

**Миколаївський державний гуманітарний університет  
імені Петра Могили  
комплексу “Києво-Могилянська академія”**

**Кубов В.І.**

**Методи розрахунку розгалужених електричних схем**

**Методичні вказівки до лабораторних  
і практичних занять з електротехніки**

Випуск 29

ББК 32.8  
К 88  
УДК 621.316.31 (075.8)

Рекомендовано до друку Вченою радою МДГУ ім. Петра Могили  
(протокол № 2(34) від 20.10.2005 р.).

**Рецензенти:** **Рябенький В.М.**, д.т.н., професор кафедри ТЕЕС НУК ім. адм. Макарова;  
**Гордєєв Б.М.**, к.т.н., директор, головний конструктор “Advanced Measuring Instruments Company”, доцент кафедри морського приладобудування НУК ім. адм. Макарова.

К 88                    **Кубов В.І.** Методи розрахунку розгалужених електричних схем: Методичні вказівки до лабораторних і практичних занять з електротехніки. – Миколаїв: Вид-во МДГУ ім. Петра Могили, 2005. – Вип. 29. – 32 с.

Наведено вказівки до виконання лабораторних і практичних робіт з розрахунку розгалужених електричних схем постійного струму з лінійними елементами. Практичні роботи виконуються за допомогою інтерактивної навчально-тестуючої програми, шляхом розв’язання тестових завдань, що послідовно ускладнюються. На конкретних прикладах розглянуто найбільш поширені методи розрахунку: узагальнений метод Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів, метод суперпозицій, метод еквівалентного генератора, метод перетворень.

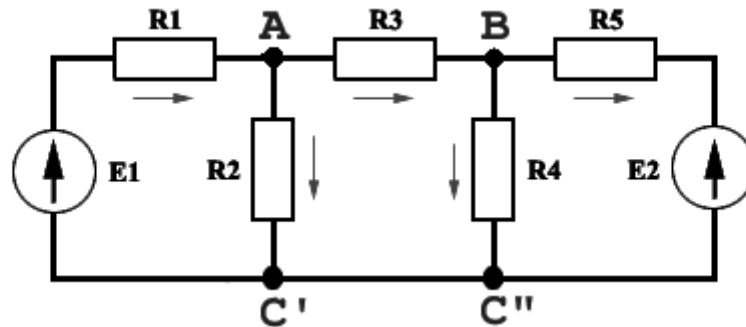
# Зміст

<b>1. Інтерактивна навчально-тестуюча програма</b>	<b>4</b>
<b>1.1. Загальний опис та інструкція до роботи з програмою</b>	<b>4</b>
<b>1.2. Тестові завдання</b>	<b>5</b>
1.2.1. Струм в окремій гілці	5
1.2.2. Напруга на окремому елементі	6
1.2.3. Струм у двох гілках	7
1.2.4. Напруга на двох елементах	7
1.2.5. Знаходження помилки у розрахунках	9
1.2.6. Розрахунок схеми за наведеними значеннями опорів і ЕРС	11
<b>2. Алгоритми розрахунку розгалуженої схеми</b>	<b>12</b>
<b>2.1. Узагальнений метод Кірхгофа</b>	<b>12</b>
2.1.1. Рішення системи рівнянь методом Гаусса	14
<b>2.2. Метод контурних струмів</b>	<b>17</b>
2.2.1. Рішення матричного рівняння за правилом Крамера	19
2.2.2. Рішення шляхом зниження порядку рівняння	20
<b>2.3. Метод вузлових потенціалів</b>	<b>21</b>
2.3.1. Пошук потенціалів з використанням провідності $G$	22
<b>2.4. Метод суперпозицій</b>	<b>23</b>
<b>2.5. Метод еквівалентного генератора</b>	<b>26</b>
<b>2.6. Метод перетворень</b>	<b>29</b>
2.6.1. Перетворення з'єднання “зірка – трикутник” і “трикутник – зірка”	32

# 1. Інтерактивна навчально-тестуюча програма

## 1.1. Загальний опис та інструкція до роботи з програмою

У тестових завданнях розглядається схема, що складається з двох джерел ЕРС  $E_1$ ,  $E_2$  і резисторів  $R_1 - R_5$ .



Елемент	$E_1$	$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$E_2$
Опір $R_n, K\Omega$		<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	
Струм $I_n, mA$		-2	0	<input type="text"/>	1	-3	
Напруга $U_n, V$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Варіантів 1 Помилко 1 Спроб 2

Схема містить три вузли  $A$ ,  $B$ ,  $C$  і п'ять гілок. Елементами схеми  $R_n$  тече струм  $I_n$ , і на кожному елементі падає напруга  $U_n$ . Тут індекс  $n$  відповідає номеру резистора. Стрілками на схемі позначені умовні напрямки струмів  $I_n$ . Фактичні напрямки струмів можуть відрізнятися від позначених. У таких випадках у значенні струму з'являється знак мінус. Падіння напруг  $U_n$  наведені щодо умовних напрямків струмів, від "+" до "-". Для певних значень резисторів і ЕРС у схемі будуть текти відповідні струми і будуть падати відповідні напруги.

У тестових завданнях пропонується знайти і занести до певних комірок наведеної форми відсутні дані. Для виконання завдання потрібно знати і використовувати закони Кірхгофа для розгалуженої електричної схеми. Завдання складається з кількох етапів, рівня складності, який поступово збільшується. З кожним наступним етапом збільшується кількість невідомих і ускладнюється завдання. На останньому етапі треба розрахувати струми і напруги схеми за наданими значеннями опорів і ЕРС.

