# 10. УЗАГАЛЬНЕНИЙ ДІАЛОГОВИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ ТРАНСПОРТНИХ ЗАДАЧ НА БАЗІ УНІВЕРСАЛЬНОЇ МЕРЕЖІ ТРАНСПОРТНОЇ ЗАДАЧІ

## 10.1. Опис універсальної мережі транспортної задачі

**Універсальна** ***мережа транспортної задачі*** має вигляд ***орієнтованого графу*** рис. 10.1 і охоплює такі її випадки: звичайну транспортну задачу, транспортну задачу з врахуванням шляхів між користувачами, транспортну задачу з врахуванням шляхів між користувачами та поверненням транспорту в початкові пункти, лабіринт, задачу комівояжера, орієнтовану та неорієнтовану мережі для визначення найкоротшого шляху між двома пунктами, орієнтовану та неорієнтовану мережі для визначення оптимального об'єму перекачки рідини між двома пунктами.

Наведені нижче конкретні приклади застосування універсальної мережі транспортної задачі повинні розглядатись не з точки зору отримання конкретних переваг щодо існуючого аналізу лабіринту, задачі комівояжера тощо, а лише як доведення працездатності отриманої мережі. Вона, безперечно, має недоліки, які є платою за її універсальність. Разом з тим ця модель дозволяє ефективним чином розглянути звичайну транспортну задачу, транспортну задачу з урахуванням шляхів між користувачами, транспортну задачу з урахуванням шляхів між користувачами та поверненням транспорту в початкові пункти.

***Універсальна мережа транспортної задачі*** у вигляді орієнтованого графу дозволяє з єдиних позицій розглядати різноманітні багатоваріантні машинні експерименти, які застосовуються в системах штучного інтелекту.

Даний орієнтований граф описує й неорієнтований граф. Перевагою орієнтованого графу перед неорієнтованим є можливість

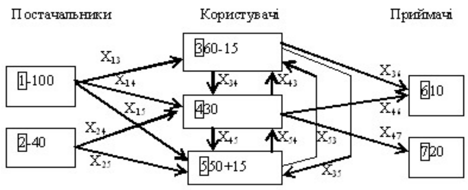


**Рис. 10.1. Універсальна мережа шляхів транспортної задачі**

**Таблиця 10.1**

**Представлення загальної транспортної мережі рис. 10.1 у вигляді матриці: $X_{i,j}$ – вантаж перевезення дугою; $C_{i,j}$ – тариф перевезення дуги; (*i,j*) – адреса комірки; *i=1… n* – номер вершини, звідки виходить вантаж; *j=1… n* – номер вершини, куди входить вантаж**

| | | -100 | -40 | 60-15 | 30 | 50+15 | 10 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| -100 | 1 | - | | $C_{13}$ $X_{13}$ | $C_{14}$ $X_{14}$ | $C_{15}$ $X_{15}$ | | |
| -40 | 2 | | - | | $C_{24}$ $X_{24}$ | $C_{25}$ $X_{25}$ | | |
| 60-15 | 3 | | | - | $C_{34}$ $X_{34}$ | $C_{35}$ $X_{35}$ | $C_{36}$ $X_{36}$ | |
| 30 | 4 | | | $C_{43}$ $X_{43}$ | - | $C_{45}$ $X_{45}$ | $C_{46}$ $X_{46}$ | $C_{47}$ $X_{47}$ |
| 50+15 | 5 | | | $C_{53}$ $X_{53}$ | $C_{54}$ $X_{54}$ | - | | |
| 10 | 6 | | | | | | - | |
| 20 | 7 | | | | | | | - |

Мережу рис. 10.1 можна представити у вигляді матриці табл. 10.1.

1. Вона має один або кілька початків та один або кілька кінців.

2. Дуги, які виходять з початку, спрямовані від початку до сусідніх вершин; до кінця спрямовані дуги від сусідніх вершин; усі інші вершини можуть з'єднуватись між собою, або двома взаємно зустрічними дугами, або однією дугою (якщо один із взаємно зворотних шляхів між вершинами заборонений). Неорієнтована модель транспортних шляхів теж задовольняє цим вимогам.

3. Усі вершини-об'єкти, в яких виконуються транспортні операції, діляться на три умовні групи:

– "постачальників" (від них виходить вантаж);

– "користувачів" (у них вантаж входить і виходить);

– "приймачів" (у них вантаж входить).

Слід зазначити, що в звичайній транспортній задачі існують лише "постачальники" і "приймачі". Нумерація вершин-об'єктів показана в прямокутниках у вигляді цифр 1..7.

