6. МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ПРИБУТКУ В ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ З ПОСТІЙНИМИ ТАРИФАМИ

6.1. Загальні позначення в транспортній таблиці

При розв'язанні транспортної задачі звичайно метою є зменшення витрат на перевезення при постійних тарифах на перевезення одиниці вантажу [1-10, 14]. Але господарників більше цікавлять не витрати, а отриманий прибуток [12].

З метою узагальнення розв'язання транспортної задачі при формуванні оптимального плану перевезень вважаємо, що кожна комірка таблиці транспортної задачі вміщує вказані в табл. 6.1 дані.

При цьому вважаємо, що за методом потенціалів аналогічно [18] можна використовувати наступні ускладнення задачі:

1. Обов'язкове перевезення вантажу $g_{i,j}$ з конкретного i-го пункту постачання в конкретний j-й пункт користування: для цього віднімають вантаж $g_{i,j}$ від об'ємів постачальника й користувача (з врахуванням його в функції мети). Такі ж дії виконують, якщо потрібно завезти з конкретного i-го пункту постачання в конкретний j-й пункт користування вантаж не менше за величину $g_{i,j}$.

2. Заборона перевезення вантажу з конкретного i-го пункту постачання в конкретний j-й пункт користування введенням великого тарифу перевезення $C_{i,j}=M$, де M – велике число.

3. Заборона перевезення вантажу $g_{i,j}$ з конкретного i-го пункту постачання в конкретний j-й пункт користування. Для цього колонка вантажу N_j користувача розділяється на дві колонки з вантажами (N_j – $g_{i,j}$) та колонку $g_{i,j}$. Для колонки з вантажем (N_j – $g_{i,j}$) вводять звичайний тариф перевезення $C_{i\,j}$, для колонки з вантажем $g_{i,j}$ – великий тариф перевезення $C_{i,j}=M$, де M – велике число.

4. Завезення з конкретного i-го пункту постачання в конкретний j-й пункт користування вантажу не більше за величину $g_{i,j}$. Для цього колонка вантажу N_j користувача розділяється на дві колонки з вантажами (N_j – $g_{i,j}$) та колонку $g_{i,j}$. Для колонки з вантажем (N_j – $g_{i,j}$) вводять для i-го пункту постачання великий тариф перевезення $C_{i,j}=M$, де M – велике число; для колонки з вантажем $g_{i,j}$ – звичайний

Таблиця 6.1

Дані, які вводяться в кожну (*i,j*)-комірку транспортної задачі (*i* – порядковий номер рядка постачальника в таблиці, *j* – порядковий номер колонки користувача в таблиці)

№	Найменування	Позначення
1	Постійні витрати на перевезення одиниці вантажу	$A_{i,j}$
2	Вартість (собівартість) придбання одиниці вантажу	$B_{i,j}$
3	Вартість продажу одиниці вантажу	$D_{i,j}$
4	Час перевезення вантажу з *i*-ї в *j*-ту вершину з урахуванням можливої затримки в *j*-й вершині по формуванню вантажу	$t_{i,j}$
5	Прибуток за одиницю вантажу навантаженої комірки	$P_{i,j} = A_{i,j} + B_{i,j} - D_{i,j}$
6	Інтенсифікація прибутку одиниці вантажу	$I_{i,j} = P_{i,j} / t_{i,j}$
7	Постачання комірки	$x_{i,j}$
8	Потенціал комірки залежить від функції мети (зменшення витрат $A_{i,j}$, збільшення прибутку $P_{i,j}$ або інтенсифікації прибутку $I_{i,j}$)	$PP_{i,j}^{A} = A_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j)$, $PP_{i,j}^{P} = P_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j)$, $PP_{i,j}^{I} = I_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j)$.

Розміщення даних табл. 6.1 в кожній (*i,j*)-комірці транспортної задачі наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Розміщення даних в (*i,j*)-комірці транспортної задачі

$A_{i,j}$	$B_{i,j}$	$D_{i,j}$
$t_{i,j}$	$P_{i,j}$	$I_{i,j}$
$x_{i,j}$		$PP_{i,j}$

Представлена модель є узагальненою, бо вона дозволяє розв'язувати транспортну задачу у таких випадках:

1. При ***мінімізації витрат*** на перевезення вантажу згідно з [1-10]. При цьому в функції мети враховується лише постійні витрати на перевезення одиниці вантажу $A_{i,j}$. Згідно з методом потенціалів потенціал незаповненої постачанням (*i,j*)-комірки дорівнює

$$PP_{i,j}^{A} = A_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j),$$

де α_i – потенціал i-го рядка; β_j – потенціал j-ї колонки.

Потенціали α_i та β_j розраховуються за умови, що потенціали заповнених постачанням (i,j)-комірок дорівнюють нулю: $A_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$.

2. При ***максимізації прибутку*** (1-й етап програмування прибутку) – при отриманні максимально можливого прибутку згідно з [12] (ця робота під керівництвом автора виконана магістрантами Габідулліною О.М., Бульбою М.О. та Баришевською К.В.). При цьому в функції мети враховується лише прибуток за одиницю вантажу навантаженої (i,j)-комірки $P_{i,j}$. Тому що цей прибуток ($P_{i,j} < 0$), то функція мети при визначенні оптимального прибутку спрямована на мінімум. Згідно з методом потенціалів потенціал незаповненої постачанням комірки дорівнює

$$PP_{i,j}^{P} = P_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j).$$

Звичайно $P_{i,j} < 0$. Потенціали α_i та β_j розраховуються за умови, що потенціали заповнених постачанням (i,j)-комірок дорівнюють нулю: $P_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$.

3. При ***інтенсифікації прибутку*** (2-й етап програмування прибутку), коли транспорт менше завантажується у часі і отриманий вільний час може бути використаний для збільшення прибутків за однаковий час порівняно з оптимізаційним напрямком. При цьому в функції мети враховується лише інтенсифікація прибутку одиниці вантажу $I_{i,j}$, яка звичайно є від'ємною величиною ($I_{i,j} < 0$):

$$I_{i,j} = P_{i,j} / t_{i,j} ,$$

де $P_{i,j}^{I} = A_{i,j} + B_{i,j} - D_{i,j}$.

Звичайно $P_{i,j} < 0$ і тому $I_{i,j} < 0$. Згідно з методом потенціалів потенціал незаповненої постачанням (i,j)-комірки дорівнюють

$PP_{i,j}^{I} = I_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j)$.

Потенціали α_i та β_j розраховуються за умови, що потенціали заповнених постачанням (i,j)-комірок дорівнюють нулю: $I_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$.

Для кожного з цих випадків розраховуємо:

1. Витрати на перевезення вантажу.
2. Прибуток за визначений час на його отримання.
3. Інтенсифікацію прибутку.

6.2. Мінімізація витрат на перевезення вантажу

Початковий розподіл постачання закритої транспортної задачі, отриманий за методом Північно-Західного кута, наведений в табл. 6.3. У табл. 6.3 позначено: M_i – постачальники, N_j – користувачі; α_i , β_j – потенціали рядків та колонок; у прямокутниках показані потенціали вільних комірок. Потенціал незаповненої постачанням комірки дорівнює

$$PP_{i,j}^{A} = A_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j),$$

де α_i – потенціал i-го рядка; β_j – потенціал j-ї колонки.