На кожному з етапів роботи треба заповнити необхідні поля форми, а для перевірки натиснути кнопку "Перевірка". Програма перевіряє відповідність занесених до форми даних і надає відповідне діагностичне повідомлення. Перевірка з незаповненим полем форми вважається помилкою. Кнопкою "Наступний варіант" можна обрати ще декілька варіантів. Варіанти генеруються з випадковими чисельними значеннями, але значення обираються так, щоб розрахунки не виходили за межі цілочисельних обчислень.

Завдання складається з декількох етапів. Тому, хто тестується, пропонується домогтися безпомилкового виконання декількох варіантів підряд для кожного з етапів завдання.

Програма тестування веде протокол проходження окремих етапів роботи. Програма рахує кількість розглянутих варіантів одного завдання, кількість помилок, кількість спроб. Протокол персоналізується за реєстраційним ім'ям користувача у мережі. Цей протокол може бути перевірено викладачем для загальної оцінки роботи під час роботи або через деякий час після виконання роботи. Програма тестування реалізована у вигляді інтерактивного HTML-документа мовою JavaScript. Протокол роботи фіксується у файлі Cookie. Результати виконання етапу роботи фіксуються під час закриття сторінки з відповідним етапом роботи. Якщо оновити або

закрити, а потім знову відкрити відповідний HTML-документ, лічильники варіантів і помилок зануляються. Але загальна кількість підходів до розв'язання завдання кожного з етапів не знищується.

Навігація окремими етапами роботи виконується з головної сторінки тесту. Для переходу до певного етапу завдання треба клацнути на його назві на сторінці.

## 1.2. Тестові завдання

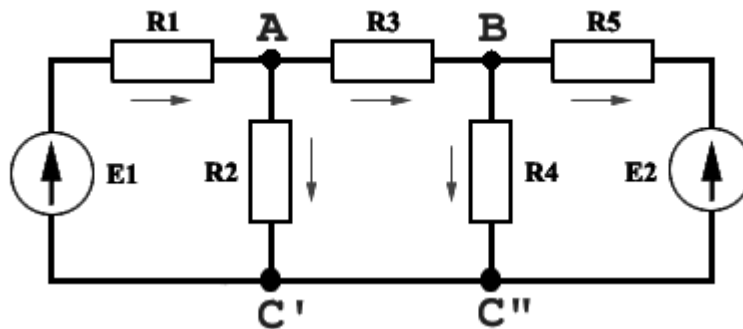
Завдання складається з декількох етапів рівня складності, який поступово збільшується:

- Струм в окремій гілці
- Напруга на окремому елементі
- Струм у двох гілках
- Напруга на двох елементах
- Знаходження помилки у розрахунках
- Розрахунок схеми за наведеними значеннями опорів і ЕРС.

Нижче наведено приклади завдань окремих етапів роботи і приклади розв'язання задач цих завдань.

### 1.2.1. Струм в окремій гілці

Використовуючи закон Кірхгофа відносно струмів у вузлах схеми, знайти струм в окремій гілці:



Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n$ , КΩ							
Струм $I_n$ , mA		-2	0		1	-3	
Напруга $U_n$ , V							

У цьому прикладі треба знайти струм опору  $R_3$ .

За першим законом Кірхгофа алгебраїчна сума струмів у вузлах схеми дорівнює нулю. Або сума струмів, втікаючих до вузла, дорівнює сумі струмів, витікаючих з вузла.

Для визначення невідомого струму можна розглянути струми вузла **A** або вузла **B**.

Для вузла **B**, урахувавши позначені напрямки струмів – до вузла або від вузла, маємо: сума втікаючих струмів –  $I_3$ , дорівнює сумі витікаючих струмів –  $I_4$  і  $I_5$ :

$$I_3 = I_4 + I_5.$$

Підставляючи відомі значення струмів  $I_4$  і  $I_5$  до цього рівняння, отримаємо:

$$I_3 = 1 + (-3) = -2,$$

тобто  $I_3 = -2\text{mA}$ .

Ми отримуємо той самий результат, якщо розглянемо струми відносно вузла **A**:  
 Втікаючі струми –  $I_1$ , витікаючі струми –  $I_2$  і  $I_3$ :

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad (-2) = 0 + I_3; \quad I_3 = -2.$$

Таким чином, ми розв'язали задачу.

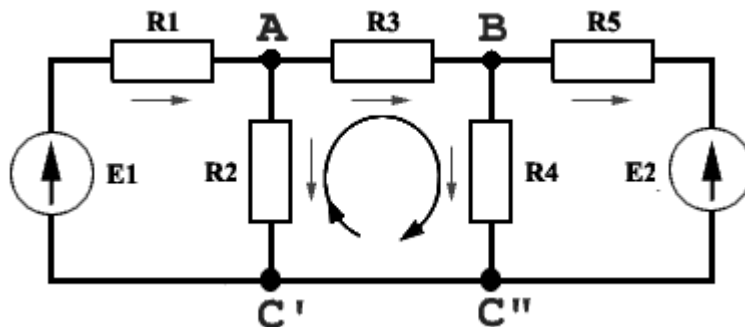
## 1.2.2. Напряга на окремому елементі

Використовуючи закон Кірхгофа відносно напруг уздовж замкненого контура, знайти напругу на окремому елементі.

Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, K\Omega$							
Струм $I_n, mA$							
Напряга $U_n, V$	1	0	1		3	-4	7

За другим законом Кірхгофа сума падінь напруги на окремих елементах дорівнює сумі ЕРС вздовж замкненого контура. При врахуванні знаків падінь напруги і ЕРС треба обов'язково звертати увагу на взаємну орієнтацію умовних напрямків струмів, ЕРС і напрямком обходу контура.

Щоб розв'язати задачу, перш за все треба обрати контур, що включає у себе потрібний елемент (опір  $R_3$ ), і позначити напрямки обходу контура, вздовж якого ми будемо рахувати напруги:



Оберемо, наприклад, контур  $R_2, R_3, R_4$  і оберемо напрямком за напрямком руху стрілки годинника. Цей контур не має у своєму складі жодної ЕРС, тому сума ЕРС дорівнює нулю.

Треба враховувати, що для  $R_2$  напрямком струму і напрямком обходу протилежні, тому напругу  $U_2$  треба брати зі знаком мінус. Отже, маємо:

$$0 = -U_2 + U_3 + U_4.$$

Підставляючи відомі напруги, отримуємо:

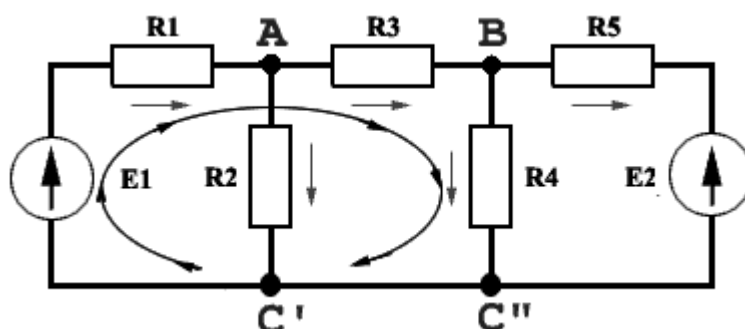
$$0 = -1 + U_3 + 3.$$

Перегруповуючи члени рівняння, отримуємо:

$$0 - (-1) - 3 = U_3; \quad U_3 = -2.$$

Тобто  $U_3 = -2 V$ .

Можна обрати інший контур, наприклад, контур  $E_1, R_1, R_3, R_4$ :



Для цього контура маємо:

$$E1 = U1 + U3 + U4; \quad 1 = 0 + U3 + 3,$$

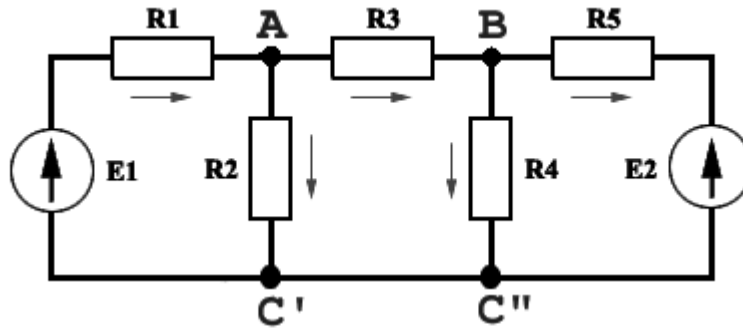
тобто

$$1 - 0 - 3 = U3; \quad U3 = -2.$$

Так само отримали  $U3 = -2 \text{ V}$ .

### 1.2.3. Струм у двох гілках

Використовуючи закон Кірхгофа відносно струмів у вузлах схеми, знайти струм у двох гілках:



Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, \text{K}\Omega$							
Струм $I_n, \text{mA}$			0		1	-3	
Напруга $U_n, \text{V}$							

Тут невідомі струми  $I1$  і  $I3$ . У цьому прикладі важливе значення має послідовність, за якої обираються вузли. Ми не можемо почати з вузла А, бо для нього невідомо відразу два струми. Тому почнемо з вузла В.

Для вузла В втікаючі струми  $I3$ , витікаючі струми  $I4$ ,  $I5$ . Отже, маємо:

$$I3 = I4 + I5; \quad I3 = 0 + (-3); \quad I3 = -2.$$

Отримане значення  $I3$  тепер можна використати для розрахунків у вузлі А.

Для вузла А втікаючі струми  $I1$ , витікаючі струми  $I2$ ,  $I3$ . Отже, маємо:

$$I1 = I2 + I3; \quad I1 = 1 + (-2); \quad I1 = -1.$$

Таким чином, ми розв'язали задачу:

$$I1 = -1 \text{ mA}, \quad I3 = -2 \text{ mA}.$$

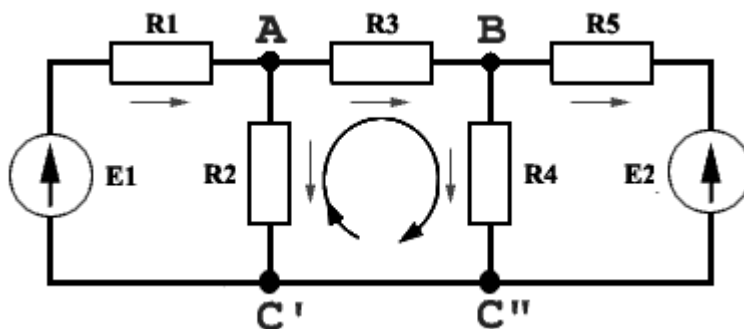
### 1.2.4. Напруга на двох елементах

Використовуючи закон Кірхгофа відносно напруг вздовж замкненого контура, знайти напругу або ЕРС на двох елементах:

Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, K\Omega$							
Струм $I_n, mA$							
Напруга $U_n, V$	1	0	1		3	-4	

У цьому прикладі невідома напруга  $U_3$  і ЕРС  $E_2$ .