4. Транспортна задача розглядається як орієнтований граф з вершинами 1…7, у яких виконуються вантажні операції (завантаження або розвантаження). Вантажі усіх вершин показані цифрами поряд з нумерацією вершин 1…7. Вантаж будь-якої вершини позначається як сума позитивного та негативного числа: якщо вантаж входить у вершину, то він вказується позитивним числом, а якщо виходить з вершини, то негативним. Результуючий вантаж вершини дорівнює підсумку цих двох чисел; якщо підсумок додатній, то він означає підсумковий вантаж, який залишається у вершині, а якщо від'ємний, то означає підсумковий вантаж, який виходить з вершини. Наприклад, вантаж "60" входить у вершину, і одночасно вантаж "-15" виходить з вершини. Результуючий підсумок вантажу такої вершини є додатнім і дорівнює "60-15=45". Сума абсолютних значень усіх негативних підсумків постачальників та користувачів у закритій транспортній задачі повинна дорівнювати сумі позитивних підсумків користувачів та приймачів.

5. Якщо, наприклад, з вершини 3 рис. 10.1 потрібно перевезти вантаж "15" у вершину 5, то у вершині 3 цей вантаж показується з мінусом, а у вершині 5 – з плюсом; процес перевезення цього вантажу "15" між користувачами потрібно забезпечити в діалоговому режимі уточнення роботи транспортної мережі, який є продовженням процесу моделювання. *Прибуток від такої транспортної операції потрібно розраховувати окремо після врахування прибутків від*

## 10.2. Математична модель універсальної мережі транспортної задачі

При складанні опису математичної моделі враховуємо такі особливості універсальної мережі транспортної задачі:

1. Тариф перевезення дуги орієнтованого графу позначається числом $C_{i,j}$, де $i$ – вершина, звідки відходить дуга; $j$ – вершина, куди входить дуга. Взаємно зустрічні дуги можуть мати в загальному випадку різні тарифи. ***Тарифи перевезення $C_{i,j}$ використовуються для складання функції мети або для введення обмежень (у розрахунку максимального потоку)***.

2. По кожній дузі орієнтованого графу може переміщуватись вантаж, який позначається символом $X_{i,j} \geq 0$, що має нульове або додатнє значення ($i$ – вершина, звідки відходить дуга; $j$ – вершина,

куди входить дуга). Змінні $X_{i,j}$ використовуються для складання функції мети; рівностей та нерівностей – обмежень для постачальників, користувачів та приймачів; рівностей та нерівностей у діалоговому режимі. Змінні $X_{i,j}$, дуги яких входять у вершину, позначаються в рівняннях-обмеженнях ліворуч від знаку рівності зі знаком "плюс", а які виходять з вершини – знаком "мінус". Праворуч від знаку рівності вказується підсумковий вантаж у вигляді різниці вантажу, який входить у вершину, та вантажу, що виходить. Наприклад, для вершини 3 з табл. 10.1 отримуємо рівняння

$$X_{14} + X_{24} + X_{34} - X_{43} - X_{45} - X_{46} - X_{47} = 30.$$

Складання цього рівняння для вершини можна виконувати за таким формальним правилом: усі змінні, які пересікаються вертикальною штриховою лінією, проведеною через колонку вершини 3, беруться зі знаком "+"; усі змінні, які пересікаються горизонтальною штриховою лінією, проведеною через рядок вершини 3, беруться зі знаком "–".

3. Добуток $C_{i,j} \cdot X_{i,j}$ використовується у функції мети і визначає "витрати" або "прибуток" на даній дузі в залежності від тлумачення символів $C_{i,j}$ та $X_{i,j}$.

Наприклад:

– якщо розглядається $C_{i,j}$ як тариф за перевезення одиниці продукції, а загальна кількість цієї продукції позначається як $X_{i,j}$, то добуток $C_{i,j} \cdot X_{i,j}$ означає підсумкові витрати транспортної задачі на вказаній дузі; функція мети розглядається як підсумок таких добутків для усієї мережі і спрямовується до мінімуму;

– якщо $C_{i,j}$ – довжина шляху між вершинами, а $X_{i,j}$ може мати значення або "1", або "0", то добуток $C_{i,j} \cdot X_{i,j}$ означає обрану довжину шляху при $X_{i,j}=1$ та заборонену довжину шляху при $X_{i,j}=0$; функція мети розглядається як підсумок таких добутків для всієї мережі і спрямовується до мінімуму;

– в задачі комівояжера $C_{i,j}$ – довжина шляху між вершинами, а $X_{i,j}$ може мати значення або "1", або "0". Значення "перевезеного вантажу" $X_{i,j}$ вважається комівояжером рівним $1$, якщо комівояжер обрав указаний шлях, і рівним $0$, якщо він не обрав цей шлях. Добуток $C_{i,j} \cdot X_{i,j}$ означає обрану довжину шляху при $X_{i,j}=1$ та заборонену довжину шляху при $X_{i,j}=0$; функція мети розглядається як підсумок таких добутків для всієї мережі і спрямовується до мінімуму; для отримання відвідування комівояжером кожного міста лише один раз треба для кожного міста-вершини прирівняти до одиниці підсумок змінних відповідних колонок (вихід з міста) та окремо – прирівняти до одиниці підсумок змінних відповідних рядків (вхід в місто); для отримання зв'язності шляху комівояжера потрібно внести обмеження в діалоговому режимі;

