

4. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ ПРИБУТКУ

4.1. Випуск чоловічих та жіночих костюмів в ательє

Розглянемо задачу по випуску чоловічих та жіночих костюмів в ательє при наявних ресурсах на прикладі даних табл. 4.1, послідовному випуску продукції і $t_0 = 0$. Звичайно ця задача ставиться з точки зору отримання максимального прибутку при заданих ресурсах без розгляду часу.

Таблиця 4.1

Дані по випуску костюмів ательє

Назва ресурсу	Запас ресурсу	Норми витрат ресурсу	
		Жіночий костюм	Чоловічий костюм
Матерія	25	4	1
Гроші	40	1	3
Кількість костюмів, штук		X_1	X_2
Прибуток за 1 костюм		1	1
Середній час t_j виробництва і продажу 1 костюма за добу		0,5	2,0
Інтенсивність отримання прибутку у часі		$1/0,5=2$	$? =0,5$

Етап 1. Математична модель максимізації прибутку при випуску одягу ательє має вигляд

$$P_0 = X_1 + X_2 \rightarrow \max;$$

$$4X_1 + X_2 \leq 25;$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 40;$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0;$$

з оптимальним рішенням $X_1=3,182$; $X_2=12,273$ і отриманням прибутку

$$P_0 = X_1 + X_2 = 3,182 + 12,273 = 15,455.$$

Жіночі костюми продадуться за $0,5 \cdot 3,182 = 1,591$ доби, чоловічі – за $2,0 \cdot 12,2725 = 24,545$ доби. Будемо вважати, що при послідовному виробництві костюмів ми отримуємо прибуток за весь товар через час $T_0 = 1,591 + 24,545 = 26,136$ доби.

Етап 2. Математична модель інтенсифікації прибутку у часі при випуску одягу ательє має вигляд (змінюється функція мети на тій же множині можливих рішень)

$$\begin{aligned} F_{T1} &= 2X_1 + 0,5X_2 \rightarrow \max; \\ 4X_1 + X_2 &\leq 25; \\ X_1 + 3X_2 &\leq 40; \\ X_1 \geq 0; X_2 &\geq 0; \end{aligned}$$

з рішенням (за максимальним значенням функції мети F_{T1}) $X_1 = 6,25$, $X_2 = 0$ і отриманням прибутку $P_{T2} = X_1 + X_2 = 6,25$. Жіночі костюми продадуться за $0,5 \cdot 6,25 = 3,125$ доби, чоловічі – за 0 діб. Прибуток за виробничий цикл при витратах тих же ресурсів зменшився з $P_0 = 15,455$ до $P_{T2} = 6,25$, або в $P_0/P_{T2} = 15,455/6,25 = 2,47$ рази. Будемо вважати, що ми отримуємо прибуток за весь товар через час $T_{T2} = 3,125$ доби.

Етап 3. Порівняння двох етапів та прийняття рішення. 3 моделі максимізації прибутку та моделі інтенсифікації впливає, що прибуток при використанні тих же ресурсів зменшився в $P_0/P_{T2} = 15,455/6,25 = 2,47$ рази. Але якщо прибуток $P_0 = 15,455$ ми отримуємо за час $T_0 = 26,136$ доби, то прибуток $P_{T2} = 6,25$ ми отримуємо за виробничий цикл терміном $T_{T2} = 3,125$ доби.

Перехід на модель інтенсифікації випуску одягу ательє дає змогу за час T_0 збільшити прибуток до величини

$$P_{T2\max} = P_{T2}(T_0/T_{T2}) = 6,25 \cdot (26,136/3,125) = 52,2,$$

або в $P_{T2\max}/P_0 = 52,2/15,455 = 3,38$ рази більше порівняно з оптимізаційною моделлю, для якої $P_0 = 15,455$. Це вказує на можливість використання моделі інтенсифікації виробничого процесу.