Для розрахунку напруги  $U_3$  оберемо контур  $R_2, R_3, R_4$  і оберемо напрямок за напрямком руху стрілки годинника.



Обраний контур не має у своєму складі жодної ЕРС, тому сума ЕРС дорівнює нулю.

Треба враховувати, що для  $R_2$  напрямок струму і напрямок обходу протилежні, тому напругу  $U_2$  треба брати зі знаком мінус. Отже, маємо:

$$0 = -U_2 + U_3 + U_4.$$

Підставляючи відомі напруги, отримуємо:

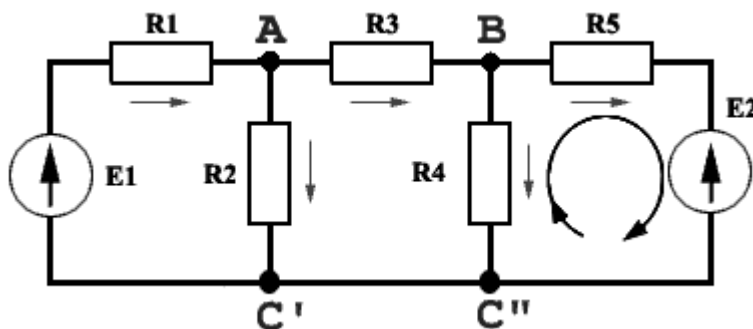
$$0 = -1 + U_3 + 3.$$

Перегруповуючи члени рівняння, отримуємо:

$$0 - (-1) - 3 = U_3; \quad U_3 = -2.$$

Тобто  $U_3 = -2 \text{ V}$ .

Для розрахунку ЕРС  $E_2$  оберемо контур  $R_4, R_5, E_2$  і оберемо напрямок за напрямком руху стрілки годинника.



Обраний контур має у своєму складі ЕРС  $E_2$ , але треба враховувати, що для  $E_2$  напрямок ЕРС і напрямок обходу протилежні, тому ЕРС  $E_2$  треба брати зі знаком мінус. Крім того, для  $R_4$  напрямок струму і напрямок обходу протилежні, тому напругу  $U_4$  треба брати зі знаком мінус. Отже, маємо:

$$-E_2 = -U_4 + U_5.$$

Підставляючи відомі напруги, отримуємо:

$$-E_2 = -3 + (-4); \quad -E_2 = -7; \quad E_2 = 7.$$

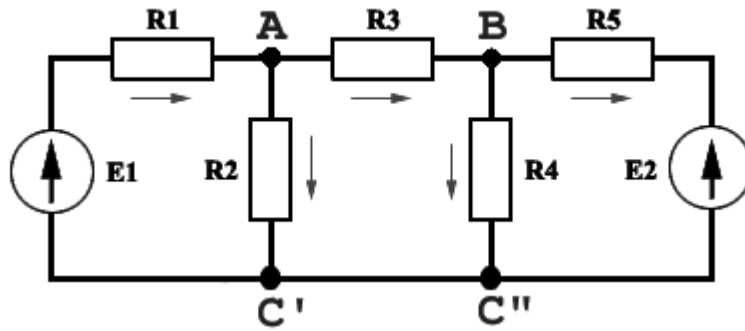
Тобто  $E_2 = 7 \text{ V}$ .

Таким чином, маємо  $U_3 = -2 \text{ V}$ ,  $E_2 = 7 \text{ V}$ .



## 1.2.5. Знаходження помилки у розрахунках

Треба визначити елемент схеми з хибними значеннями струмів і напруг. Відомо, що такий елемент на схемі тільки один. Тобто помилка є тільки в одному стовпчику форми.



Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, K\Omega$		1	1	2	1	1	
Струм $I_n, mA$		-1	-2	1	-4	-5	
Напруга $U_n, V$	-3	-1	-2	2	-4	-5	-9

Задача знаходження помилки є досить складною, бо треба перевірити одночасно багато умов.

1. Перевіряємо, що для усіх елементів виконуються закони Ома:  $U = I \cdot R$ :

$$U_1 = I_1 \cdot R_1; \quad -1 = -1 \cdot 1; \quad -1 = -1 \quad \text{— вірно}$$

$$U_2 = I_2 \cdot R_2; \quad -2 = -2 \cdot 1; \quad -2 = -2 \quad \text{— вірно}$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3; \quad 2 = 1 \cdot 2; \quad 2 = 2 \quad \text{— вірно}$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4; \quad -4 = -4 \cdot 1; \quad -4 = -4 \quad \text{— вірно}$$

$$U_5 = I_5 \cdot R_5; \quad -5 = -5 \cdot 1; \quad -5 = -5 \quad \text{— вірно}$$

Отже, для всіх елементів виконуються закони Ома.

Спроба знайти помилку за законами Ома виявилася невдалою.

2. Спробуємо знайти помилку, користуючись струмами у вузлах.

