

5. НЕЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ПРИБУТКУ

5.1. Складання математичних моделей максимізації та інтенсифікації прибутку

Розглянемо питання інтенсифікації збільшення прибутків на прикладі задачі лінійного програмування.

Припустимо, що ми маємо задачу лінійного програмування по випуску виробів A_1, A_2, A_3 з обмеженнями по ресурсах, вказаних у табл. 5.1. Підприємство може розраховувати на використання у виробничому процесі загальної кількості людино-годин $L=2000$ лг; грошові запаси, які використовуються у виробництві продукції $G=20000$ грн.; максимальну загальну собівартість виробленої продукції (виробничу потужність підприємства) $S=400000$ грн. Інші дані вказані в табл. 5.1 та табл. 5.2. У даному випадку під грішми $G=20000$ грн. мається на увазі додаткові матеріали та роботи, які не перелічуються в табл. 5.1, але які впливають на собівартість продукції, вказану в табл. 5.2. Вважаємо, що по пластмасі та залізу ми не маємо обмеження у ресурсах (їх ми закупаємо по встановленій кількості виготовленої продукції X_1, X_2, X_3), а гроші на придбання цих матеріалів ми отримуємо за рахунок позик, відсотки по яких враховуються в собівартості вироблення та продажу продукції.

Таблиця 5.1
Дані по запасах ресурсів та нормах витрат на виробництво продукції $A_1 \dots A_3$. Максимальна виробнича потужність $S=400000$ грн.

Назва ресурсу	Запас ресурсів	Норми витрат ресурсів на продукцію A_1, A_2, A_3 , у.о./шт.		
		A_1	A_2	A_3
Людино-години	$L=2000$ лг	$L_1=3$	$L_2=2$	$L_3=1$
Гроші	$G=30000$ грн.	$G_1=80$	$G_2=20$	$G_3=0$
Пластмаса	$\Pi=4 \cdot X_1 + X_2 + 2 \cdot X_3$	$\Pi_1=4$	$\Pi_2=1$	$\Pi_3=2$
Залізо	$Z=2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_3$	$Z_1=2$	$Z_2=0$	$Z_3=3$

Таблиця 5.2
Дані по витратах часу, собівартості та отримання прибутку
на виробництво продукції $A_1...A_3$

Час на вироблення продукції. Собівартість виготовлення. Інтенсивність отримання прибутку.	Дані на виготовлення продукції A_1, A_2, A_3 , у.о./шт.		
	A_1	A_2	A_3
Час на оформлення замовлення t_{1j}	$t_{11}=2$	$t_{12}=1$	$t_{13}=2$
Час на передачу замовлення постачальнику t_{2j}	$t_{21}=1$	$t_{22}=1$	$t_{23}=1$
Час на отримання сировини та матеріалів від постачальника t_{3j}	$t_{31}=2$	$t_{32}=1$	$t_{33}=4$
Час на доставку продукції замовнику t_{4j}	$t_{41}=2$	$t_{42}=2$	$t_{43}=6$
Загальний час логістичного циклу з параметрами, незалежними від кількості продукції $t_{5j} = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^3 t_{ij}$	$t_{51}=7$	$t_{52}=5$	$t_{53}=13$
Час вироблення одиниці продукції у виробничому циклі t_{6j}	$t_{61}=0.05$	$t_{62}=0.01$	$t_{63}=0.03$
Час продажу та введення у дію одиниці продукції у покупця t_{7j}	$t_{71}=0.5$	$t_{72}=0.3$	$t_{73}=0.4$
Собівартість придбання, переміщення і зберігання сировини на складах на одиницю продукції S_{1j}	$S_{11}=1$	$S_{12}=2$	$S_{13}=3$
Собівартість вироблення одиниці продукції S_{2j}	$S_{21}=50$	$S_{22}=19$	$S_{23}=30$
Собівартість зберігання та переміщення виробленої продукції до користувача S_{3j}	$S_{31}=2$	$S_{32}=3$	$S_{33}=1$
Собівартість продажу та введення в дію виробленої продукції у покупця S_{4j}	$S_{41}=1$	$S_{42}=3$	$S_{43}=2$
Загальна собівартість одиниці виробленої продукції S_{5j}	$S_{51}=54$	$S_{52}=27$	$S_{53}=36$
Кількість продукції, шт	X_1	X_2	X_3
Ринкова ціна одиниці продукції S_{6j}	$S_{61}=84$	$S_{62}=59$	$S_{63}=61$
Прибуток за одиницю продукції	$p_1 = 30$	$p_2 = 32$	$p_3 = 25$