Потенціали α_i та β_j розраховуються за умови, що потенціали заповнених постачанням (i,j)-комірок дорівнюють нулю: $A_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j)$

Таблиця 6.3

Початковий розподіл постачання

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
$\alpha_1 = 0$	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		30					$\boxed{+10}$			$\boxed{+11}$
$\alpha_2 = 5$	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		30			20					$\boxed{+9}$
$\alpha_3 = 8$	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
				$\boxed{-6}$	20			20		
β_j		$\beta_1=1$			$\beta_2= -4$			$\beta_3=-6$		

В результаті розрахунків за методом потенціалів виконується перерозподіл постачання в табл. 6.4 та табл. 6.5 (в табл. 6.5 отриманий кінцевий оптимальний розподіл постачання з точки зору скорочення витрат на перевезення).

Таблиця 6.4

Перерозподіл постачання на 1-му кроці

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
$\alpha_1=0$	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		30					$\boxed{+10}$			$\boxed{+5}$
$\alpha_2=5$	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		10			40					$\boxed{+3}$
$\alpha_3=2$	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
		20					$\boxed{+6}$	20		
β_j		$\beta_1=1$			$\beta_2=-4$			$\beta_3=0$		

Для початкового розподілу постачання згідно з табл. 6.3 отримуємо такі результати розрахунків:

1. Витрати на перевезення вантажу

$F_{A0} = \Sigma A_{i,j}\cdot x_{i,j} = 1\cdot30 + 6\cdot30 + 1\cdot20 + 4\cdot20 + 2\cdot20 = 350.$

2. Прибуток

$F_{P0} = \Sigma P_{i,j}\cdot x_{i,j} = -25\cdot30 - 50\cdot30 - 20\cdot20 - 35\cdot20 - 15\cdot20 = -3650.$

3. Інтенсифікація прибутку

$F_{I0} = \Sigma I_{i,j}\cdot x_{i,j} = -5\cdot30 - 10\cdot30 - 5\cdot20 - 5\cdot20 - 5\cdot20 = -750.$

4. Підсумковий час роботи транспорту на отримання прибутку

$T_{T0} = \Sigma T_{i,j} = 5 + 5 + 4 + 7 + 3 = 24.$

На основі табл. 6.4 виконуємо розрахунки:

1. Витрати на перевезення вантажу

$F_{A1} = \Sigma A_{i,j}\cdot x_{i,j} = 1\cdot30 + 6\cdot10 + 1\cdot40 + 3\cdot20 + 2\cdot20 = 230.$

2. Прибуток

$F_{P1} = \Sigma P_{i,j}\cdot x_{i,j} = -25\cdot30 - 50\cdot10 - 20\cdot40 - 10\cdot20 - 15\cdot20 = -2550.$

3. Інтенсифікація прибутку

$F_{I1} = \Sigma I_{i,j}\cdot x_{i,j} = -5\cdot30 - 10\cdot10 - 5\cdot40 - 20\cdot20 - 15\cdot20 = -1150.$

4. Підсумковий час роботи транспорту на отримання прибутку

$T_{T1} = \Sigma T_{i,j} = 5 + 5 + 4 + 0{,}5 + 3 = 17{,}5.$

Як бачимо, витрати на перевезення вантажу скоротились в *350/230=1,52 раза*, в той час як прибуток зменшився в

-3650/-2550=1,43 раза. Це зайвий раз підкреслює, що головне у виробництві – не витрати, а прибуток. Інтенсифікація прибутку збільшилась порівняно з початковими даними внаслідок зменшення підсумкового часу роботи транспорту.

6.3. Максимізація прибутку

Максимізація прибутку відноситься до 1-го етапу програмування прибутку.

Початковий розподіл постачання закритої транспортної задачі, отриманий за методом Північно-Західного кута, наведений в табл. 6.5, в якій позначено: M_i – постачальники, N_j – користувачі; α_i , β_j – потенціали рядків та колонок; у прямокутниках показані потенціали вільних комірок. Потенціал незаповненої постачанням комірки дорівнює

$$PP_{i,j}^{P} = P_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j).$$

Таблиця 6.5

Початковий розподіл постачання

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
$\alpha_1 = 0$	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		30					-25			-15
$\alpha_2 = -25$	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		30			20					-20
$\alpha_3 = -40$	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
				+55	20			20		
β_j		β_1= -25			β_2= +5			β_3= +25		

В результаті розрахунків за методом потенціалів виконується перерозподіл постачання в табл. 6.6 та табл. 6.7 (в табл. 6.7 отриманий кінцевий оптимальний розподіл постачання з точки зору отримання оптимального прибутку).

Таблиця 6.6

Перерозподіл постачання на 1-му кроці

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
α_1 =0	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		10			20					-40
α_2 = -25	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		50					+25			+5
α_3 = -15	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
				+30	20			20		
β_j		β_1= -25			β_2= -20			β_3= 0		

Таблиця 6.7

Перерозподіл постачання на 2-му кроці

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
α_1 = 0	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		10			0			20		
α_2 = -25	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		50					+25			+45
α_3 = -15	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
				+30	40					+40
β_j		β_1= -25			β_2= -20			β_3= -40		

На основі кінцевої табл. 6.7 виконуємо розрахунки:

1. Витрати на перевезення вантажу

$F_{A2} = \Sigma A_{i,j} \cdot x_{i,j} = 1 \cdot 10 + 6 \cdot 0 + 5 \cdot 20 + 6 \cdot 50 + 4 \cdot 40 = 570.$

2. Прибуток

$F_{P2} = \Sigma P_{i,j} \cdot x_{i,j} = -25 \cdot 10 - 20 \cdot 0 - 40 \cdot 20 - 50 \cdot 50 - 35 \cdot 40 = -4950.$

3. Інтенсифікація прибутку

$F_{I2} = \Sigma I_{i,j} \cdot x_{i,j} = -5 \cdot 10 - 20 \cdot 0 - 5 \cdot 20 - 10 \cdot 50 - 5 \cdot 40 = -850.$

4. Час роботи транспорту

$T_{T2} = \Sigma T_{i,j} = 5 + 0 + 8 + 5 + 7 = 25.$

Таким чином, в результаті оптимізації прибутку витрати на перевезення вантажу збільшилися в 570/350=1,62 раза, але при цьому прибуток зріс в -4950 /-3650 =1,35 раза. Це підкреслює необхідність врахування оптимізації й прибутків.

6.4. Інтенсифікація прибутку

Інтенсифікація отримання прибутку відноситься до 2-го етапу програмування прибутку.

Початковий розподіл постачання закритої транспортної задачі, отриманий за методом Північно-Західного кута, наведений в табл. 6.8, в якій позначено: M_i – постачальники, N_j – користувачі; α_i , β_j – потенціали рядків та колонок; у прямокутниках показані потенціали вільних комірок. Потенціал незаповненої постачанням комірки дорівнює

$$PP_{i,j}^{I} = I_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j).$$

Потенціали α_i та β_j розраховуються за умови, що потенціали заповнених постачанням (i,j)-комірок дорівнюють нулю: $I_{i,j} - (\alpha_i + \beta_j) = 0$.

