22. ГРАФОАНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОЇ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

В багатьох задачах лінійного програмування може ставитися задача одночасного врахування не одного, а кількох критеріїв оптимальності (з точки зору програмування прибутку одна з цих функцій мети повинна враховувати інтенсифікацію прибутку).

Тоді згідно з існуючим методом [1; 20; 21; 22] спочатку задача розв'язується для кожного з критеріїв окремо, а потім початкова математична модель ускладнюється з урахуванням нових обмежень, отриманих на базі вказаних розв'язків; далі ця перетворена модель розв'язується за симплекс-методом.

У даному розділі розглядається графоаналітичний метод розв'язання багатокритеріальної задачі лінійного програмування та графоаналітичне тлумачення використання двох критеріїв, кожне з яких може бути спрямоване або до максимуму, або до мінімуму. Перевагою даного графоаналітичного методу є уникнення використання симплекс-методу для розв'язання задачі з 10-ма змінними (див. приклад) та більш чітке графоаналітичне уявлення напрямків розрахунків.

Розрахунок проведемо на прикладі, взятому з [1], для якого є відомим оптимальне рішення з урахуванням двох критеріїв ($x_1^0=3,03; x_2^0=5,22; f_1=23,91; f_2=4,87$):

$$f_1=x_1+4x_2 \rightarrow max; \tag{22.1}$$
$$f_2=3x_1-x_2 \rightarrow min; \tag{22.2}$$
$$x_1+2x_2\geq 4; \tag{22.3}$$
$$3x_1+x_2\geq 7; \tag{22.4}$$
$$-3x_1+5x_2\leq 17; \tag{22.5}$$
$$5x_1-x_2\leq 23; \tag{22.6}$$
$$3x_1-4x_2\leq 7; \tag{22.7}$$
$$x_1, x_2\geq 0. \tag{22.8}$$

Припустима область існування множини рішень розв'язків задачі зображена на рис. 22.1 у вигляді багатокутника *ABCDE*, в якому прямі лінії *AB, BC, CD, DE, EA* відповідають нерівностям-обмеженням відповідно до (20.4), (20.5), (20.6), (20.7), (20.3). Функції мети f_{1max}, f_{1min}, f_{2max}, f_{2min} показані дотичними до області рішення прямими лініями з точками їх перетину *K*, *M*, *L*, *N* та дотичними точками *B*, *C*, *D*, *E*. Півплощини припустимих розв'язків функцій мети (20.1) – (20.2) та прямих ліній рівнянь-обмежень області рішень (20.3) – (20.7) помічені пунктирними лініями.

Згідно з [1] отримані такі графоаналітичні розв'язки:

1. В точці $C(x_1,x_2)=C(6,7)$ знаходиться максимум функції мети $f_{1max}=x_1+4x_2=6+4\cdot 7=34$.
2. В точці $E(x_1,x_2)=E(3;0,5)$ знаходиться мінімум функції мети $f_{1min}=x_1+4x_2=3+4\cdot 0,5=5$.
3. В точці $D(x_1,x_2)=D(5,2)$ знаходиться максимум функції мети $f_{2max}=3x_1-x_2=3\cdot 5-2=13$.
4. В точці $B(x_1,x_2)=B(1,4)$ знаходиться мінімум функції мети $f_{2min}=3x_1-x_2=3\cdot 1-4=-1$.
5. Точка $A(x_1,x_2)=A(2,1)$ знаходиться на перетині прямих (22.3) та (22.4).