Для вузла **A** маємо:

$$I_1 = I_2 + I_3; \quad -1 = -2 + 1; \quad -1 = -1 \quad \text{— вірно.}$$

Для вузла **B** маємо:

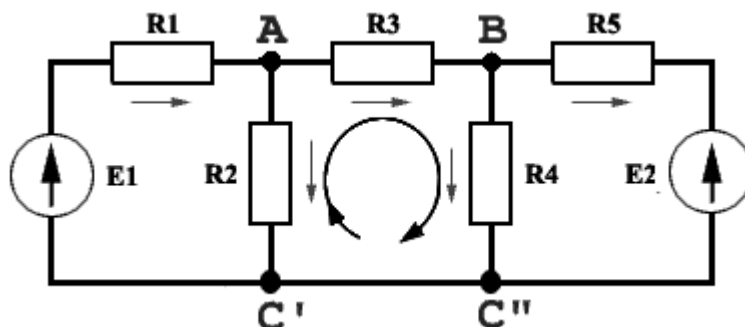
$$I_3 = I_4 + I_5; \quad 1 = -4 - 5; \quad 1 = -9 \quad \text{— невірно.}$$

Отже, маємо помилку у вузлі **B**.

Припустимо, що значення  $I_1, I_2, I_3$  вірні, тоді хибне значення  $I_4$  або  $I_5$ .

3. Щоб визначити, де саме знаходиться помилка, спробуємо використати напруги у контурах.

Розглянемо контур **R2, R3, R4**. Будемо обходити цей контур вздовж руху годинникової стрілки.



Обраний контур не має у своєму складі жодної ЕРС, тому сума ЕРС дорівнює нулю.

Треба враховувати, що для  $R_2$  напрямок струму і напрямок обходу протилежні, тому напругу  $U_2$  треба брати зі знаком мінус.

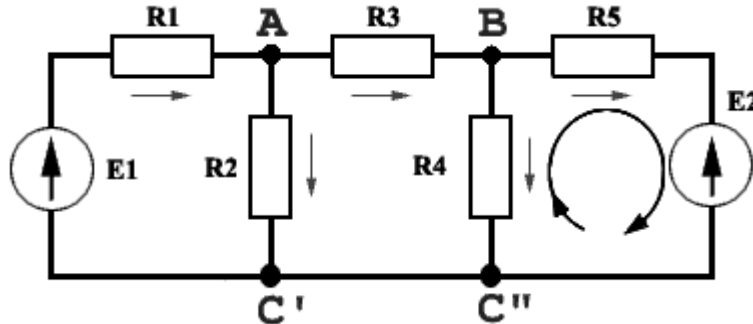
Отже, маємо:

$$0 = -U_2 + U_3 + U_4; \quad 0 = -(-2) + 2 + (-4); \quad 0 = 0 - \text{вірно.}$$

Тобто можливо, що струми і напруги елемента  $R_4$  вірні, а невірні дані для  $R_5$ .

Перевіримо це припущення.

Розглянемо контур  $R_4, R_5, E_2$  і оберемо напрямок за напрямком руху стрілки годинника.



Обраний контур має у своєму складі ЕРС  $E_2$ , але треба враховувати, що для  $E_2$  напрямок ЕРС і напрямок обходу протилежні, тому ЕРС  $E_2$  треба брати зі знаком мінус. Крім того, для  $R_4$  напрямок струму і напрямок обходу протилежні, тому напругу  $U_4$  треба брати зі знаком мінус.

Отже, маємо:

$$-E_2 = -U_4 + U_5; \quad -(-9) = -(-4) + (-5); \quad 9 = -1 - \text{невірно.}$$

Тобто, дійсно, помилка у контурі з  $R_5$ .

4. Виправимо помилку для елемента  $R_5$ , користуючись струмом у вузлі  $B$ .

Маємо:

$$I_3 = I_4 + I_5; \quad 1 = -4 + I_5; \quad 5 = I_5.$$

Тобто  $I_5 = 5 \text{ mA}$ .

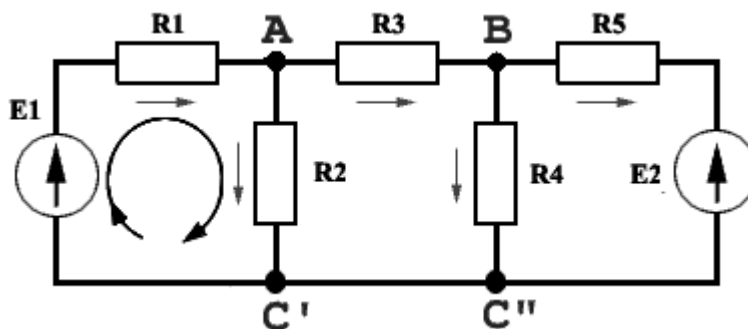
За законом Ома  $U_5 = I_5 \cdot R_5 = 5 \cdot 1 = 5$ . Тобто  $U_5 = 5 \text{ V}$ .

5. Перевіримо напруги у контурі  $R_4, R_5, E_2$ .

Маємо:

$$-E_2 = -U_4 + U_5; \quad -(-9) = -(-4) + 5; \quad 9 = 9 - \text{вірно.}$$

6. Про всяк випадок перевіримо напруги у контурі  $E_1, R_1, R_2$ .



Обраний контур має у своєму складі ЕРС  $E_1$ . Напрямки ЕРС і струмів однакові з напрямком обходу контуру.

Отже, маємо:

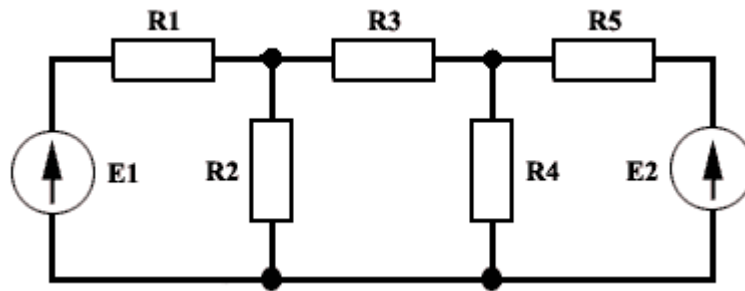
$$E_1 = U_1 + U_2; \quad -3 = (-1) + (-2); \quad -3 = -3 - \text{вірно.}$$

Ми переконались, що для виправлених даних виконуються закони Ома і Кірхгофа.