В результаті розрахунків за методом потенціалів виконується перерозподіл постачання в табл. 6.8. Проміжні таблиці з розрахунками не наводяться (всього виконується 6 кроків): вони

Таблиця 6.8

Початковий розподіл постачання

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
$\alpha_1 = 0$	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
		30					$\boxed{-20}$			$\boxed{-5}$
$\alpha_2 = -5$	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		30			20					$\boxed{-15}$
$\alpha_3 = -5$	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
				$\boxed{-10}$	20			20		
β_j		$\beta_1 = -5$			$\beta_2 = 0$			$\beta_3 = 0$		

Таблиця 6.9

Перерозподіл постачання на 6-му кроці

α_i	M_i	N_j								
		60			40			20		
$\alpha_1 = 0$	30	1	10	36	6	12	38	5	15	60
		5	-25	-5	1	-20	-20	8	-40	-5
				$\boxed{+20}$	30					$\boxed{+30}$
$\alpha_2 = +15$	50	6	20	76	1	20	41	8	15	43
		5	-50	-10	4	-20	-5	1	-20	-20
		20			10			20		
$\alpha_3 = +5$	40	3	12	25	4	20	59	2	15	32
		0,5	-10	-20	7	-35	-5	3	-15	-5
		40					$\boxed{+10}$			$\boxed{+25}$
β_j		$\beta_1 = -25$			$\beta_2 = -20$			$\beta_3 = -35$		

На основі кінцевої табл. 6.9 виконуємо розрахунки:

1. Витрати на перевезення вантажу

$F_{A3} = \Sigma A_{i,j} \cdot x_{i,j} = 6 \cdot 30 + 6 \cdot 20 + 1 \cdot 10 + 8 \cdot 20 + 3 \cdot 40 = 590.$

2. Прибуток

$F_{P3} = \Sigma P_{i,j} \cdot x_{i,j} = -20 \cdot 30 - 50 \cdot 20 - 20 \cdot 10 - 20 \cdot 20 - 10 \cdot 40 = -2600.$

3. Інтенсифікація прибутку

$F_{I3} = \Sigma I_{i,j} \cdot x_{i,j} = -20 \cdot 30 - 10 \cdot 20 - 5 \cdot 10 - 20 \cdot 20 - 20 \cdot 40 = -2050.$

4. Час роботи транспорту

$T_{T3} = \Sigma T_{i,j} = 1 + 5 + 4 + 1 + 0,5 = 11,5.$

Прибуток можна збільшити до $F_{int} = -2050(25/11,5) = -5600$, або в $(-5600)/(-4950)=1,14$ раза. Транспорт у підсумку замість 25 діб буде працювати *11,5 доби*.

Ми можемо виділити шляхи комірок (2,1) та (2,2) з термінами переміщення вантажу 5 та 4, які найбільше заважають збільшенню інтенсифікації прибутків. Якщо зменшити тривалість переміщення по цих шляхах, то інтенсивність отримання прибутків можна збільшити. ***Звідси випливає, що наявна мережа доріг, їх стан та припустима швидкість переміщення транспорту по дорогах безпосередньо впливає на інтенсифікацію прибутків.***

Маючи такі дані, можна (в залежності від функції мети) або мінімізувати витрати на перевезення, або розрахувати максимально можливий прибуток, або отримати результати інтенсифікації отримання прибутків. Транспортна задача розв'язується за методом потенціалів. При цьому звичайно прибуток та інтенсифікація прибутку мають від'ємні значення, і тому спрямованість функції мети до мінімуму сприяє отриманню найбільшого значення прибутку або найбільшого значення інтенсифікації прибутку без додаткових розрахунків проміжних тарифів, наприклад, у вигляді "жалю за втраченим прибутком", як це виконано в [12].

Після розв'язання транспортної задачі визначають ***для всього перевезеного вантажу:*** вартість купівлі вантажу, вартість перевезень (при розрахунках максимального прибутку та інтенсифікації прибутку вона буде більшою, ніж у звичайній задачі при мінімізації вартості перевезення), суму грошей за проданий продукт, прибуток (він буде найбільший, якщо метою задачі є отримання максимального прибутку), витрачений транспортом час на перевезення вантажів. У випадку, коли ставиться мета інтенсифікації прибутків, на основі отриманих даних можна визначити можливість використання інтенсифікаційної моделі перевезень.

Усі розрахунки розділу 6 виконані для однакової транспортної задачі. Основні підсумкові дані виконаних розрахунків показані в табл. 6.10.

Таблиця 6.10

Порівняльна таблиця для роботи транспорту у режимах зменшення витрат на перевезення, оптимізації прибутку та інтенсифікації прибутку

Назва показників	Результати розрахунків			
	Початок	Зменшення витрат	Оптимі-зація прибутку	Інтенси-фікація прибутку
1. Витрати на перевезення F_{j1}	350	230	570	590
2. Прибуток F_{j2}	-3650	-2550	-4950	-2600
3. Інтенсифікація прибутку F_{j3}	-750	-1150	-850	-2050
4. Підсумковий час роботи транспорту T_{j3}	24	17,5	T_0=25	11,5
5. Прибуток за термін T_0	-3510	-3640	-4950	-5660

Завдання. Розглянути можливість інтенсифікації отримання прибутків у транспортній задачі з постійними витратами при перевезенні продукції для даних, наведених у табл. 6.11. Для зменшених витрат, оптимального прибутку та інтенсифікації прибутків отримати порівняльну таблицю, у якій навести:

1. Витрати на перевезення вантажу.
2. Прибуток за визначений час на його отримання.
3. Інтенсифікацію прибутку.
4. Час експлуатації транспорту.
5. Прибуток за однаковий час роботи T_0, (тут T_0 – термін отримання оптимального прибутку).

Таблиця 6.11

Дані транспортної задачі з постійними витратами на перевезення одиниці продукції (*N* – порядковий номер студента у групі)

α_i	M_i	N_j								
		15N			20N			25N		
α_1 =	20N	1	N	2N+1	8	15N	25N+8	5	5N	15N+5
		2	-N	-N/2	1	-10N	-10N	5N	-10N	-2
α_2 =	10N	8	10	15N+18	5	2N	5N+2	4	10N	18N+4
		5	-15N	-3N	2N	-3N	-1,5	1	-8N	-8N
α_3 =	30N	7	10N	19N+7	6	10N	22N+6	1	4N	6N+1
		1	-9N	-9N	10N	-12N	-1,2	N	-2N	-2
β_j		β_1=			β_2=			β_3=		

6.5. Задача визначення максимального потоку в орієнтованому графі

6.5.1. Загальний опис мережі

Припустимо, що мережа являє собою орієнтований упорядкований граф рис. 6.5.1, у якому пропускна спроможність між вузлами 1-7 показана на дугах графу. Пункт 1 є початком графу, а пункт 7 – кінцем.