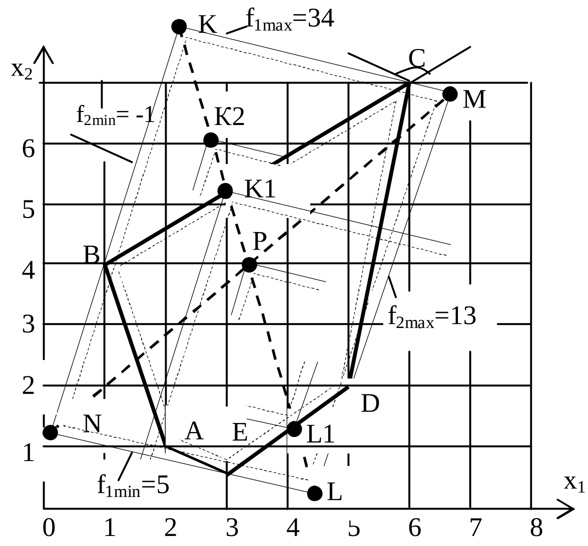

Рис. 22.1. Графоаналітичний розв'язок задачі лінійного програмування

Пересічення двох прямих *KM* та *KN* (функції мети $f_{1max}= x_1+4x_2=6+4\cdot 7=34$ та $f_{2min}= 3x_1\text{-}x_2=3\cdot 1\text{-}4= -1$) дає в точці *K* бажане розв'язання задачі при оптимальних найліпших значеннях функцій мети. Але, на жаль, точка *K* знаходиться за межами області припустимих рішень.

Найгірший розв'язок задачі отримуємо в точці *L* шляхом пересічення двох прямих *NL* та *ML* (протилежних функцій мети $f_{1min}=x_1+4x_2=3+4\cdot 0,5=5$ та $f_{2max}=3x_1\text{-}x_2=3\cdot 5\text{-}2=13$). Точка *L* теж знаходиться за межами області припустимих рішень. Точка *L* є протилежною по оптимальності по відношенню до точки *K* при врахуванні двох критеріїв і відіграє таку ж роль, як і протилежні точки *C* та *E* ("$f_{1max} – f_{1min}$") або точки *B* та *D* ("$f_{2max} – f_{2min}$"). Якщо прийняти відрізок *KL* за 100% (0% відповідає точці *L*, а 100% – точці *K*), то положення будь-якої точки на цьому відрізку показує у відсотках, наскільки оптимальним чином задовольняються дві функції мети. Середина відрізка *KL* дає точку *P*, яка відповідає 50% задоволенню двох функцій мети від своєї найліпшої величини 100% в точці *K*. Можна вважати, що в точці *L* обидві функції мети перетворюються в свою протилежність і дають найгірше значення у сенсі досягнення вказаного в задачі ідеального недосяжного оптимуму.

До речі, якщо б у задачі стояла інша умова – досягнення оптимальних значень функцій мети f_{1max} та f_{2max}, то для аналогічного оптимального рішення ми б отримали точку *M*, а для найгіршого протилежного рішення – точку *N*.

Бажане ідеальне (і неможливе при врахуванні вимог двох функцій мети) початкове розв'язання задачі для кожної функції мети окремо вказують нам положення оптимальних ліній *KM* та *KN*. Зрозуміло, що оптимальне значення кожної функції мети може лише погіршуватись при врахуванні додаткових вимог щодо дотримання умов інших функцій мети. Вільні члени функцій мети f_{1max} та f_{2min} повинні змінюватись таким чином, щоб функції мети у вигляді прямих ліній переміщувались назустріч одна одній паралельно собі і відсікали все більшу частину області припустимих рішень *ABCDE* (при різних вільних членах ми тут повинні розмовляти просто про функції f_1 та f_2).

Тому що задача є лінійною і рішення переміщується від найліпшого недосяжного значення (в точці *K*) до найгіршого недосяжного значення (в точці *L*), то точка пересічення функцій мети f_{1max} та f_{2min} повинна ковзати по прямій *KL*. В кінцевому положенні відповідна кутова точка *К* сумісно з функціями мети f_{1max} та f_{2min} займе положення кутової точки *К1* на пересіченні прямих *КL* та *ВС*.

В точці *К1* ми будемо мати оптимальне рішення для поставленої задачі.

Тут потрібно визначитися з подальшими діями:

1. Точка *К* відповідає математичній моделі, якщо функції мети $f_1=x_1+4x_2 \rightarrow max$; $f_2=3x_1-x_2 \rightarrow min$ згідно з (22.1) та (22.2). Але ці умови при переміщенні від точки *К* до точки *L* вздовж прямої *КL* поступово змінюються і в точці *L* набувають прямо протилежних значень щодо початкових умов $f_1=x_1+4x_2 \rightarrow min$; $f_2=3x_1-x_2 \rightarrow max$.

