінаторний перегляд усіх шляхів, тобто означає розв’язання *NP*-повної задачі.

Ознакою упорядкування нумерації вершин є розміщення лише додатних дуг над головною діагоналлю її матричного відображення (додатною для даної вершини вважаємо дугу, яка виходить з вершини). Усі від’ємні дуги розміщуються під головною діагоналлю. Подібну властивість можуть мати матриці лише тих мереж, у яких дуги не створюють замкненого кола.

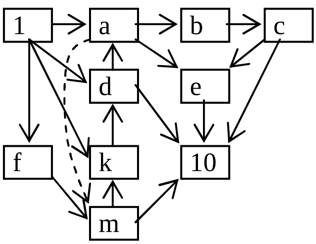

Рис. 12.1. Початковий вигляд орієнтованої мережі

Алгоритм нумерації вершин розглянемо на прикладі орієнтованої мережі рис. 12.1.

1. Розраховуємо загальну кількість вершин орієнтованої мережі (їх десять). Початок мережі позначаємо цифрою «1», а кінець – цифрою «10». Усі інші вершини помічаємо літерами *a, b, c, d, e, f, k, m*.

2. Перевіряємо в мережі відсутність замкненого кола, створеного дугами однакового напрямку. Якщо в мережі є замкнене коло, то його треба штучно перервати. Наприклад, показана пунктиром на рис. 12.1 дуга між вершинами «*a*» та «*m*» створює коло з вершин, яке треба перервати. Ми перериваємо (не враховуємо) більший або рівний шлях, у даному випадку пунктирну криву «a-m», бо шлях «1-a-m» ≥ «1-f-m».

3. Далі в орієнтованій мережі з відсутніми колами при нумерації вершин керуємось правилом: «***вершина, у яку входить дуга, має більший порядковий номер, ніж вершина, звідки надходить ця дуга***». З цього правила та рис. 12.1 випливають нерівності:

$$1 < f < m < k < d < a; \qquad a < b < c < e.$$

Об’єднуємо ці нерівності і розміщуємо їх послідовно в табл. 12.1, у яку вносимо послідовну нумерацію вершин.

Таблиця 12.1

Нумерація вершин

Позначення вершин	1	a	b	c	d	e	f	k	m	10
Номер вершини	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

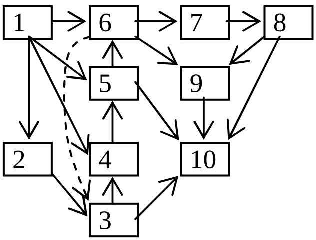

Рис. 12.2. Початковий вигляд орієнтованої мережі

n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1	–	1		1	1	1				
2	–1	–	1							
3		–1	–	1						1
4	–1		–1	–	1					
5	–1			–1	–	1				1
6	–1				–1	–	1		1	
7						–1	–	1		
8							–1	–	1	1
9						–1		–1	–	1
10			–1		–1			–1	–1	–

Рис. 12.3. Матрична форма орієнтованої мережі

На рис. 12.2. показана отримана нумерація вершин мережі, а на рис. 12.3 – її матрична форма.

Висновок. Даний алгоритм завжди дає упорядкування, яке не отримується за методами [45] та [56].