– якщо $C_{i,j}$ – "жаль за втраченим прибутком" за перевезення одиниці продукції, а загальна кількість цієї продукції позначається як $X_{i,j}$, то добуток $C_{i,j}{\cdot}X_{i,j}$ означає підсумковий "жаль за втраченим прибутком" у транспортній задачі на вказаній дузі; функція мети розглядається як підсумок таких добутків і спрямовується до мінімуму;

– якщо $C_{i,j}$ – прибуток за перевезення одиниці продукції, а загальна кількість цієї продукції позначається як $X_{i,j}$, то добуток $C_{i,j}{\cdot}X_{i,j}$ означає підсумковий прибуток транспортної задачі на вказаній дузі; функція мети розглядається як підсумок таких добутків і спрямовується до максимуму;

– якщо $C_{i,j}$ – максимальний можливий потік рідини по даній дузі (максимальна пропускна спроможність шляху), то в математичній моделі треба використовувати обмеження $0 \le X_{i,j} \le C_{i,j}$ , а функція мети повинна максимально збільшити потоки, які входять у перерізи транспортної мережі.

4. Усі вершини-об'єкти, в яких виконуються транспортні операції, діляться на три умовні групи:

– ***"постачальників"*** (від них виходить вантаж); у математичній моделі транспортної задачі в рівнянні для постачальників вільний член (вказаний праворуч від знаку рівності) позначається від'ємним числом і означає вантаж, який виходить з вершини-початку;

– ***"користувачів"*** (у них вантаж входить і виходить); у математичній моделі транспортної задачі в рівнянні для постачальників вільний член (вказаний праворуч від знаку рівності) позначається як різниця між вантажем, що входить у вершину, та вантажем, що виходить з вершини-початку; результуюче додатнє число вказує вантаж, що залишається у вершині, а якщо отримане результуюче число від'ємне – то це вантаж, який виходить з вершини в мережу;

– ***"приймачів"*** (у них вантаж входить); вільний член позначається додатнім числом.

У функцію мети можна вводити додаткові математичні обмеження на використання конкретних вантажів. Таке накладання математичних обмежень на вантажі та шляхи математичної моделі транспортної задачі, яка відноситься до задач лінійного програмування, обумовлює її перехід до ***задач нелінійного програмування з усіма притаманними їм недоліками.***

5. У звичайній транспортній задачі, в транспортній задачі з використанням шляхів між користувачами тощо спочатку при отриманні оптимального режиму не вказуються обмеження щодо кількості транспорту як з вершин постачання, так і з проміжних вершин; уточнення режиму роботи транспортної мережі виконується шляхом обмежень конкретних вантажів дуг в діалоговому режимі, який є продовженням процесу моделювання.

6. Математична модель універсальної мережі транспортної задачі складається з кількох розділів:

– опису функції мети;
– привласнення змінним початкових значень;
– складання функції мети;
– рівняння для постачальників;
– рівняння для користувачів;
– рівняння для приймачів;
– рівності та нерівності-обмеження для змінних;
– мінімізації або максимізації функції мети;
– отримання розрахованих змінних;
– застосування отриманих змінних для подальших розрахунків.

## 10.3. Діалоговий метод оптимізації комбінаторної лабіринтної задачі

Транспортна задача має комбінаторний лабіринтний характер. Отримане рішення згідно з лінійною математичною моделлю універсальної мережі транспортної задачі дає оптимальний і абсолютно точний розподіл постачання при мінімізації витрат з точки зору математики. Але в дійсності на це абсолютно вірне математичне рішення практика перевезення вимагає поставити деякі обмеження.

Наприклад, постачальник змушений коригувати рекомендації початкової ідеальної математичної моделі і застосовувати такі обмеження, які вимагаються практикою:

1) поставляти свій вантаж різним користувачам одним, а не кількома транспортами, з одноразовим виходом з пункту постачання і урахуванням реального використання транспорту на шляхах між користувачами;

2) поставляти свій вантаж одним транспортом з використанням шляхів між користувачами і поверненням його у початковий пункт відправки;
3) коригувати вантажі транспортів отриманого оптимального математичного розподілу через незручність фізичного розділу вантажу; у зв'язку з обмеженістю вантажності існуючих транспортних засобів; у зв'язку з обмеженістю пропускної здатності шляху;
4) не поставляти окремо занадто малий вантаж;
5) не розділяти у проміжних пунктах завезений вантаж на частки, які поставляються різним користувачам різними шляхами (різним транспортом);
6) направити транспорт по невигідному шляху між двома містами через необхідність перевезення між ними вантажу згідно з угодою (з визначенням оптимального шляху на протязі іншої частини шляху, по якому переміщується вантаж);
7) поставляти свій вантаж кількома транспортами з їх поверненням у пункт відправки тощо.

Ці проблеми можна було б розв'язувати математичним шляхом введенням додаткових умов у функцію мети.