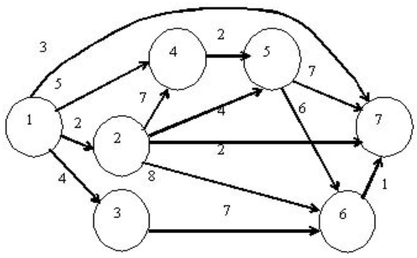

Рис. 6.1. Упорядкований граф потоків

За даними рис. 6.1 складаємо матрицю графу рис. 6.2: якщо потік виходить із вузла, то він позначається як додатній, а якщо входить у вузол – як від'ємний. В результаті усі додатні значення потоків розміщуються зверху діагоналі матриці. Матриця симетрична відносно діагоналі, тому використовуються лише наддіагональні

n	1	2	3	4	5	6	7	Потік січення мережі $ПМ_i$	Потік вузла $ПВ_i$	Розрахований потік січення мережі $ПР_i$
1	-	2	4	5			3	2+4+5+3=14	14	(2+4+5+3)=14
2		-		7	4	8	2	4+5+3+7+4+8+2=33	2	(4+5+3)+(2)=14
3			-			7		5+3+7+4+8+2+7=36	4	(5+3)+(2)+(4)=14
4				-	2			3+4+8+2+7+2=26	2	(3)+(2)+(4)+(2)=11
5					-	6	7	3+8+2+7+6+7=33	6	(3)+(2)+(4)+(6)=15
6						-	1	3+2+7+1=13	1	(3)+(2)+(6)+(1)=12
7							-	-	22	-

Рис. 6.2. Матриця графу і розрахунок потоків січень

По кожній колонці матриці рис. 6.2 проводимо вертикальну лінію зверху вниз, включаючи діагональну комірку; у діагональній комірці проводимо перпендикулярно по рядку праворуч другу пряму горизонтальну лінію.

На рис. 6.2 наведений приклад для вузла 4:

1) для заданого номера вузла 4 проводимо по колонці 4 вертикальну лінію до діагонального елемента матриці. Цифри, які пересікаються цією вертикальною лінією (цифри 5 та 7), вказують для вузла 4 величину вхідних потоків;
2) з відповідного діагонального елемента проводимо горизонтальну лінію. Цифри, які пересікаються цією горизонтальною лінією (цифра 2), вказують для вузла 4 величину вихідних потоків;
3) у даному випадку вхідний потік 5+7=12 більше вихідного 2, тому можливий потік вузла 4 дорівнює 2 (позначено в колонці "Потік вузла $ПВ_i$").

Матриця графу має такі особливості:

1. Вважається, що проведені взаємно перпендикулярні лінії відносяться до одного вузла, номер якого вказується нумерацією колонок рис. 6.2.
2. ***Підсумковий потік $П1_i$, що входить у вузол,*** дорівнює підсумку усіх цифр наддіагонального рядка, які пересікаються вертикальною прямою.
3. ***Підсумковий потік $П2_i$, що виходить з вузла,*** дорівнює підсумку усіх цифр наддіагонального рядка, які пересікаються горизонтальною прямою.

4. ***Підсумковий потік січення мережі $ПМ_i$*** дорівнює підсумку всіх цифр наддіагонального рядка, які пересікаються горизонтальною прямою, плюс усіх цифр, розміщених зверху комірок, пересічених горизонтальною лінією. Комірки, пересічені вертикальною прямою, не входять у січення. Кожне наступне січення виокремлює в мережі рис. 6.1 одну вершину, номер якої співпадає з номером січення (за нумерацією відповідної колонки). $ПМ_i$ вказує максимально можливий потік січення без обмежень по пропускній спроможності вузлів, зв'язаних із січенням.
5. ***Підсумковий потік вузла $ПВ_i$*** вказує підсумкову обмеженість вузла у передачі потоку як по входу, так і по виходу, і дорівнює мінімальному значенню підсумкових потоків $П1_i$ або $П2_i$, що входять або виходять з вузла.
6. ***Підсумковий розрахований потік січення мережі $ПР_i$*** дорівнює підсумку усіх цифр наддіагонального рядка, які пересікаються горизонтальною прямою, плюс усіх цифр, розміщених зверху комірок, пересічених горизонтальною лінією, якщо отримані підсумкові цифри для кожного рядка менші за підсумковий потік вузла $ПВ_i$ цього рядка; в іншому разі підсумкові цифри рядка замінюються на значення підсумкового потоку вузла $ПВ_i$. На рис. 6.2 підсумковий розрахований потік для кожного рядка показаний в дужках. Комірки, пересічені вертикальною прямою, не входять у січення. $ПВ_i$ вказує максимально можливий потік січення з урахуванням обмежень по пропускній спроможності вузлів, зв'язаних з січенням.

6.5.2. Розрахунок максимального потоку мережі

Ми отримали такі можливі значення розрахованих потоків січень $ПР_i$: 14, 14, 14, 11, 15, 12 (рис. 6.2). Здавалося б, що серед розрахованих потоків січень мережі $ПР_i$ мінімальне значення $ПР_4=11$ і є пропускною спроможністю мережі. В дійсності це не так: в даному випадку пропускна спроможність дорівнює 8, тому що вона обмежується рядом послідовно увімкнених вершин мережі. В результаті підсумковий потік конкретного вузла $ПВ_i$ може додатково обмежуватись увімкненими перед цим вузлом $ПВ_i$ попередніми вузлами.

Для отримання дійсного максимального потоку можна обрати два відомих алгоритми розв'язання задачі з використанням матриці мережі:

1. Переміщуватись по вузлах мережі з входу на вихід з доданням для кожної комірки обраного шляху мінімального можливого потоку даного шляху.

2. Переміщуватись по вузлах мережі з виходу на вхід з аналогічними діями.

Приклад такого заповнення потоками при переміщенні по вузлах мережі з входу на вихід показаний на рис. 6.3.

n	1	2	3	4	5	6	7
1	-	$2,2^1$	$4,1^3$	$5,2^6$			$3,3^9$
2		-		7,0	4,0	8,0	$2,2^2$
3			-			$7,1^4$	
4				-	$2,2^7$		
5					-	6,0	$7,2^8$
6						-	$1,1^5$
7							-

Рис. 6.3. Розрахунок максимального потоку мережі

При цьому ми повинні перемістити як можна більший потік від початкового вузла 1 (тобто від комірок (1,2), (1,3), (1,4), (1,7)) до кінцевого вузла 7 (тобто до комірок (1,7), (2,2), (5,7), (6,7)). При цьому як початкові точки послідовно розглядаються вузли-колонки 1, 3, 4, 7. Обраний шлях переміщення між вузлами вказується індексами. Серед позначених шляхів обирається мінімальний потік.