2. Математична модель повинна бути розв'язана строго за своїми зафіксованими умовами (22.1) та (22.2). А тут виходить, що ми (при узгодженні між собою вимог різних критеріїв оптимальності по кількості більше за два) у принципі можемо отримати як розв'язок задачі точку *L1*, яка чітко відповідає "неприпустимим" функціям мети $f_1=x_1+4x_2 \rightarrow min$ та $f_2=3x_1-x_2 \rightarrow max$, що не відповідає початковій математичній моделі (підстави для такого твердження у випадку наявності кількості критеріїв більше за два дає отримана область можливих рішень при врахуванні впливу двох критеріїв у вигляді багатокутника *K1-Y3-D-E-A-H4* – див. рис. 22.2). Таким чином кардинально змінюються умови розв'язання задачі і, начебто, "не дотримуються вимоги (22.1) та (22.2)". Для цього випадку ми повинні

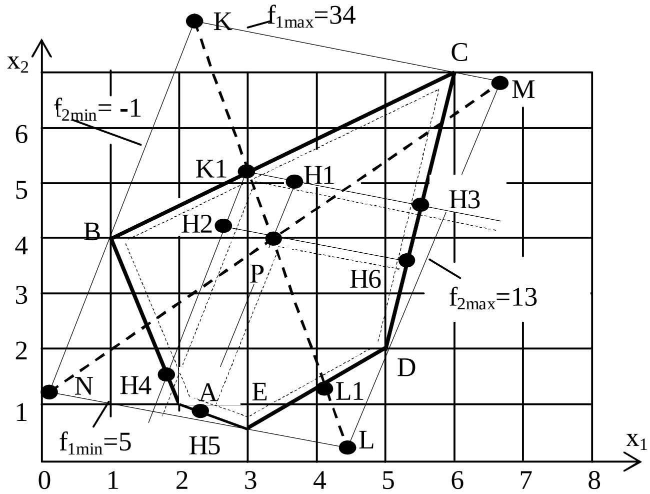

Рис. 22.2. Графоаналітичний розв'язок задачі лінійного програмування

3. Тому у вказаному відношенні потрібно мати домовленість:

а) можна вважати, що при паралельному переміщенні кута *NKM* із точки *K* в точку *K1* ми отримуємо спочатку оптимальне найліпше розв'язання задачі в точці *K1* (рис. 22.2). Якщо точку *K* указаного кута перемістити в точку *P*, то вся множина припустимих рішень вже не відповідає умовам (22.1) та (22.2), бо вона знаходиться на границі протилежних математичних вимог функцій мети (посередині відрізка *KL*). При такому тлумаченні вимог функції мети вся припустима множина рішень знаходиться в паралелограмі *H2-K1-H1-P*, а найліпші рішення, узгоджені з точки зору дотримання умов функцій мети (22.1) та (22.2), знаходяться на прямій *K1-P*. Наявність рішень в указаному паралелограмі *H2-K1-H1-P* пояснюється тим, що відповідні функції мети (22.1) та (22.2) при зміні величини вільного члена зміщуються паралельно самим собі. Наприклад, в розглянутому випадку при переміщенні вздовж прямої *K1-P* від точки *K1* до точки *P*:

– функція мети f_{1max} змінює своє значення від 23,9 до 19,5;

– функція мети f_{2min} змінює своє значення від 3,87 до 6.

В області паралелограма *H2-K1-H1-P* будь-яка точка має значення функції мети в указаних межах.

В багатокутнику *H1-H3-H6-P* функція мети f_{1max} змінює своє значення від 23,9 до 19,5, але функція мети f_{2min} стає більшою за 6. Аналогічно в багатокутнику *H2-P-H5-A-H4* функція мети f_{2min} змінює своє значення від 3,87 до 6, але функція мети f_{1max} стає меншою за 19,5;

б) вказаній проблемі можна надати й іншого тлумачення. Ми можемо вважати усю множину рішень на прямій *K-L* (або *K1-L1*) за 100%: точці *K* (або *K1*) відповідає 100%, а точці *L* (або *L1*) відповідає 0%. При такому тлумаченні вимог функції мети уся припустима множина рішень знаходиться в багатокутнику *K1-H3-D-E-A-H4*, а найліпші рішення, узгоджені з точки зору дотримання умов функцій мети (22.1) та (22.2), знаходяться на прямій *K1-L1* (рис. 22.2). Тоді переміщення від точки *K* (або *K1*) до точки *L* (або *L1*) набуває значення задоволення вимог функцій мети (22.1) та (22.2) у сенсі відсотків (від 100% до 0%). У цьому разі для чіткого уявлення практичного дотримання умов початкової задачі, якщо будь-яка функція мети набуває менше за 50% максимального можливого значення в точці *K* (або *K1*) (тобто якщо ми переміщуємось від точки *P* далі в напрямку точки *L*), то ми повинні усвідомлювати, що з точки зору практичного застосування математичної моделі це означає можливість перегляду умов тлумачення функцій мети в початковій задачі.