Нижче наведене розв'язання задачі програмування прибутку в

Етап 1. Модель максимізації прибутку
 ORIGIN:=1
 t1:=0.5 t2:=2.0
 Функція мети у вигляді прибутку
 P0(X1,X2):=X1+X2
 X1:=0 X2:=0

27

Обмеження

GIVEN

$$4X_1 + X_2 \leq 25$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$XP := \text{maximize}(P0, X_1, X_2)$$

Рішення

XP^T=

	1	2
1	3.182	12.273

Функція мети

$$P0 := XP_1 + XP_2$$

$$P0 = 15.455$$

Час на виконання роботи

$$T0 := t_1 \cdot XP_1 + t_2 \cdot XP_2$$

$$T0 = 26.136$$

Етап 2. Модель інтенсифікації прибутку

ORIGIN:=1

$$t_1 := 0.5 \quad t_2 := 2.0$$

Функція мети

$$FT(X_1, X_2) := 2 \cdot X_1 + 0.5 \cdot X_2$$

$$X_1 := 0 \quad X_2 := 0$$

Обмеження

GIVEN

$$4X_1 + X_2 \leq 25$$

$$X_1 + 3X_2 \leq 40$$

$$X_1 \geq 0$$

$$X_2 \geq 0$$

$$XP := \text{maximize}(FT, X_1, X_2)$$

Рішення

XP^T=

	1	2
1	6.25	0

Прибуток

$$PT2 := XP_1 + XP_2$$

$$PT2 = 6.25$$

Час на виконання роботи

$$TT2 := t1 \cdot XP_1 + t2 \cdot XP_2$$

$$TT2 = 3.125$$

Етап 3. Рішення про доцільність використання моделі інтенсифікації прибутку

$$PT_{2 \max} := PT_2 \frac{T_0}{TT_2}$$

$$PT_{2 \max} = 52.273$$

$$KT := \frac{PT_{2 \max}}{15.445}$$

$$KT = 3.382$$

Прибуток збільшився в $K=3.382$ рази. Це вказує на можливість використання моделі інтенсифікації прибутку.

Завдання. Розрахувати за графоаналітичним методом та в середовищі MathCAD можливість використання моделі інтенсифікації прибутку випуску костюмів ательє згідно з даними, вказаними в табл. 4.2.

Розглянути процеси виробництва при послідовному та паралельному випуску продукції з наведенням розрахованих даних в

Таблиця 4.2

Дані по випуску костюмів ательє

Назва ресурсу	Запас ресурсу	Норми витрат ресурсу	
		Жіночий костюм	Чоловічий костюм
Матерія	5N	4	1
Гроші	4N	1	3
Кількість костюмів, штук		X_1	X_2
Прибуток за 1 костюм		1	1
Середній час виробництва та продажу 1 костюма за добу		0,5	2,0

Тут N – порядковий номер студента у групі

4.2. Задача про суміші

Загальні відомості. Задачі про суміші виникають в сільськогосподарському виробництві при розрахунку складу добрив; при використанні ряду видів пального для отримання пального іншої марки; в металургії при виготовленні сталі із кількох марок сталі; при складанні раціону харчування худоби, спортсменів, сім'ї. Розглянемо цю задачу на прикладі.

Припустимо, що для даних табл. 4.3 нам потрібно розрахувати, скільки потрібно купити добрив №1 та №2 за мінімальну ціну для отримання з них загальної суміші, яка повинна вмещувати не менше заданої потрібної кількості компонентів (аміака, калія, натрія).

Таблиця 4.3

Дані для складання математичної моделі по випуску суміші з добрив №1, №2 (у.о. – умовні одиниці)

Види матеріалів	Загальна вага добрива в суміші, кг	Ціна 1 кг добрива, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг добрива		
			Аміак	Калій	Натрій
Добриво №1	X1	10	0,9	4	0,1
Добриво №2	X2	8	0,1	1,2	1
Потрібна вага компонента в суміші, у.о.			15	24	12

Математична модель задачі має вигляд

$$F=10 \cdot X_1+8 \cdot X_2 \rightarrow \min;$$

$$0,9 \cdot X_1+0,1 \cdot X_2 \geq 15;$$

$$4 \cdot X_1+1,2 \cdot X_2 \geq 24;$$

$$0,1 \cdot X_1+1 \cdot X_2 \geq 12;$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0.$$

Задача про суміші стосується вироблення лише одного продукту – потрібної суміші. Випущений продукт нема з чим порівнювати; він є незамінним. Якщо суміш виготовляється для продажу, то нам відома ціна 1 кг суміші, і задача розв'язується однозначно у сенсі отримання прибутку. У цьому разі отримання мінімальних витрат на виробництво суміші одночасно означає отримання максимального прибутку за вироблену суміш.

