11. ЗАДАЧА ПРО ПРИЗНАЧЕННЯ

На виробництві виникає задача розподілу m машин за n роботами таким чином, щоб при відомій продуктивності праці c_{ij} (i-ої машини на j-ій роботі) отримати максимальний сумарний ефект. Так само може виникнути проблема розподілу m робітників за n ланками (чи за n посадами) з метою отримання максимального сумарного ефекту. Ми розглянемо задачу розподілу робітників за машинами.

У цьому випадку математична модель нагадує модель транспортної задачі $F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \max$ при обмеженнях $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1$, $j = 1, \ldots ,n;$ $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1$, $i = 1, \ldots, n$, але зі своїми властивостями (табл. 11.1) [39-43]:

1. У транспортній задачі функція мети спрямована до мінімуму, а в даному випадку загальна продуктивність праці спрямована до максимуму.
2. Кожна машина розглядається як «користувач» по відношенню до робітників і вимагає лише одного робітника.
3. Кожний робітник розглядається як «постачальник» лише одиниці робочої сили.
4. Задача про оптимальне призначення розглядається при $m = n$ з метою отримання «закритої транспортної задачі». Якщо ця умова не виконується, уводяться фіктивні робітники – «постачальники», або фіктивні машини – «користувачі» при нульовій продуктивності праці $c_{ij} = 0$.

Таблиця 11.1

Початковий вигляд задачі про оптимальне призначення

Робітники M_i	**Машини** N_j	
	1	**1**
1	4; $\boxed{1}$;	3; $\boxed{0}$;
1	2;	5; $\boxed{1}$;
1	5; 1;	7;

Тому табл. 11.1 переробляється в табл. 11.2 для виконання вимог транспортної задачі таким чином:

1. Задача табл. 11.1 не закрита, бо кількість робітників $M_i = 3$, а кількість машин $N_j = 2$. Тому в табл. 11.2 уводимо фіктивного «користувача» – машину з вимогою одного робітника і з нульовою продуктивністю праці $c_{ij} = 0$ по всій колонці. У результаті задача стає закритою.
2. Змінюємо знак ефективності праці робітників з «$+c_{ij}$» на «$–c_{ij}$». У результаті «ефективність праці робітника» чи «прибуток при роботі

робітника» набуває протилежного тлумачення – «втрати при роботі робітника»: найбільша ефективність робітника розглядається як його найбільша неефективність. Це дає можливість виконати ще одну умову транспортної задачі – спрямувати функцію мети до мінімуму $F = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min$. Звичайно в літературі цю вимогу транспортної задачі задовольняють заміною ефективності праці робітників c_{ij} на різницю ($c_{ij}^{\max} - c_{ij}$) (тут $c_{ij}^{\max}$ – максимальне значення ефективності праці робітника), і отриманий таким чином новий тариф тлумачиться як «шкодування за втраченою продуктивністю», який потрібно звести до мінімуму; але такий у цілому вірний підхід потребує додаткових розрахунків, у той час як при зміні знака ефективності можна просто вимагати, щоб у таблиці «транспортної задачі» «ефективність праці робітника» c_{ij} бралась з від'ємним знаком.

3. У результаті отримана табл. 11.2 задовольняє усі вимоги транспортної задачі. Тому розв'язуємо її за методом потенціалів.

Таблиця 11.2

Етап 1. Розрахунок «втрат продуктивності праці»

Потенціали рядків α_i	**Постачання M_i**	**Вимоги користувачів N_j**		
		1	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	–4; 1;	–3; 0;	0; –4;
$\alpha_2 = -4$	1	–2; 6;	–5; 2;	0; 1;
$\alpha_3 = -4$	1	–5; 3;	–7; 1;	0; 0;
Потенціали колонок β_j		$\beta_j = -4$	$\beta_2 = -3$	$\beta_3 = 4$

Таблиця 11.3

Етап 2. Розрахунок «втрат продуктивності праці»