Наприклад, якщо ми розглядаємо транспортну задачу по перевезенню вантажів $X_{i,j}$ від двох постачальників до двох користувачів з мінімізацією витрат на перевезення, то функція мети з мінімізацією витрат на перевезення

$$F=C_{1,1}X_{1,1}+ C_{1,2}X_{1,2}+ C_{2,1}X_{2,1}+ C_{2,2}X_{2,2} \rightarrow min \qquad (10.\ 1)$$

може бути описана у вигляді

$$\begin{gathered} F=(C_{1,1} + X_{1,2})X_{1,1}+( C_{1,2}+ X_{1,1})X_{1,2}+ \\ +(C_{2,1}+ X_{2,2})X_{2,1}+ (C_{2,2}+ X_{2,1})X_{2,2} \rightarrow min. \end{gathered} \qquad (10.\ 2)$$

Функція мети (10. 2) забороняє вихід з одного пункту постачання двох транспортів, бо це збільшує тарифи постачання, наприклад, для першого постачальника зі значення $C_{1,1}$ до величини $(C_{1,1} + X_{1,2})$ або зі значення $C_{1,2}$ до величини $(C_{1,2} + X_{1,1})$. Тому транспортна задача буде розв'язуватися при виході з кожного пункту лише одного транспортного засобу.

Але внаслідок введення таких додаткових умов функція мети стає нелінійною з усіма притаманними нелінійному програмуванню недоліками: відсутністю універсального методу розв'язування; наявністю локальних екстремумів; відсутністю гарантії отримання глобального екстремуму; ускладненням отримання рішення.

Як відомо, задачі нелінійного програмування розв'язуються методом множників Лагранжа; за допомогою розгляду умов Куна-Таккера; за допомогою квадратичного програмування (коли функція мети квадратична та вогнута, а всі обмеження лінійні), чисельних методів нелінійної оптимізації (градієнтних, методу Ньютона, методу Девідсона-Флетчера-Пауелла (ДФП), прямих методів пошуку, методів апроксимуючого програмування, методу Зойтендейка, методу проекцій градієнта Розена, методу зведеного градієнту, методу штрафних функцій, методу мінімізації негладких функцій, поліноміального алгоритму лінійного програмування Н. Кормаркара, методу Фіако і Маккорміка, методу Бокса) тощо [1, с. 18].

Запропонований діалоговий метод оптимізації транспортної задачі усуває всі незручності нелінійного програмування, бо задача залишається лінійною. Усі практичні проблеми розв'язуються в діалоговому режимі (який розглядається як продовження процесу моделювання) шляхом ***поступового введення додаткових обмежень у використанні лінійних рівнянь***.

Для цього лінійна математична модель транспортної задачі розв'язується спочатку без додаткових обмежень. Далі, у залежності від отриманого оптимального рішення, вводяться обмеження на отримані конкретні вантажі з метою узгодження перевезення з конкретними вимогами. Такий підхід залишає математичну модель лінійною і дає змогу у діалоговому режимі визначити оптимальний розподіл постачання.

Таким чином, до математичної моделі універсальної мережі транспортної задачі у діалоговому режимі додається окремий ”діалоговий розділ”, який складається з обмежуючих рівностей та нерівностей, що визначені у процесі діалогу з отриманим оптимальним математичним рішенням; по цьому процесу й отримав назву ***діалоговий метод поступового введення додаткових обмежень у використанні лінійних рівнянь***.

Діалоговий метод застосовується, якщо нас не задовольняє з якихось причин ідеальне математичне розв'язання. При цьому в отриману математичну модель ми вводимо додаткові обмеження, які, як правило, ведуть до погіршення оптимізації функції мети (збільшують витрати на перевезення або зменшують прибутки), але, з іншого боку, відповідають практичним реаліям (неможливості розподілу вантажу згідно з отриманим рішенням, відсутності потрібної кількості транспорту тощо).

## 10.4. Приклади використання діалогового методу введення

### 10.4.1. Задача комівояжера

Розглянемо задачу комівояжера за умови мінімізації довжини шляхів. Мережа повинна дозволити комівояжеру з будь-якого одного міста потрапити в будь-яке інше місто. Тобто усі шляхи між містами повинні мати взаємно-зворотні шляхи. Тому мережа повинна мати вигляд мережі користувачів. Звичайно прямі та зворотні довжини шляхів між містами мають однакове значення, але в задачі комівояжера традиційно розглядається загальний випадок, коли ці шляхи неоднакові. Шляхи між містами показані в матриці табл. 10.2.

