11. МЕТОД УРАХУВАННЯ ШЛЯХІВ МІЖ КОРИСТУВАЧАМИ В ТРАНСПОРТНІЙ ЗАДАЧІ

11.1. Мінімізація витрат при обмеженій кількості транспортних засобів у постачальника

Звичайно в транспортній задачі використовуються лише шляхи "постачальник – користувач", а шляхи між користувачами не розглядаються. Пряме використання алгоритму задачі комівояжера в даному випадку неможливе, бо для постачальників вантажу ми не знаємо оптимального розподілу між ними користувачів.

Наприклад, розглядається задача, коли кожний постачальник відправляє весь вантаж лише одним транспортом; цей транспорт може частково розвантажуватись у проміжних користувачів з переміщенням залишкового вантажу до інших користувачів без повернення транспорту до постачальника з пунктів проміжного розвантаження. Тобто кожний постачальник може відправити лише один раз завантажений транспорт і один раз отримати порожній транспорт.

При розв'язанні транспортної задачі отримується кількість транспортів, які повинні бути спрямовані від пунктів постачання незалежно від їх дійсної наявності в цих пунктах: наприклад, може трапитись, що від одного пункту постачальника вимагається відправити три транспорти відповідно у три пункти користувачів. Якщо такої кількості транспорту немає, а є лише один транспорт, то, згідно з моделлю транспортної задачі, треба тричі один і той же транспорт відправляти в окремі рейси з поверненням у пункт постачання (для спрощення вважаємо, що вантаж для одного користувача довозить один транспорт).

Немає відповіді на питання:

1. Як збільшаться витрати, якщо один транспорт за один раз забере весь вантаж з пункту відправки, щоб довезти його до трьох користувачів з використанням проміжних шляхів між користувачами і без повернення після відвідин користувача в пункт призначення?
2. Як оптимально розподілити постачання, якщо з пунктів постачання відправити скорочену кількість транспортів –

наприклад, замість трьох відправити два транспорти?

3.Для мінімізації витрат вантаж може переміщуватись частками по шляхах між користувачами. Тоді виникає питання: на скільки зменшаться витрати, якщо в одному з пунктів користувача відправити вантаж по різних напрямках?

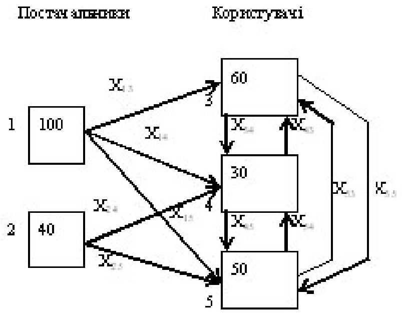

Рис. 11.1. Мережа шляхів транспортної задачі

Тарифи постачання транспортної задачі наведені в табл. 11.1 (*i=1,2* – постачальники; *j=3,4,5* – користувачі; шляхи між користувачами затемнені); поряд з тарифом вказане позначення вантажу $X_{i,j}$ даної комірки ($i \neq j$; *i* – номер постачальника, *j* – номер користувача). Треба враховувати, що $X_{i,j} = X_{j,i}$.

Таблиця 11.1

Тарифи постачання транспортної задачі

		j=3	j=4	j=5
		60	30	50
i=1	100	3; X_{13};	7; X_{14};	2; X_{15};
i=2	40	-	5; X_{24};	8; X_{25};
j=3		-	4; X_{34};	10; X_{35};
j=4		4; X_{43};	-	11; X_{45};
j=5		10; X_{53};	11; X_{54};	-

Слід пам’ятати, що вузлові точки помічаються в даній задачі лише для позначення виконання розвантажувальної або навантажувальної операції. Це означає, що ми завжди обираємо оптимальний (найменший) шлях між двома пунктами з виконанням вантажних операцій. Якщо будь-який такий оптимальний шлях випадково проходить через один або кілька з заданих і вказаних нами пунктів без виконання вантажної операції, то це не вказується в схемі і розглядається лише як додаткова особливість даного шляху, яка не має відношення до розрахунків.

Розглянемо порядок складання математичної моделі такої транспортної задачі.

Программа в MathCAD наведена нижче.