В обох указаних випадках ми отримали випуклі області існування рішень.

Якщо у нас існують додаткові функції мети понад зазначені дві, то ми повинні шляхом накладання отриманих оптимальних областей відшукати сукупну область існування рішень, які оптимальним чином задовольняли б вимогам усіх функцій мети. Використовувати метод накладання дозволяється для лінійних математичних моделей, а відсутність таких загальних областей означає відсутність рішення.

Ми будемо дотримуватись відсоткового принципу визначення дотримання умов функції мети без їх фактичного перегляду, тим більше, що для випадку використання двох функцій мети оптимальна точка рішення однозначно знаходиться лише на границях області рішень багатокутника *ABCDE*.

Отриману пряму *KL* ми можемо розділити навпіл у точці *P* і отримати таким чином критерій, за межі якого бажано не переміщувати точку рішення. Можна також використовувати пряму *K1-L1* замість *KL* і на ній вказувати серединну точку. Ці ж прямі можуть бути використані для визначення інших заборонених значень.

Розглянемо рішення задачі на підставі указаних тверджень.

Координати точки $K(x_1,x_2)=K(30/13;103/13)$ визначаються по точці пересічення прямих $f_{1max}= x_1+4x_2=34$ та $f_{2min}= 3x_1-x_2= -1$. Координати точки $L(x_1,x_2)= L(57/13;2/13)$ визначаються по точці перетину прямих $f_{1min}=x_1+4x_2=5$ та $f_{2max}=3x_1-x_2=13$. Через дві точки $K(x_1,x_2)=K(30/13;103/13)$ та $L(x_1,x_2)= L(57/13;2/13)$ проводимо пряму *KL*, яка описується рівнянням

$$1313x_1+351x_2=5811. \tag{22.9}$$

Сумісне рішення (22.5) та (22.9) дозволяє отримати координати точки $K1(x_1,x_2)=K1(3,03;5,22)$, які точно співпадають з рішенням, указаним в [1].

При цьому функції мети в оптимальній точці $K1(x_1,x_2)=K1(3,03;5,22)$:

$$f_1=x_1+4x_2= 3,03+4\cdot 5,22=23,91;$$
$$f_2=3x_1-x_2= 3\cdot 3,03-5,22=3,87.$$

Координати серединної точки $P(435/130;525/130)$ знаходяться як середні значення координат точок $K(30/13;103/13)$ та $L(57/13;2/13)$. Відповідні значення функцій мети для цієї точки $P(435/130;525/130)$

$$f_1=x_1+4x_2= 435/130+4\cdot(525/130)=2535/130=19{,}5;$$
$$f_2=3x_1-x_2= 3\cdot(435/130)-525/130=780/130=6.$$

Якщо вважати, що оптимальне значення може змінюватись лише до 50% від свого найліпшого значення, то функція мети f_1 “має право” зменшуватись від 34 до 19,5; функція мети f_2 “має право” збільшуватись від –1 до 6. Подальша зміна цих функцій мети перетворює їх на протилежність щодо умов задачі (у сенсі їх спрямованості в математичній моделі до максимуму або мінімуму).

Таким чином, для задачі лінійного програмування можна зробити такі припущення:

1. Оптимальне рішення для двох критеріїв знаходиться в результаті пересічення границі області існування рішень (прямої *BC)* з відповідною прямою *KL* (положення якої визначають задані функції мети) в точці *K1*, причому рішення теоретично може знаходитись у будь-якій точці прямої *BC*. Якщо точку К сумісно з напрямками функцій мети f_{1max} та f_{2min} розмістити десь на середині відрізку *К-К1* (наприклад, в точці *К2*), то відповідні оптимальні значення функцій мети будуть знаходитися на відрізку *BC* між точками перетину напрямків функцій мети f_{1max} та f_{2min} з відрізком *BC*, але в цьому разі ми лише частково враховуємо вплив різних функцій мети.
2. Множину теоретично припустимих функцій мети f_{1max} для точки *C* визначають положення прямих *BC, CD, AE, ED*. Ці прямі визначають кути, в межах яких не повинні знаходитись теоретично можливі функції мети для даної точки (інакше функція мети не буде дотичною до області можливих рішень і буде її перетинати). Для точки *C* (рис. 22.1) заборонений для функцій мети f_{1max} кут помічений дужкою (відповідно цей же кут є забороненим і для f_{1min}).
3. Отримані дві прямі (*KL* та *MN*) вказують напрямки переміщення відповідних вершин оптимальних рішень: якщо як оптимум задана точка *L*, то оптимальне рішення буде знаходитись на пересіченні прямих *KL* та *ED*; якщо як оптимум задана точка *N*, то оптимальне рішення буде знаходитись на пересіченні прямих *MN* та *AB* тощо.
4. Якщо вважати, що оптимальне значення може змінюватись лише до 50% від свого найліпшого значення, то кутова точка оптимального рішення не повинна переміщуватися за межі точки *P*, бо це перетворює вимоги щодо досягнення оптимуму мети на протилежність.

