19. КОМБІНАТОРНО-ГРАНИЧНИЙ МЕТОД ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

На перший погляд цілочисельний оптимальний результат повинен співпадати з округленим у меншу або більшу сторону (в залежності від нерівностей) оптимальним нецілочисельним рішенням тієї ж задачі. Взагалі ці розмірковування є вірними, але в дійсності вони часто не підтверджуються, бо відхилення оптимального цілочисельного від оптимального нецілочисельного рішення залежить ще й від місця знаходження цілочисельної точки в області рішень: розташування цілочисельної точки в області рішень ***може значно відхилитись від її границі і кутової точки оптимуму; саме це й впливає на результат розрахунків***.

Розв'язок задачі цілочисельного програмування комбінаторно-граничним методом розглянутий в монографії [11]. При цьому загальний об'єм комбінаторного перебору залежить від діапазону зміни усіх змінних, а діапазон конкретної змінної визначається по нерівностях-обмеженнях математичної моделі, вважаючи інші змінні рівними нулю. Такий підхід можна використовувати, якщо значення змінних не охоплюють занадто великого обсягу дискретних чисел.

Тому бажано так перетворити початкову математичну модель, щоб звузити діапазони усіх змінних, бо це зменшить кількість етапів розрахунків. Або можна обмежити кількість розрахунків наданням одній змінній ряду цілочисельних значень (при найменшому діапазоні) і використанням нерівностей-обмежень для визначення

19.1. Використання нерівностей-обмежень для визначення

Припустимо, що ми маємо математичну модель

$$F=x_1+4x_2 \rightarrow min; \tag{19.1}$$

$$4,8x_1+7,1x_2 \geq 20; \tag{19.2}$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0,$$

область рішення якої показана на рис. 19.1 пунктирною лінією. Точне рішення відповідає кутовій точці А з координатами $(x_1=4{,}16, x_2=0)$, функція мети $F=4{,}16$. Цілочисельне рішення знаходиться в точці В з координатами $(x_1=5, x_2=0)$, функція мети $F=5$.

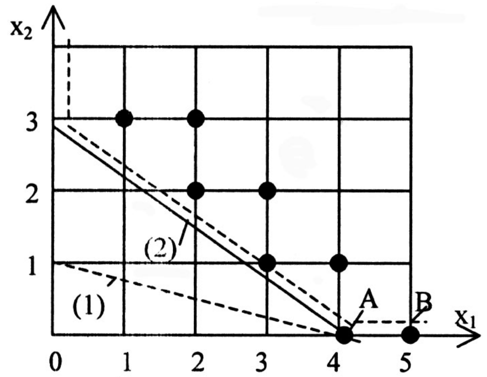

Рис. 19.1. Графічне розв’язання цілочисельності

Згідно з функцією мети змінні повинні дорівнювати “0”. Нерівність (19.2) теж дозволяє використати нульові значення кожної змінної окремо, але водночас обмежує їх величини взаємною залежністю. Нас цікавлять не всі можливі цілочисельні рішення, а лише ті, які знаходяться біля границі області рішень. Тому діапазони зміни змінних дорівнюють: $x_1=\{0..4{,}16\}=\{0..5\}$; $x_2=\{0..2{,}8\}=\{0..3\}$. Найменший діапазон має змінна $x_2=\{0..3\}$. Тому бажано обирати x_2 як основну змінну, яка цілочисельно змінюється у діапазоні $x_2=\{0..3\}$, а відповідне цілочисельне значення x_1 розраховуємо по нерівності (19.2) з округленням в сторону збільшення (щоб залишитись в області рішення). В цьому випадку функцію обмеження комбінаторного перебору виконує нерівність (19.2). Результати розрахунків наведені в табл. 19.1 для двох випадків: коли спочатку основною змінною є x_1, а потім – x_2. Рішення помічене зірочкою на значенні функції мети. Значення

$$y = 4{,}8x_1+7{,}1x_2$$

Таблиця 19.1

Комбінаторний перебір цілочисельних рішень

x_1	0	1	2	3	4	5	6
x_2	2,8=3	2,14=3	1,47=2	0,79=1	0,112=1	-0,56=0	-1,24=0
y	21,3	26,1	23,8	21,5	26,3	24	28,8
F	12	13	10	7	8	5*	6

x_2	0	1	2
x_1	4,2=5	2,7=3	1,21=2
y	24,0	21,5	23,8
F	5*	7	10

Якщо в математичній моделі є кілька нерівностей, за якими визначається x_1, то серед них обирається найбільше x_1 з контролем дотримання кожної нерівності.

19.2. Використання оптимального розв’язку для визначення

Розглянемо математичну модель

$$F=5x_1+10x_2 \rightarrow max; \qquad (19.3)$$

$$10x_1+x_2 \leq 1000; \qquad (19.4)$$

$$x_1+5x_2 \leq 500; \qquad (19.5)$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \qquad (19.6)$$

з оптимальним нецілочисельним рішенням $x_1=91,837;\ x_2=81,633;\ F=1275,5$ та оптимальним цілочисельним рішенням $x_1=90;\ x_2=82;\ F=1270$. З нерівностей (19.4) та (19.5) можна виявити діапазони зміни змінних $x_1=0\ldots500;\ x_2=0\ldots1000$.

Для великих оптимальних значень змінних немає сенсу шукати оптимальне цілочисельне рішення повним перебором усього вказаного діапазону, тому що однаково оптимальне цілочисельне рішення у відсотковому відношенні мало відрізняється від оптимального нецілочисельного рішення.

Звідси випливає важлива практична порада [18]: якщо точка оптимального розв’язання задачі вміщує великі цифри і стосується порівняно недорогої продукції, то можна обмежитись округленням нецілочисельного рішення.

Але якщо продукція є дорогою та випускається невеликою партією (наприклад, 10 літаків нової конструкції), то бажано виконати точний розрахунок. Чим менші числа оптимального нецілочисельного розв’язання задачі, тим більше у відсотках може відрізнятись від нього оптимальний цілочисельний результат.

У даному випадку ми за основну цілочисельну змінну беремо x_1*=88, 89, 90, 91, 92, 93* у вигляді цілих чисел в діапазоні навколо оптимального рішення (треба підкреслити, що цілочисельне розв’язання задачі однаково повинне знаходитись в області нецілочисельного рішення; тому замість вказаного значення x_1 з кроком “1” можна обрати величини з більшим кроком з наступним уточненням оптимального значення). Відповідні величини $x_{2(4)}$ та $x_{2(5)}$ для кожного x_1 визначаємо по нерівностях (19.4) та (19.5) і серед них обираємо найменше значення. Для контролю нерівностей (19.4) та (19.5) з використанням цілочисельних змінних застосовуємо вирази

$$y_{(4)} = 10x_1 + x_2 \leq 1000;$$
$$y_{(5)} = x_1 + 5x_2 \leq 500.$$

Розрахунки наведені в табл. 19.2, затемнена колонка відноситься до оптимального цілочисельного рішення.

Таблиця 19.2

Комбінаторний перебір цілочисельних рішень з використанням оптимального нецілочисельного рішення у великих числах

x_1	88	89	90	91	92	93
$x_{2(4)}$	120	110	100	90	80*	70*
$x_{2(5)}$	82,2=82*	82,2=82*	82,0=82*	81,8=81*	81,8=81	81,7=81
$y_{(4)}$	962	972	982	991	1000	1000
$y_{(5)}$	498	499	500	495	492	443
F	1260	1265	1270	1265	1260	1165