ORIGIN:=1

Функція мети:

F(X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54):=3·X13+7·X14+2·X15…
+5·X24+8·X25+4·X34+10·X35+4·X43+11·X45+10·X53+11·X54

Початкові умови:

X13:=0 X14:=0 X15:=0 X24:=0 X25:=0 X34:=0 X35:=0
X43:=0 X45:=0 X53:=0 X54:=0

GIVEN

Для постачальників зворотний шлях (від користувача до постачальника) не враховується. Усі змінні є додатними. У рівняння входять змінні, які пересікаються горизонтальною лінією, що проходить у табл. 11.1 по рядку постачальника. Напрямок потоку вантажу приймається від першого індексу до другого (наприклад, вантаж X13 спрямований від місця “1” до місця “3”). Усі змінні беруться зі знаком “+”:

X13+ X14+ X15=100
X24+ X25=40

Для користувачів використовуються прямі і зворотні шляхи між вершинами, на відміну від постачальників та шляхів повернення; напрямок потоку вантажу приймається від першого індексу до другого (наприклад, вантаж X54 спрямований від місця “5” до місця “4”, а вантаж X45 – навпаки):

X13+X43+X53-X34-X35=60
X14+X24+X34+X54 – X43 – X45=30
X15+X25+X35+X45 – X53 – X54=50

***Додатність* змінних:**

X13≥ 0 X14≥ 0 X15≥ 0 X24≥ 0 X25≥ 0
X34≥ 0 X35≥ 0 X43≥ 0 X45≥ 0 X53≥ 0 X54≥ 0
P:=Minimize(F,X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54)

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	50	0	50	40	0	0	0	10	0	0	0

$K1:=3 \cdot P_1 + 7 \cdot P_2 + 2 \cdot P_3 + 5 \cdot P_4 + 8 \cdot P_5 + 4 \cdot (P_6 + P_8) + 10 \cdot (P_7 + P_{10}) + 11 \cdot (P_9 + P_{11})$

K1=490

Транспорт *Авто 11* з п. 1 перевозить вантаж *X13=50* в п. 3, а *Авто 12* з п. 1 перевозить вантаж *X15=50* в п. 5.
Транспорт *Авто 2* з п. 2 перевозить вантаж *X24=40* в п. 4, залишає там вантаж 30, а залишок вантажу у вигляді *X43=10* завозить у п. 3.
Як бачимо, отримали різні шляхи з п. 1 (*X13=50* та *X15=50*). Тому з п. 1 треба відправляти два транспорти (*Авто 11* та *Авто 12*). Щоб цього не трапилось, надалі треба ввести обмеження на непотрібні шляхи. Звичайно треба в математичній моделі забороняти шлях з найменшим вантажем. У даному випадку ми відправляємо з п. 1 два однакових вантажі, тому забороняємо будь-який з них. Наприклад, вводимо в математичну модель після рівнянь для користувачів "заборону використання шляху" у вигляді *X15=0*.
В результаті ми знову отримуємо вимоги на два транспорти з п. 1 у вигляді

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	70	30	0	0	40	0	10	0	0	0	0

Витрати при цьому збільшились до *K1=840*.
Знову вводимо в математичну модель після рівнянь для користувачів "заборону використання шляху" у вигляді "*X15=0, X14=0*".
В результаті ми знову отримуємо вимоги на два транспорти з п. 1 у вигляді

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	100	0	0	0	40	30	10	0	0	0	0

Витрати при цьому залишились без зміни – *K1=840*.
З п. 1 *Авто 1* завозить вантаж *X13=100* в п. 3; в п. 3 *Авто 1* залишає вантаж 60; надлишок вантажу *Авто 1* у вигляді *X34=30* завозить в п. 4 та у вигляді *X35=10* завозить в п. 5.
З п. 2 *Авто 2* завозить вантаж *X25=40* в п. 5.
Таким чином, ми бачимо, що в п. 3 знову потрібні два транспорти для перевезення ватажу в п. 4 та п. 5. Щоб заборонити ці два паралельні перевезення, забороняємо до перевезення менший вантаж.
Знову вводимо в математичну модель після рівнянь для користувачів "заборону використання шляху" у вигляді "*X15=0, X14=0, X35=0*".
Внаслідок цього ми отримуємо кінцевий результат моделювання у вигляді

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	100	0	0	0	40	40	0	0	10	0	0

З п. 1 *Авто 1* завозить вантаж *X13=100* в п. 3 і залишає там вантаж *60*; залишений вантаж *X34=40* перевозить в п. 4 і залишає там вантаж *30*; залишений вантаж *X45=10* перевозить в п. 5 і залишає його там.

З п. 2 *Авто 2* завозить вантаж *X25=40* в п. 5 і залишає його там.

Задача розв'язана. Витрати при цьому збільшились до *K1=890*.