Наприклад:

1. Для вузла-колонки 2 з шляху входу $(1,2)=[2,0^1]$ переміщуємось на шлях виходу $(2,7)=[2,0^2]$ (в квадратних дужках вказано максимально можливий потік, а через кому – реальний потік, який спочатку дорівнює нулю). Мінімальний потік дорівнює 2, тому заповнення комірок має вигляд $(1,2)=[2,2^1]$ та $(2,7)=[2,2^2]$.
2. Для вузла-колонки 3 з шляху входу $(1,3)=[4,0^1]$ переміщуємось на шлях виходу $(3,6)=[7,0^4]$. Для вузла 6 немає виходу на кінець мережі, але її вихід $(6,7)=[1,0^5]$ з’єднаний з виходом. Мінімальний потік дорівнює 1, тому заповнення комірок має вигляд $(1,3)=[4,1^3]$, $(3,6)=[7,1^4]$ та $(6,7)=[1,1^5]$ і т.д.
3. Як бачимо, обмеження визначаються по мінімальному потоку даного початкового вузла-колонки або по потоку в наступних за нумерацією колонках. Тому для комірки (1,7)=[3,0] останнього

вузла-колонки 7 обмежень немає, і мінімальний потік дорівнює (1,7)=[3,3[9]]. Якщо обраний шлях не з'єднується з виходом, то його залишаємо й переходимо до розгляду іншого шляху, бо це – заборонений шлях. В загальному випадку припустимий потік комірки може складатися з кількох додатків, підсумок яких не повинен перевищувати максимально можливий потік даної комірки.

4. Розрахунки завершуються після перегляду останнього шляху входу рядка *n=1*. В даному випадку ми розглянули чотири вершини – для *n=2, 3, 4, 7*.

При такому "проштовхуванні" потоків рекомендується дотримуватись таких правил:

1. При обранні порядку перегляду шляхів перевага надається шляхам з найменшими можливими потоками та найменшою кількістю гілок між входом та виходом.
2. При переміщенні між вузлами бажано використовувати найменші можливі потоки гілок та вузли з найменшою кількістю входів та виходів.

6.5.3. Розрахунок максимального потоку моделюванням в середовищі MathCAD

Складемо систему рівнянь для розв'язання задачі в MathCAD. Для цього введемо позначення:

X12, X13, X14, X17, X24, X25, X26, X27, X36, X45, X56, X57, X67 – дійсні реальні потоки в наддіагональних комірках за адресами (1,2), (1,3), (1,4), ..., (5,7), (6,7) матриці рис. 6.3. Складена програма в MathCAD наведена нижче.

Початкові умови:

```
ORIGIN:=1
X12:=0   X13:=0   X14:=0   X17:=0   X24:=0
X25:=0   X26:=0   X27:=0   X36:=0   X45:=0
X56:=0   X57:=0   X67:=0
```

Функція мети (обидві функції мети працюють однаково):

```
F(X12,X13,X14,X17,X24, X25,X26,X27,X36,X45, X56,X57,X67):=
(X12+X13+X14+X17)+ (X13+X14+X17+X24+X25+X26+X27)…
+ (X14+X17+X24+X25+X26+X27+X36)…
+ (X17+X25+X26+X27+X36+X45)…
(X17+X26+X27+X36+X56+X57)…
+ (X17+X27+X57+X67)

F(X12,X13,X14,X17,X24, X25,X26,X27,X36,X45, X56,X57,X67):=
X12 +X13+X14+X17…
+X24 +X25+ X26+ X27+ X36 +X45+X56+X57+X67
```

Given

Вузли

X12-(X24+X25+X26+X27)=0 {Вузол 2 }
X13-X36=0 {Вузол 3 }
(X14+X24)-X45=0 {Вузол 4 }
(X25+X45)-(X56+X57)=0 {Вузол 5 }
(X26+X36+X56)-X67=0 {Вузол 6 }
(X12+X13+X14+X17)- (X17+X27+X57+X67)=0 {Вузли 1 та 7 }

Січення:

(X12+X13+X14+X17)- (X13+X14+X17+X24+X25+X26+X27)=0

Нерівності:

X12?0 X13?0 X14?0 X17?0 X24?0
X25?0 X26?0 X27?0 X36?0 X45?0
X56?0 X57?0 X67?0

Обмеження по максимальному потоку:

X12≤2 X13≤4 X14≤5 X17≤3 X24≤7
X25≤4 X26≤8 X27≤2 X36≤7 X45≤2
X56≤6 X57≤7 X67≤≤1

Максимізація функції мети:

P:=Maximize
(F,X12,X13,X14,X17,X24,X25,X26,X27,X36,X45,X56,X57,X67)

P^T=

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	2	1	2	3	0	2	0	0	1	2	0	4	1

Ми отримали максимальний потік мережі 8 при X12=2, X13=1, X14=2, X17=3, X24=0, X25=2, X26=0, X27=0, X36=1, X45=2, X56=0, X57=4, X67=1.

Перевірка потоків січень:

$Q1:=P_1+P_2+P_3+P_4$ $Q2:= P_2+P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8$
$Q3:= P_3+P_4+P_5+P_6+P_7+P_8+P_9$ $Q4:=P_4+P_6+P_7+P_8+P_9+P_{10}$
$Q5:=P_4+P_7+P_8+P_9+P_{11}+P_{12}$ $Q6:=P_4+P_8+P_{12}+P_{13}$
Q1=8 Q2=8 Q3=8 Q4=8 Q5=8 Q6=8

Завдання. Скласти індивідуальний довільний направлений граф на 10 вершин, упорядкувати його номери. Кількість зв'язків між вершинами – не менше 20. Об'єм потоків і з'єднання вершин – довільні, але один з потоків виходу повинен бути об'ємом N, де N – порядковий номер студента у групі.

В середовищі MathCAD визначити можливий максимальний потік з перевіркою отриманих вершин на можливість пропуску вхідних потоків. Додатково вказати: підсумковий потік $П1_i$, що входить у вузол; підсумковий потік $П2_i$, що виходить з вузла; підсумковий потік січення мережі $ПМ_i$; підсумковий потік вузла $ПВ_i$; підсумковий розрахований потік січення мережі $ПР_i$.

6.5.4. Програмування прибутку при визначенні максимального потоку в орієнтованому графі

Припустимо, що нам відомий поточний стан виробництва: максимальний потік мережі за місяць Q_0, підсумкові витрати S_{B0}, підсумкова вартість випущеної продукції S_0 та місячний прибуток $P_0 = S_0 - S_{B0}$ при терміні поточного виробничого циклу – $T_0 = 1$ місяць.

Виникає питання: чи вигідно збільшувати максимальний потік за місяць до Q_{T2}, якщо це призведе до збільшення підсумкових витрат до значення S_{B2}, при збереженому терміні виробничого циклу $T_{T2} = T_0 = 1$ місяць?

У даному випадку визначення витрат S_{B2} не розглядається, бо вони охоплюють урахування гідравлічних втрат у мережі (вони нелінійним чином залежать від Q_{T2}), додаткові витрати на електричну енергію, ремонт та амортизацію обладнання тощо і виходять за рамки нашої теми.

Вважаємо, що новий прибуток дорівнює

$$P_{T2} = S_0\, Q_{T2} / Q_0 - S_{B2} = S_{T2} - \Delta S_{B2},$$

де $S_{T2} = S_0\, Q_{T2} / Q_0$ – нова підсумкова вартість випущеної продукції.