Нижче розглядаються особливості виробництва сумішей з точки зору прибутку.

Розрахунок мінімальних витрат на вироблення Суміші 1. Якщо в результаті розрахунків ми отримуємо, що в суміші використовується лише один з початкових матеріалів, то це означає, що товар не переробляється і тому він не є сумішшю. Звичайно виробництво такий принцип не використовує. Тому потрібно контролювати подібне "виробництво". Нижче наведена математична модель MathCAD по визначенню мінімальних витрат, прибутку та інтенсифікації прибутку для Суміші 1.

```

ORIGIN:=1
A:=10      B:=8      X1:=0      X2:=0
Витрати
F(X1,X2):=A·X1+B·X2
Given
Аміак
0.9·X1+0.1·X2 ≥ 15
Калій
4·X1+1.2·X2 ≥ 24
Натрій
0.1·X1+1·X2 ≥ 12
X1 ≥ 0      X2 ≥ 0
P:=Minimize(F,X1,X2)
PT=(15.506  10.449)
Витрати
F:=A·P1+ B·P2
F=166.667
Вага суміші
G:=P1+P2
G=25.955
Вважаємо, що собівартість виготовлення 1 кг суміші дорівнює 2 грн., а вартість суміші на ринку дорівнює 20 грн./кг. Очевидно, що кожний 1 кг матеріалу X1 та X2, що входить у суміш, продається по тій же ціні 20 грн./кг, що й суміш на ринку.
Прибуток
FF:=(20-2)·(P1+P2) – A·P1 – B·P2
FF=228.539
Вважаємо, що цикл виробництва 1 кг суміші складається з витрат часу на:

```

– отримання матеріалів – 0,1 доби;
 – виробництво – 0,05 доби;
 – продаж на ринку – 0,2 доби.
 Усього цикл охоплює $T_1 = 0,35$ доби.
 Прибуток на 1 кг суміші складає $P_1 = FF/G = 228,539 / 25,955 = 8,8$ грн./кг.
 Інтенсивність прибутку дорівнює $\Pi = P_1 / T_1 = 8,8 / 0,35 = 25,1$ грн./(кг*добу).

Розрахунок максимального прибутку при виробленні Суміші 1

Припустимо, що собівартість виготовлення 1 кг суміші дорівнює 2 грн., а вартість суміші на ринку дорівнює 20 грн./кг. Очевидно, що кожний 1 кг матеріалу X1 та X2, що входить у суміш, продається по тій же ціні 20 грн./кг. Ми маємо намір розрахувати за допомогою MathCAD максимальний прибуток. Введемо поняття ціни як витрати на купівлю плюс собівартість мінус ціна на ринку (20 грн./кг). В результаті отримуємо від'ємні величини прибутків для кожного з матеріалів:

- для X1 – прибуток $(10+2-20) = -8$ грн./г;
- для X2 – прибуток $(8+2-20) = -10$ грн./г.

Математична модель MathCAD по визначенню прибутку для Суміші 1 наведена нижче.

```

ORIGIN:=1
A:=- 10   B:=- 8   X1:=0   X2:=0
Прибуток
F(X1,X2):=A·X1+B·X2
Given
Аміак
0.9·X1+0.1·X2 ≥ 15
Калій
4·X1+1.2·X2 ≥ 24
Натрій
0.1·X1+1·X2 ≥ 12
X1 ≥ 0   X2 ≥ 0
Тому що змінився знак перед функцією мети,
треба змінити мету з максимуму на мінімум.
P:=Maximize(F,X1,X2)
PT=(15.506  10.449)
  
```

Вага
 $G:=P_1+P_2$
 $G=25.955$
Прибуток
 $F:=A\cdot P_1+B\cdot P_2$
 $F=-228.539$

Як бачимо, прибуток співпадає з розрахованим вище.