Кінцева математична модель в MathCAD має вигляд:

ORIGIN:=1

F(X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54):=3·X13+7·X14…
+2·X15+5·X24+8·X25+4·X34+10·X35+4·X43+11·X45+10·X53+11·X54

Початкові умови:

X13:=0 X14:=0 X15:=0 X24:=0 X25:=0 X34:=0 X35:=0
X43:=0 X45:=0 X53:=0 X54:=0

GIVEN

***Для постачальників*:**

X13+ X14+ X15=100
X24+ X25=40

Для користувачів:

X13+X43+X53-X34-X35=60
X14+X24+X34+X54 – X43 – X45=30
X15+X25+X35+X45 – X53 – X54=50

Діалоговий метод обмеження шляхів:

X15=0 X14=0 X35=0

Додатність змінних:

X13≥ 0 X14≥ 0 X15≥ 0 X24≥ 0 X25≥ 0
X34≥ 0 X35≥ 0 X43≥ 0 X45≥ 0 X53≥ 0 X54≥ 0

P:=Minimize(F,X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54)

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	100	0	0	0	40	40	0	0	10	0	0

$K1:=3\cdot P_1 + 7\cdot P_2 + 2\cdot P_3 + 5\cdot P_4 + 8\cdot P_5 + 4\cdot(P_6 + P_8)\ldots$
$+ 10\cdot(P_7 + P_{10}) + 11\cdot(P_9 + P_{11})$
K1=890

Витрати на повернення транспорту у початкові пункти визначаються після визначення оптимальних шляхів перевезення вантажу.

Повернення транспорту в початкові пункти бажано виконати з відповідним завантаженням, щоб не допускати холостого пробігу транспорту.

Замість описаного підходу можна ускладнити математичну модель введенням у функцію мети додаткових тарифів. Наприклад, для вантажу-шляху *X15* ввести в функцію мети складову у вигляді витрат на перевезення ”*(2+X13+X14)·X15*”, які заборонять шлях X15 у випадку, коли *X13>0* або *X14>0*. Але такий шлях призводить до нелінійності функції мети з наступною необхідністю визначення глобального мінімуму витрат на перевезення.

11.2. Інтенсифікація прибутку

Практика експлуатації транспортного господарства вимагає виконання перевезень однотипного вантажу від пунктів-постачальників до пунктів користувачів з використанням оптимальних шляхів за мінімальний термін за умови отримання максимального прибутку. При цьому вимагається, щоб у деяких проміжних пунктах транспорт або залишив частку вантажу, або частково розвантажився та завантажився, а в кінцевих пунктах розвантажився цілком.

При цьому транспортне господарство знає:

1. Загальну кількість пунктів *i=1… n,* в яких виконуються завантажувальні та розвантажувальні операції. Серед них в пунктах *α=(1… m)* виконуються завантажувальні операції, в пунктах *β=(1… k)* – розвантажувальні операції, в пунктах *γ=(1...p)* – завантажувальні та розвантажувальні операції. При цьому *(m+ k +p)* ≥ *n.* Якщо в проміжних пунктах користувачів відбуваються операції завантаження та розвантаження, то відповідні січення для даної вершини повинні враховувати ці операції.
2. Усі витрати на оформлення вантажу до вивезення (придбання вантажу або собівартість, перевезення у даний пункт; витрати на зв'язок, тару, комплектацію, зберігання, завантаження на транспорт; амортизаційні витрати, документальне оформлення і т.п.) та на розвантаження вантажу в даному пункті (розвантаження, зв'язок, тара, зберігання, амортизаційні $B_C = \sum_{i=1}^{n} B_i$. витрати, документальне

   оформлення і т.п.) $P_C = \sum_{i=1}^{n} P_i$

3. Усі прибутки, пов'язані з перевезенням вантажу у вказані пункти.
4. Загальний час затримки в пунктах у зв'язку з придбанням вантажу, оформленням документів, часу на зв'язок, $T_C = \sum_{i=1}^{n} T_i$. навантаженням, розвантаженням та іншими витратами часу, включаючи продаж

   перевезеного вантажу

Таким чином, залишається лише визначити витрати на перевезення вантажу та загальну кількість годин на експлуатацію транспорту, щоб отримати модель інтенсифікації прибутку для транспортного господарства.

У зв'язку з тим, що значення B_C, P_C, T_C в транспортній задачі є постійними величинами, які не залежать від обраних шляхів переміщення вантажу (однаково усіх користувачів потрібно відвідати і задовольнити їх вимоги з отриманням відповідного прибутку), то для інтенсифікаційної моделі отримання прибутку потрібно лише зменшити витрати на перевезення вантажу при одночасному зменшенні загального часу, витраченого на перевезення. Такі вимоги можна задовольнити при використанні функції мети

$$F_2 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{i,j} T_{i,j} X_{i,j} \to \min, \tag{11.2}$$

Таблиця 11.2

Дані, які введені в таблицю транспортної задачі

№	Найменування	Позначення
1	Витрати на перевезення одиниці вантажу	$A_{i,j}$
2	Час перевезення вантажу комірки	$T_{i,j}$
3	Постачання комірки	$X_{i,j}$

Розміщення даних табл. 11.2 в кожній (*i,j*)-комірці транспортної задачі наведено в табл. 11.3.