Таким чином, дані для елемента  $R_5$  були хибні. Вірні значення  $I_5 = 5 \text{ mA}$ ,  $U_5 = 5 \text{ V}$ .

## 1.2.6. Розрахунок схеми за наведеними значеннями опорів і ЕРС

Треба розрахувати струми  $I_n$  і напруги  $U_n$  у розгалуженій схемі за наведеними значеннями опорів  $R_n$  і ЕРС  $E_k$ .



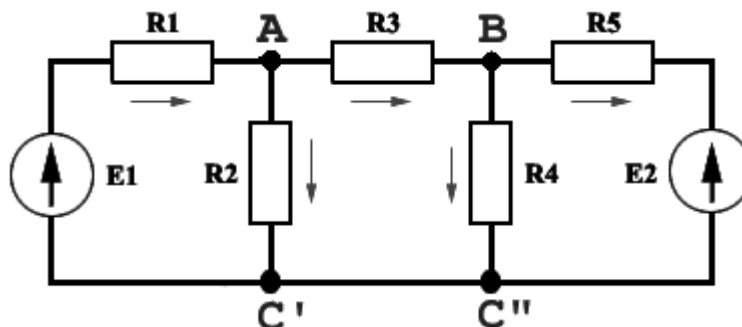
Приклад варіанту завдання наведено у наступній формі:

Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n$ , К $\Omega$		1	1	2	1	1	
Струм $I_n$ , mA							
Напруга $U_n$ , V	-3						-9

Тут відомі ЕРС  $E_1$ ,  $E_2$  і опори  $R_1$ - $R_5$ .

Для полегшення перевірки на тестовій сторінці додано кнопки “Зберегти останній варіант” і “Відновити останній збережений варіант”. Користуючись цими кнопками, можна зберегти варіант завдання, а потім відновити його для наступної перевірки.

Треба мати на увазі, що знаки напруг і струмів залежать від обраних напрямків струмів. Щоб уникнути невизначеності, перше, з чого треба почати розв’язання задачі, – позначити умовні напрямки струмів на схемі.



На схемі наведено приклад умовних позначень напрямків струмів  $I_n$ . Саме відносно цих напрямків перевіряються знаки у рішенні задачі. Тому бажано використовувати саме ці напрямки. Або використовувати свої напрямки, але під час перевірки привести знаки струмів і напруг до позначених на схемі напрямків. Фактичні напрямки струмів можуть відрізнятися від позначених. У таких випадках у значенні струму з’являється знак мінус. Падіння напруг  $U_n$  наведені щодо умовних напрямків струмів, від “+” до “-”.

У наступних розділах розглянуто декілька алгоритмів розрахунку розгалужених схем.

Після того, як буде знайдено невідомі струми і напруги, **обов’язково перевірте** отримане рішення на відповідність законам Кірхгофа:

- суми вхідних і вихідних струмів у вузлах;
- суми напруг і ЕРС вздовж контурів. Не забувайте про вплив відносних напрямків струму, напрямку обходу контуру на знаки напруг і ЕРС.

Маючи впевненість у безпомилковості отриманого рішення, маєте можливість підставити розраховані значення до форми і виконати остаточну перевірку рішення, натиснувши кнопку “Перевірка”.

**Попередження:** Невідповідність напрямків струмів напрямкам, позначеним на схемі завдання, може призвести до хибних знаків напруг і струмів. Тому треба бути особливо уважним з визначенням напрямків і відповідних знаків.

---

## 2. Алгоритми розрахунку розгалуженої схеми

Для розрахунків розгалужених схем найбільш поширені наступні алгоритми (методи):

1. Узагальнений метод Кірхгофа.
2. Метод контурних струмів.
3. Метод вузлових потенціалів.
4. Метод суперпозицій або накладень.
5. Метод еквівалентного генератора.
6. Метод перетворень.

Доцільність використання певного методу залежить від конкретної схеми і від того, що саме відомо, а що невідомо.

Особливості розрахунків схеми переліченими алгоритмами розглянуто у наступних розділах.

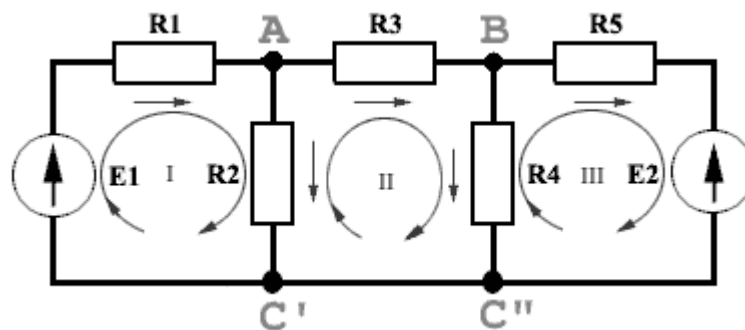
---

### 2.1. Узагальнений метод Кірхгофа

Цей метод найбільш універсальний, але й найбільше “працездатний”. Вимагає рішення системи великої кількості рівнянь.

1. Проаналізуємо топологію схеми.

Позначимо вузли схеми. Схема містить три вузли А, В, С і п'ять гілок. Вузол С умовно розділений на два вузли С' і С'', але електрично це один вузол.