За вказаними даними ми повинні визначити кількість продукції згідно з двома функціями мети, у яких враховується:

а) оптимізаційна функція мети у вигляді максимального прибутку

$$P_0 = p_1X_1 + p_2X_2 + p_3X_3 \rightarrow \max;$$

б) функція мети інтенсифікації прибутку

$$F_T = i_1X_1 + i_2X_2 + i_3X_3 \rightarrow \max,$$

де $i_j = (p_jX_j) / [t_{5j} + (t_{6j} + t_{7j})X_j]; j=1 \dots 3$.

В результаті отримуємо моделі максимізації та інтенсифікації прибутку для вказаних умов, які мають вигляд:

а) **задача лінійного програмування максимізації прибутку:**

$$P_0 = 30X_1 + 32X_2 + 25X_3 \rightarrow \max; \quad \{\text{функція мети}\} \quad (5.1)$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 2000; \quad \{\text{по людино-годинах}\} \quad (5.2)$$

$$80X_1 + 20X_2 \leq 30000; \quad \{\text{по грошам}\} \quad (5.3)$$

$$54X_1 + 27X_2 + 36X_3 \leq 400000; \quad \{\text{по виробничій потужності}\} \quad (5.4)$$

{на основі собівартості одиниці продукції}

$$\text{де } X_j \geq 0; j=1 \dots 3; \quad (5.5)$$

б) **задача нелінійного програмування моделі інтенсифікації прибутку:**

$$F_T = i_1X_1 + i_2X_2 + i_3X_3 \rightarrow \max, \quad \{\text{функція мети}\} \quad (5.6)$$

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 2000; \quad \{\text{по людино-годинах}\} \quad (5.7)$$

$$80X_1 + 20X_2 \leq 30000; \quad \{\text{по грошам}\} \quad (5.8)$$

$$54X_1 + 27X_2 + 36X_3 \leq 400000; \quad \{\text{по виробничій потужності}\} \quad (5.9)$$

{інтенсивність зростання прибутку на одиницю продукції:}

$$i_1 = p_1 / [t_{51} + (t_{61} + t_{71})X_1] = 30 / [7 + (0,05 + 0,5) \cdot X_1]; \quad (5.10)$$

$$i_2 = p_2 / [t_{52} + (t_{62} + t_{72})X_2] = 32 / [5 + (0,01 + 0,3) \cdot X_2]; \quad (5.11)$$

$$i_3 = p_3 / [t_{53} + (t_{63} + t_{73})X_3] = 25 / [13 + (0,03 + 0,4) \cdot X_3]; \quad (5.12)$$

$$\text{де } X_j \geq 0; j=1 \dots 3. \quad (5.13)$$

Розв'язання цих задач лінійного та нелінійного програмування в середовищі MathCAD наведене в розділах 5.2 та 5.3.

5.2. Розв'язання задачі програмування прибутку в середовищі MathCAD

Нижче наведена математична модель оптимізаційного лінійного програмування в середовищі MathCAD за допомогою функції maximize на основі формул (5.1) – (5.5).