**Таблиця 10.2**

**Шляхи між містами для задачі комівояжера ($N_j$ – завантаження входів вершин; $M_i$ – завантаження виходів вершин)**

| | $N_j$ | 1 | 1 | 1 | 1 |
|---|---|---|---|---|---|
| $M_i$ | n | 1 | 2 | 3 | 4 |
| -1 | 1 | - | 35<br>X12 | 18<br>X13 | 11<br>X14 |
| -1 | 2 | 20<br>X21 | - | 27<br>X23 | 4<br>X24 |
| -1 | 3 | 3<br>X31 | 8<br>X32 | - | 60<br>X34 |
| -1 | 4 | 50<br>X41 | 10<br>X42 | 12<br>X43 | - |

Математична модель цієї складної *NP*-повної комбінаторної задачі в середовищі MathCAD показана нижче. Взагалі розглянутий нами підхід дозволяє моделювати процес, коли деякі зворотні або прямі шляхи між містами заборонені.

ORIGIN:=0
***Початкові значення змінних***
X12:=0 X13:=0 X14:=0 X21:=0 X23:=0 X24:=0 X31:=0 X32:=0 X34:=0 X:41=0 X42:=0 X43:=0
***Функція мети:***
F(X12,X13,X14,X21,X23,X24,X31,X32,X34,X41,X42,X43):=35·X12…
+18·X13+11·X14+20·X21+27·X23+4·X24+3·X31+8·X32…
+60·X34+50·X41+10·X42+12·X43

GIVEN

***Постачальник – пункт 1***

Пункт 1 відпускає одного комівояжера:

-X12-X13-X14:= – 1

***Приймач – пункт 1***:

Пункт 1 приймає одного комівояжера:

X21+X31+X41=1

***Інші проміжні пункти***

Пункт 2 відпускає одного комівояжера:

-X21-X23-X24=-1

Пункт 2 приймає одного комівояжера:

X12+X32+X42=1

Пункт 3 відпускає одного комівояжера:

-X31-X32-X34=-1

Пункт 3 приймає одного комівояжера:

X13+X23+X43=1

Пункт 4 відпускає одного комівояжера:

-X41-X42-X43=-1

Пункт 4 приймає комівояжера:

X14+X24+X34=1

***Додатність змінних***

$X12\geq 0$ $X13\geq 0$ $X14\geq 0$ $X21\geq 0$ $X23\geq 0$ $X24\geq 0$ $X31\geq 0$ $X32\geq 0$ $X34\geq 0$ $X41\geq 0$ $X42\geq 0$ $X43\geq 0$

***Діалоговий режим (забороняємо шляхи, які створюють цикли з середини і не пов'язані з початком)***

X24=0 X43=0

***Мінімізація функції мети***

P:=Minimize

(F,X12,X13,X14,X21,X23,X24,X31,X32,X34,X41,X42,X43)

$P^T=$

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

***Отримане рішення мінімальної довжини шляху комівояжера:***

$F:=35\cdot P_1+18\cdot P_2+11\cdot P_3+20\cdot P_4+27\cdot P_5+4\cdot P_6+3\cdot P_7+8\cdot P_8+60\cdot P_9\ldots$

$+50\cdot P_1+10\cdot P_{11}+12\cdot P_{12}$

F=51

Розглянемо пояснення виправлень діалогового режиму.

***Крок 1***. Розшифрування $P^T$ при відсутності виправлень діалогового режиму має вигляд

$P^T=$

| | X12 | X13 | X14 | X21 | X23 | X24 | X31 | X32 | X34 | X41 | X42 | X43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |

З аналізу цих рішень випливає, що комівояжер отримав розірваний шлях, який складається з ланцюгів: "*X13-X31*" та "*X24-X41*".

***Крок 2***. Шлях “*X24*” не починається з початкового міста “1”. За цією ознакою ми його забороняємо, тобто вводимо в діалоговий режим “*X24=0*”. В результаті MathCAD видасть наступне рішення, розшифрування якого має вигляд

$P^T=$

| | X12 | X13 | X14 | X21 | X23 | X24 | X31 | X32 | X34 | X41 | X42 | X43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

З аналізу цих рішень випливає, що комівояжер отримав розірваний шлях, який складається з ланцюгів: “*X14-X43-X32*” та “*X21*”.

***Крок 3***. Шлях “*X21*” розірваний з середини, і за цією ознакою ми його забороняємо, тобто вводимо в діалоговий режим “*X21=0*”. В результаті MathCAD видасть наступне рішення, яке є розв’язанням задачі комівояжера:

$P^T=$

| | X12 | X13 | X14 | X21 | X23 | X24 | X31 | X32 | X34 | X41 | X42 | X43 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Цей приклад наведений з метою довести, що універсальна мережа транспортної задачі й охоплює задачу комівояжера

**10.4.2. Вихід з лабіринту**

Мережа лабіринту показана на рис. 10.2, а відповідна матриця наведена в табл. 10.4. В лабіринті п. 1 та п. 2 є входами, а п. 8 та п. 9 – виходами. Припустимо, що ставиться вимога: *Особа 1*, яка зайшла в п. 1 лабіринту, повинна вийти по найкоротшому шляху через вихід п.8, а *Особа 2*, яка зайшла в п. 2 лабіринту, повинна вийти по найкоротшому шляху через вихід п.9. Тоді *Особу 1* ми розглядаємо як вагу “1”, яка переміщується по шляхах лабіринту, а *Особу 2* ми розглядаємо як вагу “2”. Це дає нам змогу розрізняти між собою *Особу 1* та *Особу 2* і вводити відповідне коригування в діалоговому режимі з метою виправлення отриманого математичного рішення і узгодження його з реальністю.