Кількість невідомих струмів відповідає кількості гілок схеми (5 гілок). Для струмів у вузлах можна скласти 2 рівняння (3 вузли – 1 = 2 рівняння). Рівняння струмів для третього вузла може бути отримане із двох інших і тому не підходить для складання системи рівнянь. Необхідно ще 3 рівняння (5 невідомих – 2 рівняння = 3 рівняння). Візьмемо 3 відсутні рівняння з рівнянь для напруг і ЕРС вздовж контурів.

2. Позначимо умовні напрямки струмів  $I_n$  у гілках схеми (стрілки).

3. Позначимо внутрішні контури (колові лінії).

Тут позначено три контури: “I” – E1, R1, R2; “II” – R2, R3, R4; “III” – R4, R5, E2.

4. Позначимо умовні напрямки обходу внутрішніх контурів (колові стрілки).

5. Складемо рівняння Кірхгофа для струмів у вузлах схеми. Сума струмів, що втікають у вузол, дорівнює сумі струмів, що витікають із вузла (ліворуч – що втікають струми, праворуч – що витікають):

$$\text{Вузол А: } I_1 = I_2 + I_3;$$

$$\text{Вузол В: } I_3 = I_4 + I_5.$$

Тут струм  $I_n$  відповідає струму резистора  $R_n$ .

6. Складемо рівняння для падінь напруг  $U_n$  на резисторах  $R_n$  і ЕРС  $E_1, E_2$ . Сума падінь напруг на елементах схеми дорівнює сумі ЕРС вздовж замкненого контуру. Падіння напруги  $U_n = I_n \cdot R_n$  будемо брати зі знаком “+”, якщо напрямок струму збігається з напрямком обходу, і зі знаком “-”, якщо не збігається. Аналогічно зробимо зі знаком ЕРС “+”, якщо напрямок ЕРС збігається з напрямком обходу, і “-”, якщо не збігається.

$$\text{Контур “І”}: E_1 = U_1 + U_2$$

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2$$

$$\text{Контур “ІІ”}: 0 = -U_2 + U_3 + U_4$$

$$0 = -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4$$

$$\text{Контур “ІІІ”}: -E_2 = U_1 + U_2$$

$$-E_2 = I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5$$

7. Складемо систему рівнянь, перегрупуємо й упорядкуємо члени рівнянь:

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0;$$

$$I_3 - I_4 - I_5 = 0;$$

$$I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 = E_1$$

$$-I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 = 0;$$

$$I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 = -E_2.$$

8. Розв’яжемо цю систему щодо невідомих струмів  $I_n$ .

## Рішення системи рівнянь

8.1. Уявимо систему рівнянь у нормалізованому вигляді:

$$1 \cdot I_1 + (-1) \cdot I_2 + (-1) \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = 0;$$

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 + (-1) \cdot I_4 + (-1) \cdot I_5 = 0;$$

$$R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = E_1;$$

$$0 \cdot I_1 + (-R_2) \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 = 0;$$

$$0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + (-R_4) \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 = -E_2.$$

8.2. Одержали матричне рівняння:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -R_4 & R_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ -E_2 \end{pmatrix}$$

8.3. Існує кілька методів рішення матричних рівнянь:

### 8.3.1. Рішення матричного рівняння за правилом Крамера

Рішення рівняння  $|A| \cdot X = B$  шукається у вигляді  $X_n = D_n/D$ ; де  $n=1, 2, 3, 4, 5$ .

$D$  – визначник матриці  $|A|$ ;

$D_n$  – визначник матриці, що отримана заміною стовпця  $|A_n|$  матриці  $|A|$  на стовпець  $|B|$ .

Ручне обчислення визначника матриці вище третього порядку є не дуже простим завданням.

### 8.3.2. Рішення шляхом зниження порядку рівняння

Одне з невідомих  $X_n$  позначається через інші невідомі шляхом рішення певного рівняння відносно  $X_n$ .

Отримане рівняння підставляється в інші рівняння замість  $X_n$ , що дає систему з меншим числом рівнянь і меншим числом невідомих.

Порядок системи рівнянь знижується доти, доки отриману систему не вдасться вирішити.

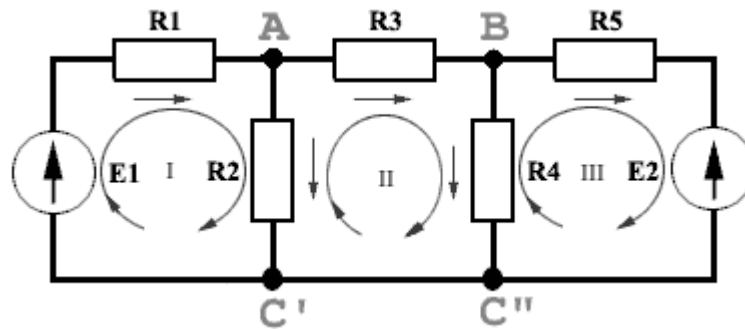
### 8.3.3. Рішення методом Гаусса

Цей метод полягає у послідовному перетворенні матриці, що відповідає рівнянню до діагонального вигляду. Саме цей метод найбільш доцільно використовувати для нашого рівняння з 5 невідомими.

Цей метод розглянуто у наступному розділі.

## 2.1.1. Рішення системи рівнянь методом Гаусса

Розглянемо завдання розрахунку струмів і напруг для схеми.