Вироблення кількох різних сумішей. Розрахунок максимального прибутку при виробленні Суміші 2. Якщо ми маємо змогу виробити для продажу кілька різних сумішей, які продаються на ринку за різною ціною, то потрібно визначити прибуток по кожній з сумішей окремо, а потім окремо по кожній з них визначити інтенсифікацію прибутку. В залежності від отриманих результатів приймається рішення щодо виробництва.

ORIGIN:=1
 $A:=10$ $B:=8$ $X1:=0$ $X2:=0$
Витрати
 $F(X1,X2):=A\cdot X1+B\cdot X2$
Given
Аміак
 $0.9\cdot X1+0.1\cdot X2 \geq 25$
Калій
 $4\cdot X1+1.2\cdot X2 \geq 34$
Натрій
 $0.1\cdot X1+1\cdot X2 \geq 22$
 $X1 \geq 0$ $X2 \geq 0$
 $P:=\text{Minimize}(F,X1,X2)$
 $P^T=(25.618 \quad 19.438)$
Витрати
 $F:=A\cdot P_1+B\cdot P_2$
 $F=411.685$
Вага суміші
 $G:=P_1+P_2$
 $G=45.056$

Припустимо, що собівартість виготовлення 1 кг суміші дорівнює 2 грн., а вартість суміші на ринку дорівнює 30 грн./кг. Очевидно, що кожний 1 кг матеріалу $X1$ та $X2$, що входить у суміш, продається по тій же ціні 30 грн./кг.

Прибуток

$$FF2:=(30-2) \cdot (P_1+P_2) - A \cdot P_1 - B \cdot P_2;$$

$$FF=849.888.$$

Припустимо, що цикл виробництва 1 кг суміші складається з витрат часу на:

- отримання матеріалів – 1 добу;
- виробництво – 0,25 доби;
- продаж на ринку – 0,25 доби.

Усього цикл охоплює $T_2= 1,5$ доби.

Прибуток на 1 кг суміші складає $P_2 = FF/G_2=849,888 / 45,056=18,8$ грн./кг.

Інтенсивність прибутку дорівнює $I_2=P_2/T=18,8 / 1,5 = 12,53$ грн./(кг*добу).

Висновок: із двох сумішей (Суміш 1 та Суміш 2) потрібно обрати до виробництва Суміш 1 через отримання більшого прибутку у часі.

Завдання. Розрахувати за графоаналітичним методом та в середовищі MathCAD можливість використання моделі інтенсифікації прибутку випуску суміші згідно з даними, вказаними в табл. 4.4 та табл. 4.5. N – порядковий номер студента в групі.

Таблиця 4.4

Дані для складання математичної моделі по випуску сумішей зі сталі №1 та №2 (у.о. – умовні одиниці)

Вид сталі	Загальна вага сталі в суміші, кг	Ціна 1 кг добрива, грн./кг	Вага компонентів (у.о.) в одному кг сталі		
			Нікель	Вольфрам	Хром
Сталь №1	X1	5N	1,2·N	0,05	0,04·N
Сталь №2	X2	N	0,01·N	0,075·N	1·N
Сталь №3	X3	10	0,06·N	2·N	0,07·N
Потрібна вага компонента в Суміші 1, у.о.			5·N	10·N	8·N
Потрібна вага компонента в Суміші 2, у.о.			15·N	4·N	6·N
Потрібна вага компонента в Суміші 3, у.о.			12·N	7·N	3·N

Таблиця 4.5

Цикл виробництва 1 кг сумішей зі сталі №1 та №2

Найменування	Витрати часу, діб		
	Суміш 1	Суміш 2	Суміш 3
Отримання матеріалів	$0,1 \cdot N$	$0,1 \cdot N$	$0,1 \cdot N$
Виробництво	$0,03 \cdot N$	$0,05 \cdot N$	$0,04 \cdot N$
Продаж на ринку	$0,5 \cdot N$	$0,2 \cdot N$	$0,05 \cdot N$

Визначити прибуток на 1 кг суміші та інтенсивність прибутку.