Таблиця 11.3

Розміщення даних в (*i,j*)-комірці транспортної задачі

$A_{i,j}$	$T_{i,j}$
$X_{i,j}$	

Дані наведені в табл. 11.4.

Таблиця 11.4

Таблиця транспортної задачі: *i=1,2* – постачальники вантажу 100 та 40; *j=3,4,5* – користувачі вантажу 60, 30, 50

		3	4	5
		60	30	50
1	10 0	3;7; X13	7;0,5; X14	2;3; X15
2	40	-	5;2; X24	8;0,7; X25

Продовження таблиці 11.4

3	60	-	4;1; X34	10;0,1; X35
4	30	4;1; X43	-	11;0,2; X45
5	50	10;0,1; X53	11;0,2; X54	-

Програма в MathCA*D* наведена нижче.

ORIGIN:=1
Функція мети:
$F(X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54):=(3\cdot 7)\cdot X13+(7\cdot 0.5)\cdot X14+(2\cdot 3)\cdot X15+(5\cdot 2)\cdot X24+(8\cdot 0.7)\cdot X25\ldots$
$+(4\cdot 1)\cdot X34+(10\cdot 0.1)\cdot X35+(4\cdot 1)\cdot X43+(11\cdot 0.2)\cdot X45+(10\cdot 0.1)\cdot X53+(11\cdot 0.2)\cdot X54$
Початкові умови:
X13:=0 X14:=0 X15:=0 X24:=0 X25:=0 X34:=0 X35:=0
X43:=0 X45:=0 X53:=0 X54:=0
GIVEN
Постачальники:
X13+ X14+ X15=100
X24+ X25=40
Користувачі:
X13+X43+X53-X34-X35=60
X14+X24+X34+X54 – X43 – X45=30
X15+X25+X35+X45 – X53 – X54=50
Додатність змінних:
$X13\geq 0$ $X14\geq 0$ $X15\geq 0$ $X24\geq 0$ $X25\geq 0$
$X34\geq 0$ $X35\geq 0$ $X43\geq 0$ $X45\geq 0$ $X53\geq 0$ $X54\geq 0$
P:=Minimize(F,X13,X14,X15,X24,X25,X34,X35,X43,X45,X53,X54)

$P^T=$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	0	100	0	0	40	0	0	0	70	60	0

$K1:=3\cdot P_1+7\cdot P_2+2\cdot P_3+5\cdot P_4+8\cdot P_5+4\cdot(P_6+P_8)+10\cdot(P_7+P_{10})+11\cdot(P_9+P_{11})$

Як початкові дані, що дають максимально можливий прибуток при заданих умовах, використовуємо результати, отримані в розділі 11.1:

- витрати $K1_0=890$;
- час $T_0=(7+0,7+1+0,2)=8,9$ (отримаємо по завантажених постачанням комірках та даним табл. 11.4);
- вважаємо прибуток від усіх транспортних операцій рівним $P_0=3500$.

Аналогічні результати розрахунку при інтенсифікації прибутку:

– витрати $K1_I=2390$;
– час $T_I=(0,5+0,7+0,2+0,1)=1,5$;
– вважаємо прибуток від усіх транспортних операцій рівним $P_K= P_0 – (K1_I – K1_0)= 3500\text{-}(2390\text{-}890)=2000$.
– Програмування прибутку показує, що внаслідок скорочення часу експлуатації транспорту можливий прибуток інтенсифікації дорівнює $P_I=[P_0 – (K1_I – K1_0)]\cdot(T_0/ T_I) = (3500\text{-}(2390\text{-}890))^*(8,9/1,5)=17800$, тобто зростає в *17800/3500= 5,09 раза*.

Завдання. Розглянути оптимізацію перевезень у транспортній задачі з урахуванням шляхів між користувачами згідно з даними, наведеними у табл. 11.5. Скласти граф, який з'єднує постачальників та користувачів. Пояснити отримані маршрути. Отримати дані для моделей максимізації та інтенсифікації прибутку.

Таблиця 11.5

Таблиця транспортної задачі: *i=1,2* – постачальники вантажу; *j=3,4,5* – користувачі вантажу; *N* – порядковий номер студента у групі

		3	4	5
		10N	60	40
1	3N+30	N;N; X13	0,5N;0,4; X14	2N;2; X15
2	7N+70	N;5; X23	0,1N;1; X24	0,3N;0,3; X25
3	10N	-	0,2N;2; X34	0,5N;0,3; X35
4	60	0,2N;2; X43	-	10;0,5; X45
5	40	0,5N;0,3; X53	10;0,5; X54	-