Етап 1. Максимізація прибутку

Загальний постійний час з табл. 5.2:

$$t51:=7 \quad t52:=5 \quad t53:=13$$

Час на вироблення одиниці продукції з табл. 5.2:

$$t61:=0.05 \quad t62:=0.01 \quad t63:=0.03$$

Час на введення в дію одиниці продукції з табл. 5.2:

$$t71:=0.5 \quad t72:=0.3 \quad t73:=0.4$$

Введемо функцію мети та початкові умови функції maximize:

$$P0(X1, X2, X3):=30 \cdot X1+32 \cdot X2+25 \cdot X3$$

$$X1:=0 \quad X2:=0 \quad X3:=0$$

Given

$$3 \cdot X1+2 \cdot X2+X3 \leq 2000$$

$$80 \cdot X1+20 \cdot X2 \leq 30000$$

$$54 \cdot X1+27 \cdot X2+36 \cdot X3 \leq 400000$$

$$X1 \geq 0$$

$$X2 \geq 0$$

$$X3 \geq 0$$

$$XP:=\text{Maximize}(P0, X1, X2, X3)$$

$XP^T=$

	1	2	3
1	0	0	$2 \cdot 10^3$

У векторі XP середовища MathCAD отримуються оптимізовані рішення для змінних X_1, X_2, X_3 .

Прибуток

$$P0(XP_0, XP_1, XP_2)=5 \times 10^4$$

Перевірка прибутку P01:=

$$30 \cdot XP_0+32 \cdot XP_1+25 \cdot XP_2$$

$$P01=5 \times 10^4$$

Час отримання продукції

$$T01:=t51+(t61+t71) \cdot XP_0$$

$$T02:=t52+(t62+t72) \cdot XP_1$$

$$T03:=t53+(t63+t73) \cdot XP_2$$

$$T01=7$$

$$T02=5$$

$$T03=873$$

Кінцеві дані розрахунку: прибуток $P0=5 \times 10^4$;

час $T0=873$.

Математична модель інтенсифікації прибутку відрізняється від моделі максимізації прибутку тим, що вона є нелінійною і тому може мати кілька локальних екстремумів. Тому внаслідок її нелінійності в залежності від початкових умов можна отримати різні рішення, які відповідають різним локальним екстремумам. Нижче на основі формул (5.6) – (5.13) наведена модель інтенсифікації прибутку, яка розв'язана в середовищі MathCAD за допомогою функції maximize для початкових умов $X1:=1, X2:=0, X3:=0, i1:=0, i2:=0, i3:=0$.

Етап 2. Модель інтенсифікації прибутку

$$FT(X1, X2, X3, i1, i2, i3) := i1 \cdot X1 + i2 \cdot X2 + i3 \cdot X3$$

$$X1 := 1$$

$$X2 := 0$$

$$X3 := 0$$

$$i1 := 0$$

$$i2 := 0$$

$$i3 := 0$$

Given

$$3 \cdot X1 + 2 \cdot X2 + X3 \leq 2000$$

$$80 \cdot X1 + 20 \cdot X2 \leq 30000$$

$$54 \cdot X1 + 27 \cdot X2 + 36 \cdot X3 \leq 400000$$

$$i1 = \frac{30}{7 + (0.05 + 0.5) X1}$$

$$i2 = \frac{32}{5 + (0.01 + 0.3) X2}$$

$$i3 = \frac{25}{13 + (0.03 + 0.4) X3}$$

$$X1 \geq 0$$

$$X2 \geq 0$$

$$X3 \geq 0$$

$$XF := \text{Maximize}(FT, X1, X2, X3, i1, i2, i3)$$

$$XF^T =$$

	1	2	3	4	5	6
1	207.679	400.706	575.551	0.247	0.248	0.096

У векторі XF середовища MathCAD отримуються оптимізовані рішення для змінних $X1, X2, X3, i1, i2, i3$.

