20. КОМБІНАТОРНО-ГРАНИЧНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗАННЯ БУЛЕВИХ ЗАДАЧ

20.1. Модель з додатними коефіцієнтами функції мети при спрямуванні її до мінімуму

Для розв'язку булевої задачі, яка має вигляд математичної моделі (тут змінні x_j , j =1,…,5 – нуль або одиниця)

$$F_1=5x_1+3x_2 -6x_3 -4x_4+x_5 \rightarrow min;$$
$$x_1-14x_2+15x_3-2x_4+7x_5\geq 12;$$
$$-4x_1+20x_2+14x_3-10x_4+3x_5\leq 1,$$

треба шляхом підстановки $x_3=1-z_3;$ $x_4=1-z_4$ ***перетворити функцію мети*** F_1 таким чином, щоб вона мала лише додатні коефіцієнти при змінних (за вилученням вільного члена)

$$F_2=5x_1+3x_2 -6(1-z_3) -4(1-z_4)+\rightarrow min;$$
$$x_1-14x_2+15(1-z_3)-2(1-z_4)+7x_5 \geq 12;$$
$$-4x_1+20x_2+14(1-z_3)-10(1-z_4)+3x_5 \leq 1.$$

Для зручності подальших пояснень виконаємо ранжування усіх змінних моделі у порядку зростання вагових коефіцієнтів у функції мети F_2:

$$F_2=x_5+3x_2 +4z_4 +5x_1+6z_3 - 10 \rightarrow min; \quad (20.1)$$
$$7x_5-14x_2+2z_4+x_1-15z_3\geq -1; \quad (20.2)$$
$$3x_5+20x_2+10z_4-4x_1-14z_3\leq -3. \quad (20.3)$$

Тому що функція мети (20.1) спрямована до мінімуму, логічно, що у початковому рішенні усі змінні повинні бути рівними 0: $x_5=0$, $x_2=0$, $z_4=0$, $x_1=0$, $z_3=0$ (якщо б функція мети була спрямована до максимуму, то у початковому рішенні усі змінні повинні бути рівними 1).

Перевіряємо це початкове рішення за допомогою нерівностей (20.2) та (20.3): нерівність (20.2) виконується, а нерівність (20.3) – ні. Оскільки деякі зі змінних мають неприпустиме нульове значення, необхідно збільшити значення однієї чи кількох булевих змінних до

1, щоб одержати припустиме рішення, або дійти висновку, що задача не має припустимого розв'язку.

З цією метою, користуючись функцією мети (20.1), складаємо комбінації змінних таким чином, щоб їх вилучення поступово

Таблиця 20.1

Комбінації змінних функції мети, збільшення яких до 1 поступово збільшує функцію мети

Збільшення функції мети	1	3	1+3=4	4	1+4=5	5		
Збільшення змінних	$X_5=1$	$x_2=1$	$x_5=1$ $x_2=1$	$z_4=1$	$x_5=1$ $z_4=1$	$x_1=1$		
Не співпадає нерівність	(3)	(2),(3)	(2),(3)	(3)	(3)	-		

Таким чином, математичну модель (20.1) – (20.3) задовольняє умова $x_1=1$, якщо всі інші змінні дорівнюють нулю; згідно з даними табл. 20.1 рішенням є $x_5=0, x_2=0, z_4=0, x_1=1, z_3=0, F_2=-5$, звідки $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0$.

Якщо в результаті подібних розрахунків ми не отримуємо рішення, то це означає, що дана модель не має рішення.

20.2. Модель з додатними коефіцієнтами функції мети при спрямуванні її до максимуму

Розглянемо цю ж саму математичну модель за умови, що функція мети спрямована до максимуму. Для цього усі коефіцієнти функції мети множимо на "-1" і отримуємо

$$F_3=-5x_1-3x_2+6x_3+4x_4-x_5 \to max;$$
$$x_1-14x_2+15x_3-2x_4+7x_5 \geq 12;$$
$$-4x_1+20x_2+14x_3-10x_4+3x_5 \leq 1.$$

В функції мети нам потрібно отримати лише додатні коефіцієнти при змінних. Для цього використовуємо підстановку: $x_1=1-z_1$; $x_2=1-z_2$; $x_5=1-z_5$. В результаті отримуємо модель:

$$F_4= 5z_1+3z_2+6x_3+4x_4+z_5-9 \to max;$$
$$-z_1+14z_2+15x_3-2x_4-7z_5 \geq 18;$$
$$4z_1-20z_2+14x_3-10x_4-3z_5 \leq 20.$$

Для зручності подальших пояснень виконаємо ранжування усіх змінних моделі у порядку зростання вагових коефіцієнтів у функції мети:

$$F_4=z_5+3z_2+4x_4+5z_1+6x_3-9 \rightarrow max; \quad (20.4)$$
$$-7z_5+14z_2-2x_4-z_1+15x_3 \geq 18; \quad (20.5)$$
$$-3z_5-20z_2-10x_4+4z_1+14x_3 \leq 20. \quad (20.6)$$

Тому що функція мети (20.4) спрямована до максимуму, логічно, що у початковому рішенні усі змінні повинні бути рівними 1: $z_5=1$, $z_2=1$, $x_4=1$, $z_1=1$, $x_3=1$.

Перевіряємо це початкове рішення за допомогою нерівностей (20.5) та (20.6): нерівність (20.5) виконується, а нерівність (20.6) – ні. Це означає, що деякі зі змінних мають неприпустиме значення, необхідно зменшити їх значення до 0, щоб одержати припустиме рішення (або дійти висновку, що задача не має припустимого розв'язку).