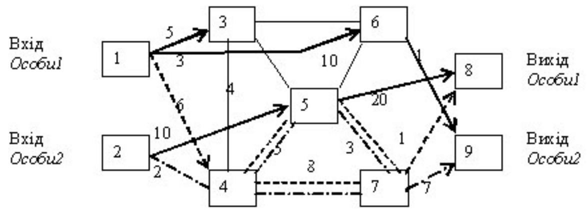


**Рис. 10.2. Лабіринт**

На рис. 10.2 стрілками показані шляхи для постачальників та приймачів, а лініями – зв'язки між користувачами. Пунктирними лініями показаний оптимальний шлях *Особи 1*, а штрих-пунктирними лініями – шлях *Особи 2* (ці оптимальні шляхи ми повинні виявити в результаті моделювання в MathCAD).

**Таблиця 10.3**

**Матриця лабіринту**

| | $N_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_i$ | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| -1 | 1 | - | | 5<br>X13 | 6<br>X14 | | 3<br>X16 | | | |
| -2 | 2 | | - | | 2<br>X24 | 10<br>X25 | | | | |
| 0 | 3 | | | - | 4<br>X34 | 7<br>X35 | 6<br>X36 | | | |
| 0 | 4 | | | 4<br>X43 | - | 5<br>X45 | | 8<br>X47 | | |
| 0 | 5 | | | 7<br>X53 | 5<br>X54 | - | 10<br>X56 | 3<br>X57 | 20<br>X58 | |
| 0 | 6 | | | 6<br>X63 | | 10<br>X65 | - | | | 1<br>X69 |
| 0 | 7 | | | | 8<br>X74 | 3<br>X75 | | - | 1<br>X78 | 7<br>X79 |
| 0 | 8 | | | | | | | | - | |
| 0 | 9 | | | | | | | | | - |

Нижче наведена математична модель в MathCAD розв'язання задачі виходу з лабіринту.

***Початкові значення змінних***

ORIGIN:=1
X13:=0  X14:=0  X16:=0  X24:=0  X25:=0
X34:=0  X35:=0  X36:=0  X43:=0  X45:=0  X47:=0
X53:=0  X54:=0  X56:=0  X57:=0  X58:=0
X63:=0  X65:=0  X69:=0  X74:=0  X75:=0  X78:=0  X79:=0

***Функція мети:***

F(X13,X14,X16,X24,X25,X34,X35,X36,X43,X45,X47,
X53,X54,X56,X57,X58,X63,X65,X69,X74,X75,X78,X79):=5·X13…
+6·X14+3·X16+2·X24+10·X25+4·X34+7·X35+6·X36…
+4·X43+5·X45+8·X47+7·X53+5·X54+10·X56+3·X57+20·X58…
+6·X63+10·X65+1·X69+8·X74+3·X75+1·X78+7·X79

***Виправлення в функції мети "3*X57" та "3*X75" на "34*X57" та "34*X75" забороняє цей шлях; у результаті отримується вірне паралельне рішення. Це доводить можливість отримання багатьох рішень у діалоговому режимі.***
GIVEN
***Постачальники – пункти 1 та 2***
-X13-X16-X14= -1
-X24-X25= – 2
***Користувачі***
X13+X43+X53+X63-X34-X35-X36=0
X14+X24+X34+X54+X74-X43-X45-X47=0
X25+X35+X45+X65+X75-X53-X54-X56-X57-X58=0
X16+X36+X56-X63-X65-X69=0
X47+X57-X74-X75-X78-X79=0
***Приймачі***
X58+X78=1
X69+X79=2
***Додатність змінних***
X13≥ 0  X14≥ 0  X16≥ 0  X24≥ 0  X25≥ 0
X34≥ 0  X35≥ 0  X36≥ 0  X43≥ 0  X45≥ 0  X47≥ 0
X53≥ 0  X54≥ 0  X56≥ 0  X57≥ 0  X58≥ 0
X63≥ 0  X65≥ 0  X69≥ 0  X74≥ 0  X75≥ 0  X78≥ 0  X79≥ 0
***Діалоговий режим***
X36=0   X69=0
P:=minimize(F,X13,X14,X16,X24,X25,X34,X35,X36,X43,X45,X47,
X53,X54,X56,X57,X58,X63,X65,X69,X74,X75,X78,X79)

Розглянемо пояснення виправлень діалогового режиму.

