

## 13. ПРОГРАМУВАННЯ ПРИБУТКУ В ЗАДАЧІ КОМІВОЯЖЕРА

### 13.1. Загальні відомості про задачу комівояжера

Комівояжер повинен об'їхати по найкоротшому шляху  $N$  міст (починаючи з пункту 1), побувати у кожному з них лише один раз і повернутись у початок шляху – пункт 1.

Задача полягає в тому, щоб мінімізувати функцію мети

$$F = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^N B_{ij} \rightarrow \min,$$

де  $B_{ij}$  – вартість проїзду (або час проїзду; довжина шляху тощо) між містами  $i$  та  $j$ ;  $i = 1, 2, \dots, N$  – нумерація міст, з яких від'їжджають;  $j = 1, 2, \dots, N$  – нумерація міст, у які в'їжджають.

З цією задачею пов'язана велика кількість інших задач. Одна група з цих задач є варіантами задачі комівояжера: комівояжер повинен обрати шлях, який забезпечує: найменшу витрату часу або палива на шлях; найменшу вартість проїзду; найменшу довжину шляху. Друга група з цих задач хоча і використовує методи розв'язання задачі комівояжера, але має інше практичне застосування: перевезення пошти або продуктів споживання у місті; з'єднання окремих пунктів лініями електропостачання, газопостачання, водопостачання; обробка  $N$  деталей на одному верстаті, якщо відомий час або вартість переналагодження верстата для різних деталей. Застосування методів розв'язання задачі комівояжера з проектуванням лінії електропостачання пов'язане з тим, що звичайно споживачів електричної енергії (а також водопостачання і т.д.) намагаються з'єднати таким чином, щоб лінія живлення створювала коло, бо це забезпечує найбільшу надійність надання електроенергії: якщо в одному місті лінія буде перервана, то

### 13.2. Метод осереднених коефіцієнтів у задачі

Розглянемо варіант задачі, коли комівояжер повинен об'їхати  $N$  міст при найменших витратах. Дані для розрахунку наводяться у табл.13.1 для  $N=4$ .

Розрахунки виконуємо за методом осереднених коефіцієнтів у задачі комівояжера [10].

**Таблиця 13.1**

**Задача комівояжера**

N	1		2		3		4		$B_{pi}$	$T_{pi}$
1	-		38	1	15	3	23	2	19	1,5
			-5,2	-2,5	-30	0,25	-15,5	-0,625		
2	20	5	-		67	1	41	2	32	2
	-37	1,13			9	-2,25	-10,5	-1,125		
3	24	2	34	3	-		14	0,5	18	1,375
	-19	-1,755	-8,2	-0,375			-23,5	-2		
4	56	0,5	25	4	22	1	-		25,8	1,375
	5,2	-2,745	-25	-0,625	-29,8	-1,625				
$B_{kj}$	25		24,2		26		19,5			
$T_{ki}$	1,87		2		1,25		1,125			

**Таблиця 13.2**

**Дані, які вводяться в кожну (i,j)-комірку задачі комівояжера**

№	Найменування	Позначення
1	Витрати на переміщення між містами	$B_{i,j}$
2	Час переміщення між містами	$T_{i,j}$
3	Коефіцієнт комірки по витратах	$K_{B_{i,j}}$
4	Коефіцієнт комірки по часу	$K_{T_{i,j}}$

Розміщення даних табл. 13.2 в кожній (i,j)-комірці задачі табл. 13.1 наведено в табл. 13.3. Вважаємо, що кожна комірка табл. 13.3 задачі комівояжера вміщує вказані в табл. 13.2 дані.

**Таблиця 13.3**

**Розміщення даних в (i,j)-комірці табл. 13.1**

$B_{i,j}$	$T_{i,j}$
$K_{B_{i,j}}$	$K_{T_{i,j}}$

Коефіцієнти комірки по витратах та часу розраховуються за формулами:

$$K_{B_{i,j}} = B_{i,j} - (B_{pi} + B_{ij});$$

$$K_{T_{i,j}} = T_{i,j} - (T_{pi} - T_{ij}),$$

$$B_{Pi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n B_{ij}; B_{Kj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n B_{ij}; T_{Pi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_{ij}; T_{Kj} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_{ij};$$

де

$B_{Pi}$  – середній коефіцієнт витрат рядка;  
 $B_{Kj}$  – середній коефіцієнт витрат колонок;  
 $T_{Pi}$  – середній коефіцієнт часу рядка;  
 $T_{Kj}$  – середній коефіцієнт часу колонок.