Згідно з критерієм збагачення у часі (критерієм інтенсифікації), ми повинні отримати

$$K_{T2} = \frac{P_{T2} T_0}{P_0 T_{T2}} > 1\,,$$

або (враховуючи, що $T_{T2} = T_0 = 1$ місяць)

$$K_{T2} = \frac{P_{T2}}{P_0} = \frac{S_0 \cdot (Q_{T2} / Q_0) - S_{B2}}{S_0 - S_{B0}} > 1.$$

Якщо $K_{T2} > 1$, то доцільно використати інтенсифікаційну модель роботи мережі.

6.5.5. Прямий та зворотний алгоритм нумерації вершин направленого графу

Граф рис. 6.4 має загальну кількість вершин 8; початок графу знаходиться у вершині n=5 (вона повинна мати новий номер N=1), а кінець – у вершині n=3 (вона повинна мати новий номер N=8).

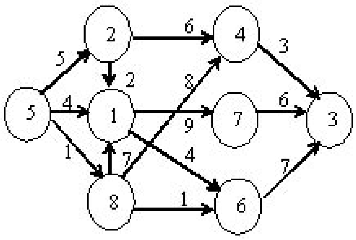

Рис. 6.4. Граф перед упорядкуванням

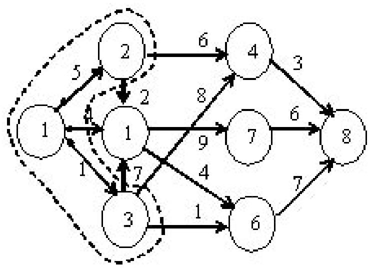

Рис. 6.5. Граф у процесі прямого впорядкування

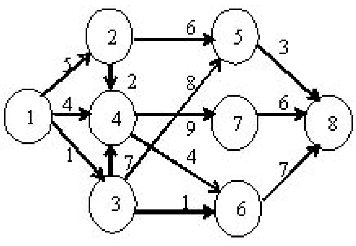

Рис. 6.6. Упорядкований граф по прямому алгоритму

N		4^5	2^2	8^0	5^5	1^1	6^4	7^5	3^2
	n	1^5	2^2	3^0	4^5	5^1	6^4	7^5	8^2
4^5	1^5	-	+2			+4	-4^5	-9^5	+7
2^2	2^2	-2^2	-		-6^2	+5			
8^0	3^0			-	+3		+7	+11	
5^5	4^5		+6	-3^5	-				+8
1^1	5^1	-4^1	-5^1			-			-1^1
6^4	6^4	+4		-7^4			-	-2^4	+10
7^5	7^5	+9		-11			+2	-	
3^2	8^2	-7^2			-8^2	+1	-10^2		-

Рис. 6.7. Матриця для впорядкування нумерації вершин графу згідно з прямим алгоритмом

1. Прямий алгоритм послідовної нумерації вершин орієнтованого графа від початку (перший номер) до кінця (останній номер) [20]: початковій вершині надаємо номер “1”, закреслюємо її сумісно з її дугами і далі цю вершину та її дуги не розглядаємо. Потім знаходимо іншу вершину, яка ***з урахуванням заборонених дуг має лише вихідні дуги:*** їй привласнюємо номер “2”, закреслюємо її сумісно з її дугами і далі цю вершину та її дуги не розглядаємо. Таку нумерацію вершин виконуємо до кінця.

Такий алгоритм перенумерації вершин графу зручно використовувати при ручному виконанні розрахунків (коли всі логічні задачі розв’язує людина).

Розглянемо приклад. У направленому графі рис. 6.4 визначається загальна кількість вершин – 8. Змінюємо старі номери вершин початку n=5 та кінця n=3 (рис. 6.4) на нові номери початку N=1 та кінця N=8 (рис. 6.5). Далі починається процес перенумерації інших вершин графа по алгоритму:

1. Переміщення по графу виконується з початку N=1 рис. 6.5 у кінець N=8. Помічаються чорними точками усі шляхи, які виходять з вершини початку N=1 до сусідніх вершин. Якщо усі ***вхідні*** шляхи вершин помічені точками, то вони нумеруються за наступними номерами N у будь-якому послідовному порядку. Наприклад, вершини n=2 та n=8 (рис. 6.4) мають по одному вхідному шляху, які помічені на рис. 6.5 точками; тому на рис. 6.5 замість n=2 вважаємо використаним новий номер N=2, а для n=8 використовуємо новий номер N=3.
2. Пронумеровані вершини початку N=1, 2, 3 умовно обводимо пунктирною лінією (рис. 6.5) і вважаємо однією "великою вершиною початку". Якщо процес нумерації не завершений, то повертаємось у п. 1, у якому замість вершини початку N=1 використовується поняття "великої вершини початку".

В результаті перенумерації вершин отримуємо упорядкований граф рис. 6.6.

2. Прямий матричний алгоритм нумерації вершин направленого графу. Матричний алгоритм перенумерації вершин графу зручно застосовувати при використанні ЕОМ, у якій граф має вигляд матриці. Порівняно з відомим багатокроковим алгоритмом Форда нумерації події в мережному графіку виконання робіт проекту [20], даний алгоритм є більш зручним, бо використовує лише один крок розрахунків. Матриця графу рис. 6.4, по якій проводиться його впорядкування, наведена на рис. 6.7. Спочатку в матриці перейменовуємо кінець з $n=3^0$ на $N=8^0$. Тут верхній індекс "0", який застосовується для упорядкування розрахунків.

Перенумерацію вершин виконуємо за такими кроками:

1. Розрахунки починаємо з входу. На рис. 6.7 змінюємо номер вершини входу $n=5^1$ на новий номер $N=1^1$ в колонці та рядку; відповідні номери вершин в колонках та рядках ($n=5^1$, $N=1^1$) та ***від'ємні значення довжини шляхів у рядках матриці*** помічаємо верхнім індексом "1", який застосовується для впорядкування розрахунків. У рядку ($n=5^1$, $N=1^1$) маємо три комірки з від'ємними елементами. Якщо у відповідній колонці рядка ($n=5^1$, $N=1^1$) ми маємо лише додатні значення комірок (помічені верхнім індексом від'ємні значення комірок не розглядаються), то для наступного

кроку “2” помічаємо відповідні ***номери вершин в колонках*** верхнім індексом “2”: так отримуємо позначення вершин у колонках (n=2^2, N=2^2) та (n=8^2, N=3^2).

2. Переносимо позначення вершин у колонках (n=2^2, N=2^2) та (n=8^2, N=3^2) на рядки і застосовуємо до кожного нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху “2” ***усі від’ємні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нові помічені вершини (n=1^3, N=4^3) та (n=4^3, N=5^3).
3. Переносимо позначення вершин у колонках (n=1^3, N=4^3) та (n=4^3, N=5^3) на рядки і застосовуємо до кожного нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху “3” ***усі від’ємні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нову помічену вершину колонки (n=6^4, N=6^4).
4. Переносимо позначення вершини колонки (n=6^4, N=6^4) на рядок і застосовуємо до нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху “4” ***усі від’ємні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нову помічену вершину колонки (n=7^5, N=7^5).