***Крок 1***. Розшифрування $P^T$ при відсутності виправлень діалогового режиму має вигляд

$P^T$=

| | X13 | X14 | X16 | X24 | X25 | X34 | X35 | X36 | X43 | X45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

…

| X47 | X53 | X54 | X56 | X57 | X58 | X63 | X65 | X69 | X74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

…

| X75 | X78 | X79 |
|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 |
| 0 | 1 | 0 |

З аналізу цих рішень випливає, що *Особа 1* перемістилась по шляху *X16=1* і одночасно – по шляху *X36=1*. Цього не може бути. Тому вводимо обмеження

$$X36=0.$$

***Крок 2***. В результаті введеного обмеження *“X36=0”* MathCAD видасть наступне рішення, розшифрування якого має вигляд

$P^T=$

| | X13 | X14 | X16 | X24 | X25 | X34 | X35 | X36 | X43 | X45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 2 |

…

| X47 | X53 | X54 | X56 | X57 | X58 | X63 | X65 | X69 | X74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

…

| X75 | X78 | X79 |
|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 |
| 0 | 1 | 1 |

З аналізу цього рішення випливає, що *Особа 1* перемістилась по шляху: *“X16-X69”* і попала в п. 9, куди не повинна заходити. Тому забороняємо в діалоговому режимі шлях

$$X69=0.$$

***Крок 3***. Отримуємо кінцеве рішення (при *X36=0* та *X69=0*) для розв’язання задачі лабіринту:

$P^T=$

| | X13 | X14 | X16 | X24 | X25 | X34 | X35 | X36 | X43 | X45 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 4 |

…

| X47 | X53 | X54 | X56 | X57 | X58 | X63 | X65 | X69 | X74 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 0 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

…

| X75 | X78 | X79 |
|---|---|---|
| 21 | 22 | 23 |
| 0 | 1 | 2 |

Цей приклад наведений для доведення, що універсальна мережа транспортної задачі охоплює й задачу виходу з лабіринту.

### 10.4.3. Метод максимального потоку в транспортній мережі

У транспортній мережі (рис. 10.3), по якій розраховуються потоки, розрізняються такі елементи:

1. Початок “1”, з якого починається маршрут.
2. Кінець “5”, яким завершується маршрут.
3. Вузли 2, 3, 4 по кількості проміжних станцій. У загальному випадку вузли враховують додаткових постачальників та додаткових користувачів.
4. Шляхи: вони з’єднують вузли, і на них вказується позначення у квадратних дужках [$P_{ij}$, $X_{ij}$], де $P_{ij}$ – максимальна пропускна спроможність шляху між ($i$,$j$)-пунктами, а $X_{ij}$ – величина вантажу, яку можна перевезти. При цьому враховують обмеження по величині потоку $X_{ij}$:

$X_{ij}$ не може перевищувати пропускну спроможність $0 \le X_{ij} \le P_{ij}$;

сумарний потік шляхів, які входять у вузол, дорівнює сумарному потоку, який з нього виходить (за винятком початку “1” та кінця “5”) $\sum x_{ij}^{+} = \sum x_{ij}^{-}$.

Завдання полягає у тому, щоб потоки по дугах створювали максимально можливий загальний потік. Орієнтиром у цьому питанні може бути теорема Форда та Фолкерсона: “Для будь-якої мережі величина потоку з початку “1” у кінець “5” дорівнює мінімальній величині пропускної спроможності розрізу між “1” та “5”. Для контролю завершення розрахунків можна також використовувати теорему Форда та Фолкерсона: максимальний потік дорівнює мінімальній величині пропускної спроможності розрізу між “1” та “5”.

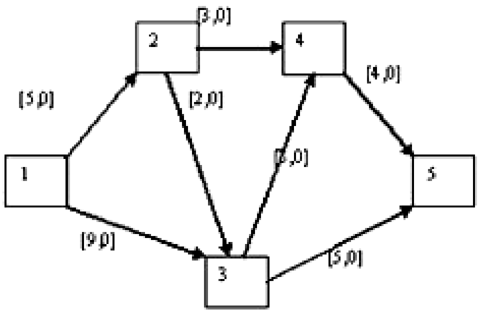


**Рис. 10.3. Початок: пропускна спроможність мережі**

**Таблиця 10.4**

**Матриця мережі для визначення потоків**

| | $N_j$ | 0 | 0 | 0 | 0 | ≤ 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_i$ | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| ≤ 9 | 1 | - | 5 X12 | 9 X13 | - | - |
| 0 | 2 | - | - | 2 X23 | 3 X24 | - |
| 0 | 3 | - | - | - | 3 X34 | 5 X35 |
| 0 | 4 | - | - | - | - | 4 X45 |
| 0 | 5 | - | - | - | - | - |

Математична модель у середовищі MathCAD має наступний вигляд.