Звичайно між містами може розглядатись лише одна відстань, і тому ми мали б заповнити лише половину табл. 13.1. Але традиційно розглядається загальний випадок з різними шляхами між двома містами (наприклад, коли розглядається переїзд літаком, залізницею, автобусом).

Використання методу осереднених коефіцієнтів розглянемо на прикладі мінімізації витрат.

Кількість кроків розрахунків дорівнює кількості міст.

Використовуємо такий алгоритм розрахунку:

1. На кожному кроці за початковими тарифами  $B_{i,j}$  визначаємо значення величин середніх тарифів рядків ( $B_{Pi}$ ) та колонок ( $B_{Kj}$ ) і осереднені коефіцієнти ( $K_{Bi,j}$ ). На першому кроці використовуємо заповнену табл. 13.1.

2. По найменшому значенню осередненого коефіцієнта  $K_{B21} = -37$  обираємо комірку оптимального шляху комівояжера (2,1) з витратами  $B_{i,j} = B_{2,1} = 20$  та часом  $T_{i,j} = T_{2,1} = 5$ . З табл. 13.1 вилучаємо комірку (2,1) і далі не використовуємо. У таблиці, що залишилась від табл. 13.1 після вилучення рядка 2 та колонки 1, кожний рядок та кожна комірка повинні мати одну сумісну заборонену комірку. У даному випадку забороняємо комірку (1,2) і переходимо на п. 1 алгоритму (для скороченого на рядок 2 та колонку 1 варіанту табл. 13.1; при цьому в формулах для кроку 2 замість значення  $n$  в розрахунках для скороченої таблиці використовується значення  $(n-1)$ ). Заборонні рядок і комірка вилучаються і не використовуються у подальших розрахунках. У результаті отримуємо скорочену таблицю для наступного кроку.

3. Але часто цей метод дає вірні результати і без подібних нових розрахунків. Тому в даному випадку по найменшому значенню осередненого коефіцієнта  $K_{B13} = -30$  находимо наступне найменше значення оптимального шляху комівояжера (1,3) з витратами  $B_{i,j} = B_{1,3} = 15$  та часом  $T_{i,j} = T_{1,3} = 3$ . Забороняємо комірку (3,2).

4. Коли для відвідин **залишається лише два міста**, то вони входять в оптимальний шлях комівояжера без розрахунків, бо інших

варіантів їх обрання не існує. Практично кількість кроків через це зменшується.

При цих розрахунках порядок визначення оптимального шляху комівояжера через мінімальні значення осереднених коефіцієнтів показаний на рис. 13.1.

N	1	2	3	4
1	-			
2	-37	-		
3			-	
4				-

N	2	3	4
1	-	-30	
3		-	
4			-

N	2	4
3	-	-23,5
4	-25	-

**Рис.13.1. Порядок зміни табл. 16.1 згідно з методом осереднених коефіцієнтів**

Обраний шлях комівояжера наведений в табл. 13.4.

**Таблиця 13.4**

**Оптимальний шлях комівояжера при мінімізації витрат на переїзд**

Комірка $(i,j)$	$B_{i,j}$	$T_{i,j}$
(2,1)	20	5
(1,3)	15	3
(3,4)	14	0,5
(4,2)	25	4
Підсумок	$B_0=74$	$T_0=12,5$

Якщо поставити за мету збереження часу, то в табл. 13.1 треба використовувати осереднені коефіцієнти по часу  $K_{pi,j}$ . В результаті аналогічним чином отримуємо шлях комівояжера, показаний у табл.

**Таблиця 13.5**

**Оптимальний шлях комівояжера при мінімізації часу на переїзд**

Комірка $(i,j)$	$B_{i,j}$	$T_{i,j}$
(4,1)	56	0,5
(1,2)	38	1
(2,3)	67	1
(3,4)	14	0,5
Підсумок	$B_{T1}=175$	$T_{T1}=3$

### 13.3. Питання програмування прибутку в задачі

При переміщенні по ряду міст комівояжер звичайно виконує роботу, пов'язану з проектом. Якщо ця робота виконується комівояжером паралельно з іншими роботами і не заважає їм у їх завершенні, то в цьому разі ми повинні обрати модель отримання мінімальних витрат на відрядження комівояжера згідно з даними табл. 13.4.