Потенціали рядків α_i	**Постачання M_i**	**Вимоги користувачів N_j**		
		1	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	–4; $\boxed{1}$;1	–3; $\boxed{0}$;	0; $\boxed{0}$;
$\alpha_2 = 0$	1	–2; 4;	–5; –2;	0; $\boxed{1}$;
$\alpha_3 = -4$	1	–5; 3;	–7; $\boxed{1}$;	0; 4;
Потенціали колонок β_j		$\beta_j = -4$	$\beta_2 = -3$	$\beta_3 = 0$

Таблиця 11.4

Етап 3. Розрахунок «втрат продуктивності праці»

Потенціали рядків α_i	**Постачання M_i**	**Вимоги користувачів N_j**		
		1	**1**	**Фк(1)**
$\alpha_1 = 0$	1	–4; $\boxed{1}$; 1;	–3; 2;	0; $\boxed{0}$;
$\alpha_2 = 0$	1	–2; 2;	–5; $\boxed{0}$;	0; $\boxed{1}$;
$\alpha_3 = –2$	1	–5; 1;	–7; $\boxed{1}$;	0; 2;
Потенціали колонок β_j		$\beta_j = –4$	$\beta_2 = –5$	$\beta_3 = 0$

Початковий розподіл робітників виконуємо за методом найбільшої користі для машин. Таким чином ми можемо заповнити «постачанням» лише $n = 3$ комірки, а згідно з вимогами до транспортної задачі ми повинні мати $(n + n – 1) = (3 + 3 – 1) = 5$ заповнених постачанням комірок. Тому після визначення початкового розподілу робітників потрібну додаткову кількість комірок $(n – 1) = (3 – 1) = 2$ довільно заповнюємо нульовим «постачанням» таким чином, щоб не створювати кола із заповнених комірок.

Визначаємо за методом потенціалів потенціали вільних від постачання комірок і в результаті отримуємо спочатку табл. 11.3, а потім – табл. 11.4 з оптимальним постачанням.

У результаті отримуємо функцію мети (робітник $i = 2$ не використовується)

$$F = 4 + 7 = 11.$$

Примітки. У даному випадку треба враховувати довільність уведення в комірки нульового «постачання», що може призвести до появи комірок з від'ємним потенціалом навіть при оптимальному розподілі робітників. Виявляється, що в процесі розрахунків транспортної задачі можна отримати ряд варіантів перевезення вантажу з від'ємними потенціалами незавантажених комірок, витрати для яких насправді однакові з оптимальними. Прикладом цього твердження є транспортна задача рис. 11.5, а, рис. 11.5, б з однаковою функцією мети F = 870 (тут розглянута задача з фіктивним користувачем $K_5 = 20ф$).

Таблиця 11.5

Транспортна задача з фіктивним користувачем

α_i	K_j P_i	*60*	*20*	*30*	*80*	*20ф*
$\alpha_1 = 0$	*40*	5; 20	4; 20	6; 1	2; 0	0; 1
$\alpha_1 = 1$	*60*	6; 40	8; 3	9; 3	12; 10	0; 20
$\alpha_1 = 2$	*110*	8; 1	6; 0	7; 30	3; 80	0; –1
β_j		$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 5$	$\beta_4 = 1$	$\beta_5 = –1$

а)

α_i	K_j / P_i	***60***	***20***	***30***	***80***	***20ф***
$\alpha_1 = 0$	*40*	5; 20	4; 20	6; 0	2; 0	0; 1
$\alpha_1 = 1$	*60*	6; 40	8; 3	9; 2	12; 9	0; 20
$\alpha_1 = 1$	*110*	8; 2	6; 1	7; 30	3; 80	0; 0
β_j		$\beta_1 = 5$	$\beta_2 = 4$	$\beta_3 = 6$	$\beta_4 = 2$	$\beta_5 = -1$

б)

Висновок. Запропонований алгоритм спрощує розрахунки шляхом вилучення зайвих операцій перерахунку тарифів комірок.