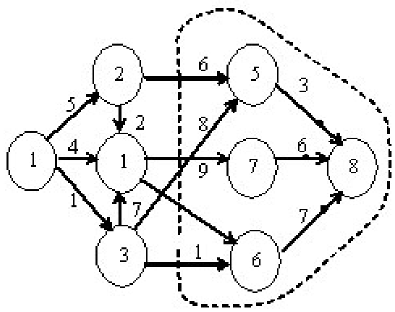

Рис. 6.8. Граф у процесі зворотного впорядкування

N		4^4	3^5	8^1	7^2	1^0	5^3	6^2	2^5
	n	1^4	2^5	3^1	4^2	5^0	6^3	7^2	8^5
4^4	1^4	-	$+2^4$			$+4^4$	-4	-9	$+7^4$
3^5	2^5	-2	-		-6	+5			
8^1	3^1			-	$+3^1$		$+7^1$	$+11^1$	
7^2	4^2		$+6^2$	-3	-				$+8^2$
1^0	5^0	-4	-5			-			-1
5^3	6^3	$+4^3$		-7			-	-2	$+10^3$
6^2	7^2	$+9^2$		-11			$+2^2$	-	
2^5	8^5	-7			-8	+1	-10		-

Рис. 6.9. Матриця для впорядкування нумерації вершин графу згідно зі зворотним алгоритмом

3. Зворотний алгоритм послідовної нумерації вершин орієнтованого графу від кінця (останній номер) до початку (перший номер): кінцевій вершині надаємо останній номер “8”, закреслюємо її сумісно з її дугами і далі цю вершину та її дуги не розглядаємо. Потім знаходимо іншу вершину, яка ***з урахуванням заборонених дуг має лише вхідні дуги:*** їй привласнюємо номер “7”, закреслюємо її сумісно з її дугами і далі цю вершину та її дуги не розглядаємо. Таку нумерацію вершин виконуємо до початку.

Розглянемо приклад. У направленому графі рис. 6.4 визначається загальна кількість вершин – 8. Змінюємо старі номери вершин початку n=5 та кінця n=3 (рис. 6.4) на нові номери початку N=1 та кінця N=8 (рис. 6.5). Далі починається процес перенумерації інших вершин графа по алгоритму:

1. Переміщення по графу виконується з кінця N=8 рис. 6.8 у початок N=1. Помічаються чорними точками усі шляхи, які входять у вершину кінця N=8 від сусідніх вершин. Якщо ***усі вихідні шляхи сусідніх вершин*** помічені точками, то вони нумерується за наступними номерами N у будь-якому послідовному зворотному порядку. Наприклад, вершини n=4, 7, 6 (рис. 6.4) мають по одному вихідному шляху, які помічені на рис. 6.8 точками; тому на рис. 6.8 замість n=4 вважаємо використаним новий номер N=5, а для n=6, 7 застосовуємо нові номери N=6, 7, які не відрізняються від старих.
2. Перенумеровані вершини кінця N=8, 7, 6, 5 умовно обводимо пунктирною лінією (рис. 6.8) і вважаємо однією “великою вершиною кінця”. Якщо процес нумерації не завершений, то повертаємось у п. 1, у якому замість вершини кінця N=8 використовується поняття “великої вершини кінця”.

В результаті перенумерації вершин отримуємо упорядкований граф рис. 6.6.

4. Зворотний матричний алгоритм нумерації вершин направленого графу. Матриця графу рис. 6.4, по якій проводиться його упорядкування, наведена на рис. 6.9. Спочатку в матриці перейменовуємо початок з $n=5^0$ на $N=1^0$ у вершинах колонок та рядків матриці рис. 6.9.

Перенумерацію вершин виконуємо за такими кроками:

1. Крок 1. Розрахунки починаємо з виходу. На рис. 6.9 змінюємо номер вершини виходу $n=3^1$ на новий номер $N=8^1$ в колонці та рядку. Відповідні номери вершин в колонках та рядках ($n=3^1$, $N=8^1$) та ***додатні значення довжини шляхів у рядку матриці*** ***($n=3^1$, $N=8^1$)*** помічаємо верхнім індексом “1”. У рядку ($n=3^1$,

N=8^1) маємо три комірки з додатними елементами. Переглядаємо комірки колонок для всіх цих трьох елементів. Якщо в колонці помічені верхніми індексами всі додатні шляхи, то для наступного кроку "2" помічаємо відповідні ***номери вершин у колонках*** верхнім індексом "2": так отримуємо позначення вершини у колонках (n=4^2, N=7^2) та (n=7^2, N=6^2).

2. Крок 2. Переносимо позначення вершин у колонках (n=4^2, N=7^2) та (n=7^2, N=6^2) на рядки і застосовуємо до кожного нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху "2" ***усі додатні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нову помічену вершину (n=6^3, N=5^3).
3. Крок 3. Переносимо позначення вершини у колонці (n=6^3, N=5^3) на рядок і застосовуємо до нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху "3" ***усі додатні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нову помічену вершину колонки (n=1^4, N=4^4).
4. Крок 4. Переносимо позначення вершини колонки (n=1^4, N=4^4) на рядок і застосовуємо до нового поміченого рядка ***дії п. 1:*** помічаємо верхнім індексом шляху "4" ***усі додатні шляхи*** комірок; в результаті отримуємо нові помічені вершини колонок (n=2^5, N=3^5) та (n=8^5, N=2^5).

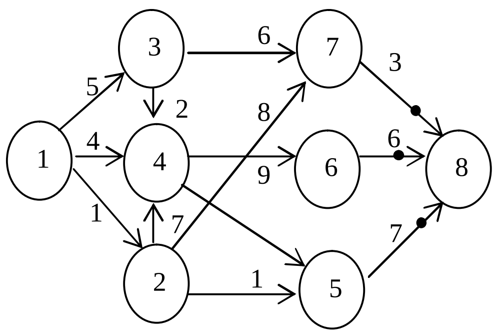

Рис. 6.10. Упорядкований граф по зворотному матричному алгоритму

6.6. Задача про призначення

6.6.1. Метод осереднених коефіцієнтів

Задача про призначення (вона зветься також *задачею вибору*) застосовується для випадків, коли є $i=1, 2,\ldots, n$ різних робіт $A_1, A_2,\ldots, A_n$ та $j=1, 2, \ldots, n$ різних механізмів (або фахівців) $M_1, M_2,\ldots, M_n$, здатних виконати будь-яку роботу з ефективністю C_{ij} (ефективність може бути виражена у прибутку, кількості оброблених деталей, якості обробки, інтенсивності прибутку тощо). Треба так розподілити механізми (фахівців) по роботах, щоб отримати максимальну ефективність праці.

Формально ця задача записується у вигляді матриці

$$C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{n1} & C_{n2} & \ldots & C_{nn} \end{bmatrix},$$

із якої потрібно обрати послідовність елементів C_{ij} таким чином, щоб сума

$$F = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \rightarrow \max$$

була максимальною і при цьому із кожного рядка і стовпця матриці C було обрано рівно один елемент.