Але не завжди комівояжер має необмежений час на своє відрядження. Часто його обмежують у часі. Наприклад, може бути поставлена вимога виконати роботу не більше ніж за 10 діб. Тоді рекомендується в табл. 13.4 визначити комірку (2,1) з найбільшим часом  $T_{i,j}=5$  і заборонити її для використання в табл. 13.1 призначенням їй занадто великих витрат на переїзд  $B_{2,1}=1000$ . В

Таблиця 13.6

Шлях комівояжера при мінімізації витрат на переїзд і обмеженні часу на відрядження не більше 10 діб

Комірка (i,j)	$B_{i,j}$	$T_{i,j}$
(2,4)	41	2
(3,1)	24	2
(1,2)	38	1
(4,3)	25	4
Підсумок	$V_{BT}=128$	$T_{BT}=9$

Може бути й так, що від рішень комівояжера у різних містах залежить подальший напрямок роботи над проектом, і тому на термін його відрядження збільшується й термін роботи над проектом. Недарма деякі бізнесмени мають власні літаки для прискорення операцій складання угод та переговорів. Тобто виникає проблема економії часу. Потрібно визначити: чи виправдовуються додаткові витрати на економії часу (наприклад, переміщення комівояжера лише літаком, використання таксі тощо) з точки зору інтенсифікації загального прибутку?

Раніше нами виявлено, що якщо **критерій збагачення у часі (критерій інтенсифікації)**

$$K_{T_2} = \frac{P_{T_2} T_0}{P_0 T_{T_2}} > 1,$$

то вигідно перейти до роботи по моделі інтенсифікації прибутку, при якому скорочується час на виконання роботи.

Розглянемо приклади:

1. Якщо витрати на відрядження практично не впливають на дійсну вартість проекту  $P_0$ , або враховані як прямі витрати в проекті, то  $P_{T2}=P_0$ , і тоді  $K_{T2}=T_0/T_{T2}$ .

2. Якщо витрати на відрядження не враховані як прямі витрати в проекті і можуть впливати на дійсну вартість проекту та термін його завершення, то для конкретного випадку  $P_0=1000$ ,  $T_0=10$ :

– при мінімізації витрат на переїзд згідно з табл. 13.4

$$K_{T21} = \frac{P_{T2}T_0}{P_0T_{T2}} = \frac{(1000 - 74) \cdot 10}{1000 \cdot (10 + 12,5)} = 0,412$$

– при мінімізації часу на переїзд згідно з табл. 13.5

$$K_{T22} = \frac{P_{T2}T_0}{P_0T_{T2}} = \frac{(1000 - 175) \cdot 10}{1000 \cdot (10 + 3)} = 0,635$$

З розрахунку випливає, що з точки зору інтенсифікації прибутку перевагу належить надати скороченню часу.

**Завдання.** Розв'язати задачу комівояжера. В задачі вказані витрати на переїзд між містами та витрачений час. Інші показники розрахувати самостійно. Отримати розрахунки з мінімізацією витрат (отримати  $B_B$  та  $T_B$ ) та окремо – з мінімізацією часу (отримати  $B_T$  та  $T_T$ ). Отримати шлях комівояжера при мінімізації витрат і зменшенні на 20% часу  $T_2=0,8 \cdot T_B$ .

Визначити доцільність мінімізації часу (доцільність дозволу витрат коштів  $B_T$  та часу  $T_T$ ), якщо витрати на відрядження не враховані як прямі витрати в проекті і можуть впливати на дійсну вартість проекту та термін його завершення за умови вартості проекту  $P_0=10000$  та терміну його завершення  $T_0=40$ .

**Таблиця 13.7**

**Задача комівояжера**

N	1	2	3	4	5
1	-	N; A	60;1	20A;3	5A;5
2	2A;2	-	4A;4	80;9	100;2
3	140;0,2	150;0,8	-	2N;3	70;1
4	40A;1	120;0,3	70;2	-	N;2
5	3N;2	A+6;4	4N;1,5	90;0,5	-

Таблиця 13.8

## Задача комівояжера

N	1	2	3	4	5
1	-	140;0,4	100;0,7	280;0,3	15A;1
2	100;0,4	-	150;0,5	20A;4	80;1
3	4N;1,5	8N;0,8	-	10A;3	70;2
4	2N;7	3N;2	4A;6	-	4N;2A
5	15A;5	90;0,6	60;4	30A;2	-

Тут  $N$  – порядковий номер студента у групі;  $A = \sqrt{N}$ .