З цією метою, користуючись функцією мети (20.4), складаємо комбінації змінних таким чином, щоб їх вилучення поступово зменшувало функцію мети (табл. 20.2). Практично це зводиться до

Таблиця 20.2

Комбінації змінних функції мети, зменшення яких до 0 поступово зменшує функцію мети

Збільшення функції мети	1	3	1+3=4	4	1+4=5	5		
Зменшення змінних	$z_5=0$	$z_2=0$	$z_5=0$ $z_2=0$	$x_4=0$	$z_2=0$ $x_4=0$	$z_1=0$		
Не співпадає нерівність	(6)	(5),(6)	(5),(6)	(6)	(6)	-		

Таким чином, математичну модель (20.4) – (20.6) задовольняє умова $z_1=1$, якщо всі інші змінні дорівнюють нулю; згідно з даними табл. 20.2 рішенням є $z_5=1$, $z_2=1$, $x_4=1$, $z_1=0$, $x_3=1$, $F_4=+5$, звідки $x_1=1$, $x_2=0$, $x_3=1$, $x_4=1$, $x_5=0$.

Якщо в результаті подібних розрахунків ми не отримуємо рішення, то це означає, що дана модель не має рішення.

Отримані ідентичні рішення підтверджують можливість розв'язку задачі при спрямуванні функції мети або до мінімуму, або до максимуму.

Після пояснення принципів роботи розглянутий алгоритм може бути спрощений шляхом вилучення операції ранжування змінних у функції мети і вилученням операції заміни змінних.

20.3. Розв’язання булевих задач без перетворень початкової

Використаємо як початкову попередню математичну модель

$$F_1=5x_1+3x_2-6x_3-4x_4+x_5 \rightarrow min; \quad (20.7)$$
$$x_1-14x_2+15x_3-2x_4+7x_5 \geq 12; \quad (20.8)$$
$$-4x_1+20x_2+14x_3-10x_4+3x_5 \leq 1. \quad (20.9)$$

Тому що функція мети (20.9) спрямована до мінімуму, вважаємо, що у початковому рішенні змінні дорівнюють: $x_1=0, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0$.

Перевіряємо це початкове рішення за допомогою нерівностей (20.8) та (20.9): нерівність (20.8) виконується, а нерівність (20.9) – ні. Оскільки деякі зі змінних мають неприпустимі значення, необхідно їх змінити.

З цією метою, користуючись функцією мети (20.7), складаємо комбінації змінних таким чином, щоб їх вилучення поступово збільшувало функцію мети (табл. 20.3). Практично це зводиться до перегляду можливих комбінацій з коефіцієнтів при змінних функції мети (20.7), якщо вважати їх додатними.

Таблиця 20.3

Комбінації змінних функції мети, збільшення яких до 1 поступово збільшує функцію мети

Збільшення функції мети	1	3	1+3=4	4	1+4=5	5		
Збільшення змінних	$x_5=1$	$x_2=1$	$x_5=1$ $x_2=1$	$x_4=0$	$x_5=1$ $x_4=0$	$x_1=1$		
Не співпадає нерівність	(9)	(8),(9)	(8),(9)	(9)	(9)	-		

Згідно з даними табл. 20.3 рішенням є $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0$, $F_1=-5$.

20.4. Розв’язання булевих задач без перетворень початкової

Використаємо математичну модель

$$F_3=-5x_1-3x_2+6x_3+4x_4-x_5 \to max; \qquad (20.10)$$
$$x_1-14x_2+15x_3-2x_4+7x_5 \geq 12; \qquad (20.11)$$
$$-4x_1+20x_2+14x_3-10x_4+3x_5 \leq 1. \qquad (20.12)$$

Тому що функція мети (20.10) спрямована до максимуму, вважаємо, що у початковому рішенні усі змінні повинні бути рівними 1: $x_1=0, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0$.

Перевіряємо це початкове рішення за допомогою нерівностей (20.11) та (20.12): нерівність (20.11) виконується, а нерівність (20.12) – ні. Це означає, що деякі зі змінних мають неприпустиме значення і їх необхідно змінити.

З цією метою, користуючись функцією мети (20.10), складаємо комбінації змінних таким чином, щоб їх вилучення поступово зменшувало функцію мети (табл. 20.4). Практично це зводиться до перегляду можливих комбінацій з коефіцієнтів при змінних функції мети (20.10).

Таблиця 20.4

Комбінації змінних функції мети, зміна яких поступово зменшує функцію мети

Збільшення функції мети	1	3	1+3=4	4	1+4=5	5		
Зменшення змінних	$x_5=1$	$x_2=1$	$x_5=1$ $x_2=1$	$x_4=0$	$x_5=1$ $x_4=0$	$x_1=1$		
Не співпадає нерівність	(12)	(11),(12)	(11),(12)	(12)	(12)	-		

Згідно з даними табл. 20.4 рішенням є $x_1=1, x_2=0, x_3=1, x_4=1, x_5=0, F_3=+5$.

Якщо в результаті подібних розрахунків ми не отримуємо рішення, то це означає, що дана модель його не має.

Завдання. Розв'язати булеву задачу комбінаторно-граничним методом.

$$F=Ax_1-6x_2-Nx_3+2x_4-x_5 \to max;$$
$$2Nx_1-10x_2+Ax_3-7x_4+3Nx_5 \geq 3N;$$
$$-4Nx_1+8x_2+Nx_3-12x_4+2Nx_5 \leq N.$$

$A=\sqrt{N}$; N – порядковий номер студента у групі.