***Початкові значення змінних***
ORIGIN:=1
X12:=0 X13:=0 X23:=0 X24:=0 X34:=0 X35:=0 X45:=0
***Функція мети (в дужках вказані січення мережі*).** Січення отримується, якщо визначити перший квадрант із двох взаємно перпендикулярних осей, які пересікаються на діагональному елементі вершини в матриці мережі: тоді усі заповнені комірки, які пересікаються горизонтальною віссю та усі заповнені комірки над цією горизонтальною віссю складають січення. Комірки, які пересікаються вертикальною віссю першого квадранту, до січення не відносяться
F(X12,X13,X23,X24,X34,X35,X45):=(X12+X13)+(X13+X23+X24)…
+(X24+X34+X35)+(X35+X45)
GIVEN
***Постачальники (тут порівняли січення постачальників та користувачів й обрали найменше значення – по приймачах)***
X12+X13≤ 9
***Користувачі***
X12-X23-X24=0
X13+X23-X34-X35=0
X24+X34-X45=0
***Приймачі***
X35+X45≤ 9
***Додатність змінних плюс обмеження по максимальному потоку дуги***
X12≥ 0 X13≥ 0 X23≥ 0 X24≥ 0 X34≥ 0 X35≥ 0 X45≥ 0
X12≤ 5 X13≤ 9 X23≤ 2 X24≤ 3 X34≤ 3 X35≤ 5 X45≤ 4
***Мінімізація функції мети***
P:=Maximize(F,X12,X13,X23,X24,X34,X35,X45)
***Отримали рішення***
$P^T$=(3 6 2 1 3 5 6 )

### 10.4.4. Звичайна транспортна задача

Мережа транспортної задачі наведена на рис. 10.4. Її вершини складаються саме з постачальників та приймачів. Відповідна матриця транспортної задачі наведена в табл. 10.5.

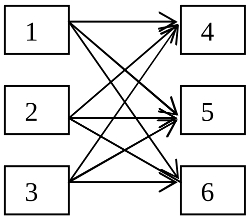


**Рис. 10.4. Звичайна транспортна мережа**

**Таблиця 10.5**

**Матриця транспортної задачі**

| | | 0 | 0 | 0 | 50 | 80 | 120 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| -40 | 1 | - | - | - | 9<br>X14 | 3<br>X15 | 7<br>X16 |
| -60 | 2 | - | - | - | 5<br>X24 | 6<br>X25 | 5<br>X26 |
| -150 | 3 | - | - | - | 4<br>X34 | 2<br>X35 | 9<br>X36 |
| | 4 | - | - | - | - | - | - |
| | 5 | - | - | - | - | - | - |
| | 6 | - | - | - | - | - | - |

Математична модель транспортної задачі в MathCAD наведена нижче.

***Початкові значення змінних***
X14:=0 X15:=0 X16:=0 X24:=0 X25:=0
X26:=0 X34:=0 X35:=0 X36:=0
***Функція мети:***
F(X14,X15,X16,X24,X25,X26,X34,X35,X36):=9·X14+3·X15+7·X16…
+5·X24+6·X25+5·X26+4·X34+2·X35+9·X36
GIVEN
***Постачальники***
-X14-X15-X16=-40
-X24-X25-X26=-60
-X34-X35-X36=-150

***Приймачі***
X14+X24+X34=50
X15+X25+X35=80
X16+X26+X36=120
***Додатність змінних***
X14≥ 0  X15≥ 0  X16≥ 0  X24≥ 0  X25≥ 0
X26≥ 0  X34≥ 0  X35≥ 0  X36≥ 0
***Мінімізація функції мети. Отримання рішення:***
P:= Minimize(F,X14,X15,X16, X24,X25,X26, X34,X35,X36)
$P^T$ =(0  0  40  0  0  60  50  80   20)

***Завдання.*** Накреслити схему шляхів транспортної задачі і розрахувати за діалоговим методом оптимальне постачання за мінімальними витратами на перевезення вантажу згідно з даними табл. 10.6 за умови постачання з пункту 1 двох виділених вантажів для п. 3 та п. 4.

**Таблиця 10.6**

**Представлення загальної транспортної мережі рис. 10.1 у вигляді матриці: $C_{i,j}$ – тариф перевезення дуги (зверху *i,j*- комірки); $X_{i,j}$ – вантаж перевезення дугою (внизу *i,j*-комірки); (*i,j*) – адреса комірки: *i=1… n* – номер вершини, звідки виходить вантаж; *j=1… n* – номер вершини, куди входить вантаж**

| | | -10N | -9N | 8N | 7N | N | N | 2N |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| -10N | 1 | - | | N<br>$X_{13}$ | 10<br>$X_{14}$ | 5<br>$X_{15}$ | | |
| -9N | 2 | | - | | 6<br>$X_{24}$ | 8<br>$X_{25}$ | | |
| 8N | 3 | | | - | 3<br>$X_{34}$ | A<br>$X_{35}$ | 10<br>$X_{36}$ | |
| 7N | 4 | | | N/4<br>$X_{43}$ | - | N/6<br>$X_{45}$ | 20<br>$X_{46}$ | 50<br>$X_{47}$ |
| N | 5 | | | 4<br>$X_{53}$ | N/2<br>$X_{54}$ | - | | |
| N | 6 | | | | | | - | |
| 2N | 7 | | | | | | | - |