Задача про призначення може бути розв'язана за угорським методом, який є одним з найпоширеніших методів розв'язання транспортних задач [1]. Але він відрізняється достатньою складністю розрахунків через необхідність виконання кількох взаємно пов'язаних таблиць на кількох етапах.

Нижче розглядається метод осереднених коефіцієнтів, який дозволяє використовувати одну розраховану таблицю.

Скористаємось відомим оптимальним розв'язком за угорським методом задачі про призначення [1] $F=C_{12}+ C_{23}+ C_{31}+ C_{45} + C_{54} = 4+3+4+2+2=15$ з матрицею

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Ця задача нагадує задачу комівояжера: “комівояжер” повинен відвідати по одному разу $i=1, 2,\ldots, n$ різних робіт $A_1, A_2,\ldots, A_n$ з призначенням для виконання кожної роботи одного з $j=1, 2, \ldots, n$ різних механізмів (або фахівців) M_1, $M_2,\ldots, M_n$; у сукупності всі обрані механізми повинні забезпечити максимальну ефективність праці. Відміна від задачі комівояжера в даному випадку полягає у намаганні отримати максимум функції мети (максимальної ефективності) та те, що від комівояжера не вимагається повернення в початковий пункт, тобто шлях може складатися з кількох різних циклів.

Для розв’язання задачі використаємо осереднені коефіцієнти $K_{ij} = C_{ij} - (C_{Pi} + C_{Kj});$ комірок

$$C_{Pi} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}; \qquad C_{Kj} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} C_{ij};$$

де

C_{ij} – ефективність виконання i-ї роботи ($A_1, A_2,\ldots, A_i,\ldots, A_n$) по рядках на j-му механізмі M_1, $M_2,\ldots, M_j,\ldots, M_n$, по колонках ($i=1\ldots n, j=1\ldots n$);

$n=5$ – кількість колонок та рядків у таблиці задачі про призначення;

C_{Pi} – осереднений коефіцієнт рядка;

i\j	1	2	3	4	5	C_{Pi}
1	3	4	2	2	1	2,4
2	4	5	3	1	3	3,2
3	4	3	1	1	1	2
4	3	1	2	2	2	2
5	1	3	1	2	1	1,6
C_{Kj}	3	3,2	1,8	1,6	1,6	

Рис. 6.11. Матриця ефективностей та осереднені коефіцієнти рядків і колонок

i\j	1^1	2^3	3^5	4^2	5^4	C_{Pi}
1^3	-2,4	$-1{,}6^3$	-2,2	-2	-3	2,4
2^5	-2,2	-1,4	$-2{,}0^5$	-3,8	-1,8	3,2
3^1	-1^1	-2,2	-2,8	-2,6	-2,6	2
4^4	-2	-4,2	-1,8	-1,6	$-1{,}6^4$	2
5^2	-3,6	-1,8	-2,4	$-1{,}2^2$	-2,2	1,6
C_{Kj}	3	3,2	1,8	1,6	1,6	

Рис. 6.12. Матриця осереднених коефіцієнтів комірок, рядків та колонок

Спочатку використовується комірка $(i,j)= (3,1)$ із найбільшим осередненим коефіцієнтом $K_{ij} = -1$: вона входить у "обраний шлях" і забороняє для подальшого використання в розрахунках власний рядок "3" та колонку "1" (заборонені використані комірки, рядки та колонки помічаємо верхнім індексом, який означає порядок виконаного кроку: в даному випадку верхній індекс "1" означає 1-й крок у розрахунках та заборону подальшого використання помічених верхнім індексом комірки (3,1), рядка "3" та колонки "1").

У подальших кроках 2, 3, 4, 5 ми щоразу повинні обирати в матриці рис. 6.12 не заборонені рядки і колонки, які охоплюють комірку з найбільшим значенням серед осереднених коефіцієнтів K_{ij}, які ще залишились. Ці комірки й складають "шлях комівояжера", тобто розв'язок задачі.

Як бачимо з рис. 6.12, ми отримали відомий розв'язок $F=C_{12}+ C_{23}+ C_{31}+ C_{45}+ C_{54}= 4+3+4+2+2=15$.

Завдання. 1. Розв'язати задачі про призначення згідно з даними табл. 6.12 та 6.13.

Таблиця 6.12

Задача про призначення

N	1	2	3	4	5
1	2N	50	70	10A	5A
2	3A	30	3A	50	30
3	17	18	45	N	40
4	4A	12	70	23	N
5	3N	A+6	4N	90	70

Таблиця 6.13

Задача про призначення

N	1	2	3	4	5
1	5N	24	16	38	15A
2	14	34	16	22A	80
3	3N	6N	25	9A	70
4	2N	3N	4A	5N	4N
5	15A	19	26	30A	5N

Тут N – порядковий номер студента у групі; $A = \sqrt{N}$

6.6.2. Використання моделювання в MathCAD

Введемо ідентифікатори:
X11,...,X15, X21,...,X25, X31,...,X35, X41,...,X45, X51,...,X55 – змінні, які можуть набувати значення або “0”, або “1”.
ORIGIN:=1

X11:=0 X12:=0 X13:=0 X14:=0 X15:=0
X21:=0 X22:=0 X23:=0 X24:=0 X25:=0
X31:=0 X32:=0 X33:=0 X34:=0 X35:=0
X41:=0 X42:=0 X43:=0 X44:=0 X45:=0
X51:=0 X52:=0 X53:=0 X54:=0 X55:=0

Given

По рядках:
X11+X12+X13+X14+X15=1
X21+X22+X23+X24+X25=1
X31+X32+X33+X34+X35=1
X41+X42+X43+X44+X45=1
X51+X52+X53+X54+X55=1

По колонках:
X11+X21+X31+X41+X51=1
X12+X22+X32+X42+X52=1
X13+X23+X33+X43+X53=1
X14+X24+X34+X44+X54=1
X15+X25+X35+X45+X55=1

X11 ≥ 0 X12 ≥ 0 X13 ≥ 0 X14 ≥ 0 X15 ≥ 0
X21 ≥ 0 X22 ≥ 0 X23 ≥ 0 X24 ≥ 0 X25 ≥ 0
X31 ≥ 0 X32 ≥ 0 X33 ≥ 0 X34 ≥ 0 X35 ≥ 0
X41 ≥ 0 X42 ≥ 0 X43 ≥ 0 X44 ≥ 0 X45 ≥ 0
X51 ≥ 0 X52 ≥ 0 X53 ≥ 0 X54 ≥ 0 X55 ≥ 0

P:=Find(X11,X12,X13,X14,X15, X21,X22,X23,X24,X25, X31,X32,X33,X34,X35, X41,X42,X43,X44,X45, X51,X52,X53,X54,X55)

P^T=

	X11	X12	X13	X14	X15	X21	X22	X23	X24	X25
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0

…

	X31	X32	X33	X34	X35	X41	X42	X43	X44	X45
	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1

…

	X51	X52	X53	X54	X55
	21	22	23	24	25
1	0	0	0	1	0

$F = C_{13} + C_{22} + C_{31} + C_{45} + C_{54} = 2+5+4+2+2 = 15.$