Функція мети
 $FT(XF_0, XF_1, XF_2, XF_3, XF_4, XF_5) = 205.865$
 Прибуток
 $PT := 30 \cdot XF_0 + 32 \cdot XF_1 + 25 \cdot XF_3$
 $PT = 3.334 \times 10^4$
 Час на вироблення продукції в кожній гілці
 виробництва продукції А1, А2, А3:
 $T21 := t51 + (t61 + t71) \cdot XF_0$
 $T22 := t52 + (t62 + t71) \cdot XF_1$
 $T23 := t53 + (t63 + t71) \cdot XF_3$
 $T21 = 121.223$
 $T22 = 129.219$
 $T23 = 260.487$
**3-й етап: розробка рішення по результатах
 програмування прибутку.**
**Розрахований прибуток для паралельного
 виробництва**
 $T_T = T_{23} = 260.487$
 $PT \max 1 := PT \frac{T0}{T_T}$
 $PT \max 1 = 1.121 \times 10^5$
 Розрахований прибуток збільшився в
 $K1 := \frac{PT \max 1}{P0}$
 $K1 = 2.242$ разів
**Розрахований прибуток для послідовного
 виробництва**
 $T_T = T21 + T22 + T23 = 511.929$
 $PT \max 2 := PT \frac{T0}{T21 + T22 + T23}$
 $PT \max 2 = 5.714 \times 10^4$
 Розрахований прибуток збільшився в
 $K2 := \frac{PT \max 2}{P0}$
 $K2 = 1.143$ разів

Завдання. Перевірити в середовищі MathCAD можливість використання моделі інтенсифікації прибутку для трьох виробів A_1, A_2, A_3 замість оптимізаційної моделі. Для моделі інтенсифікації прибутку дані по витратах часу, собівартості та прибутку отримати з

Таблиця 5.3

Дані по витратах часу та собівартості отримання прибутку на виробництво продукції $A_1...A_3$ (N – порядковий номер студента у групі)

Час на вироблення продукції. Собівартість виготовлення. Інтенсивність отримання прибутку.	Дані на виготовлення продукції A_1, A_2, A_3		
	A_1	A_2	A_3
Загальний час логістичного циклу з параметрами, незалежними від кількості продукції t_{5j}	$t_{51} = 0,9N$	$t_{52} = 0,3N$	$t_{53} = 0,8N$
Час вироблення одиниці продукції у виробничому циклі t_{6j}	$t_{61} = 0,05N$	$t_{62} = 0,01N$	$t_{63} = 0,08N$
Час продажу і введення одиниці продукції у дію у покупця t_{7j}	$t_{71} = 0,7$	$t_{72} = 0,1$	$t_{73} = 0,4$
Загальна собівартість одиниці виробленої продукції S_{5j}	$S_{51} = 2N$	$S_{52} = N$	$S_{53} = N$
Кількість продукції, <i>шт</i>	x_1	x_2	x_3
Ринкова ціна одиниці продукції S_{6j}	$S_{61} = 4N$	$S_{62} = 4N$	$S_{63} = 6N$
Прибуток за одиницю продукції p_j	$p_1 = 2N$	$p_2 = 3N$	$p_3 = 5N$

Розрахувати загальні витрати ресурсів для кожного варіанту прийняття рішень.

- $F = N \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + x_3 \rightarrow \max;$
 $N \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \leq 1000 \cdot N;$
 $x_1 + (N+5) \cdot x_2 \leq 4000;$
 $15 \cdot x_1 + N \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 2500,$
де $x_j \geq 0; j=1, \dots, 3; N$ – порядковий номер студента у групі.
- $F = 5 \cdot N \cdot x_1 + 2 \cdot N \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 \rightarrow \max;$
 $N \cdot x_1 + 2 \cdot N \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 \leq 4500 \cdot N;$
 $(N+8) \cdot x_1 + (N+5) \cdot 15 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 \leq 3400;$
 $12 \cdot N \cdot x_1 + N \cdot x_2 + 8 \cdot x_3 \leq 7000,$
де $x_j \geq 0; j=1, \dots, 3; N$ – порядковий номер студента у групі.