5. Якщо задача лінійного програмування вміщує більше двох функцій мети, то додаткові функції мети застосовуються до області рішення, отриманої за допомогою двох використаних функцій мети. Наприклад:
– для моделі з трьома функціями мети до отриманої області рішень від двох функцій мети застосовується відповідна дотична від третьої функції мети;
– для моделі з чотирма функціями мети розглядаються загальні області існування рішень, отриманих накладанням їх областей, визначених двома виділеними парами функцій мети з наступним урахуванням найліпших значень функцій мети в кутових точках загальної області.

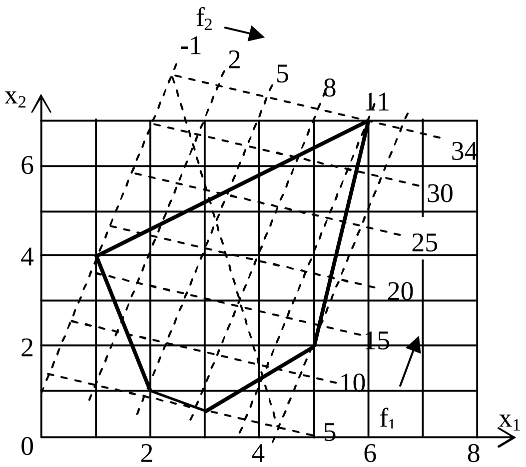

Рис. 22.3. Номограми для розв'язку задачі лінійного програмування

6. Якщо для функцій мети задатись рядом вільних членів від мінімального до максимального значення (для функції f_1 – у межах "5…34", для функції f_2 – у межах "-1…13"), то всю область рішень багатокутника *ABCDE* можна покрити номограмою у вигляді сітки (рис. 22.3), яка дасть змогу приблизно оцінити значення критеріїв для будь-якої точки області рішень. ***Ця сітка-номограма для достатньо великої кількості функцій мети сама по собі може бути використана експертом для визначення розв'язку при припустимих значеннях усіх функцій***

мети. Уточнення значень оптимальної точки розв'язку може бути досягнуто за рахунок зміни масштабу області навколо визначеної точки рішення.

Завдання. 1. Розв'язати задачу лінійного програмування згідно з математичною моделлю (N – порядковий номер студента у групі) при наявності двох критеріїв:

$f_1=x_1+(N/5)x_2 \to max;$ $f_2=(N/8)x_1 - \to min;$

$x_1-x_2 \leq -N;$ $x_1+x_2 \leq 7N;$

$3x_1-x_2 \leq 9N;$ $x_1+3x_2 \geq 3N;$

$x_1, x_2 \geq 0.$

2. Розв'язати задачу з областю рішень згідно з п. 1 для двох критеріїв:

$f_1=x_1+(N/5)x_2 \to max;$ $f_2=(N/8)x_1-x_2 \to max.$

3. Розв'язати задачу з областю рішень згідно з п. 1 для двох критеріїв:

$f_1=x_1+(N/5)x_2 \to min;$ $f_2=(N/8)x_1-x_2 \to max.$

4. За допомогою номограм розв'язати задачі з областю обмежень рішень за п. 1 та критеріями

$f_1=x_1+(N/5)x_2 \to min;$ $f_2=(N/8)x_1-x_2 \to min;$

$f_3=(N/4)x_1+(N/5)x_2 \to max.$

Після розв'язання задачі визначити відсоткові значення заданих функцій мети для уточнення їх практичного дотримання вказаних