З наступними вхідними даними:

Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, K\Omega$		2	1	1	1	1	
Струм $I_n, mA$							
Напруга $U_n, V$	7						-4

Маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 - I_3 &= 0; \\
 I_3 - I_4 - I_5 &= 0; \\
 I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot R_2 &= E_1; \\
 -I_2 \cdot R_2 + I_3 \cdot R_3 + I_4 \cdot R_4 &= 0; \\
 I_4 \cdot R_4 + I_5 \cdot R_5 &= -E_2.
 \end{aligned}$$

У нормалізованому вигляді:

$$\begin{aligned}
 1 \cdot I_1 + (-1) \cdot I_2 + (-1) \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 &= 0; \\
 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 1 \cdot I_3 + (-1) \cdot I_4 + (-1) \cdot I_5 &= 0; \\
 R_1 \cdot I_1 + R_2 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + 0 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 &= E_1; \\
 0 \cdot I_1 + (-R_2) \cdot I_2 + R_3 \cdot I_3 + R_4 \cdot I_4 + 0 \cdot I_5 &= 0; \\
 0 \cdot I_1 + 0 \cdot I_2 + 0 \cdot I_3 + (-R_4) \cdot I_4 + R_5 \cdot I_5 &= -E_2.
 \end{aligned}$$

Завданню відповідає наступна поширена матриця:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \mathbf{R1} & \mathbf{R2} & 0 & 0 & 0 & \mathbf{E1} \\ 0 & -\mathbf{R2} & \mathbf{R3} & \mathbf{R4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{R4} & \mathbf{R5} & -\mathbf{E2} \end{array} \right|$$

Для рішення цієї системи застосуємо метод Гаусса – метод послідовного виключення невідомих. Для зручності підставимо конкретні значення. При цьому стежимо за збереженням розмірностей членів для окремих рядків  $\{K\Omega \cdot mA = V\}$ :

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \end{array} \right|$$

Шляхом перестановки рядків перетворимо матрицю (наскільки це можливо) до трапецієподібного вигляду:

$$\begin{array}{l} (1) \\ (4) \\ (2) \\ (5) \\ (3) \end{array} \left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right|$$

Для перетворення останнього рядка віднімемо з нього перший рядок, множений на 2:

$$\begin{array}{l} - \\ = \end{array} \left| \begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 7 \end{array} \right|$$

Далі, віднімемо другий рядок, множений на -3:

$$\begin{array}{l} - \\ = \end{array} \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 3 & 2 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 7 \end{array} \right|$$

Далі, віднімемо третій рядок, множений на 5:

$$\begin{array}{l} - \\ = \end{array} \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 \end{array} \right|$$

Далі, віднімемо четвертий рядок, множений на -8:

$$\begin{array}{l} - \\ = \end{array} \left| \begin{array}{ccccc|c} 0 & 0 & 0 & 8 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 13 & 39 \end{array} \right|$$

І поділимо рядок на 13. Одержимо:

$$\left| 00001 \mid 3 \right|$$

Підставимо перетворений рядок у вихідну матрицю:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

Тепер приведемо отриману матрицю до діагонального вигляду. Із четвертого рядка віднімемо п'ятий і помножимо рядок на -1:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

До третього рядка додамо четвертий і п'ятий рядки:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

Із другого рядка віднімемо третій і четвертий рядки й помножимо рядок на -1:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

До першого рядка додамо другий і третій рядки:

$$\left| \begin{array}{ccccc|c} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right|$$

Ми перетворили матрицю до діагонального вигляду. Тобто у кожному рядку тільки одне невідоме. Це невідоме дорівнює значенню з останнього стовпчика.

У такий спосіб ми знайшли рішення для струмів:

$$I_1 = 3\text{mA}; I_2 = 1\text{mA}; I_3 = 2\text{mA}; I_4 = -1\text{mA}; I_5 = 3\text{mA}.$$

Множачи струми на відповідні опори, знайдемо падіння напруг:

$$U_1 = 6\text{V}; U_2 = 1\text{V}; U_3 = 2\text{V}; U_4 = -1\text{V}; U_5 = 3\text{V}.$$

Таким чином, ми розв'язали поставлене завдання. Результати рішення треба занести до форми за наведеним нижче прикладом:



Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n, K\Omega$		2	1	1	1	1	
Струм $I_n, mA$		3	1	2	-1	3	
Напруга $U_n, V$	7	6	1	2	-1	3	-4

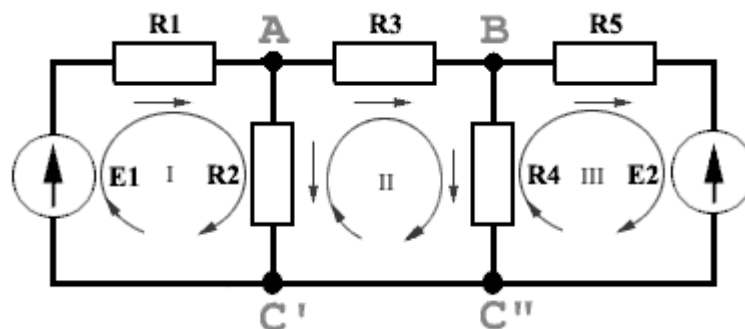
Для повної впевненості у вірності рішення доцільно перевірити струми у вузлах і (або) напруги й ЕРС вздовж замкнених контурів.

## 2.2. Метод контурних струмів

Для зменшення кількості невідомих у рівняннях струмів (5 невідомих) шукається рішення для умовних контурних струмів, які в сукупності охоплюють всі елементи схеми. У цьому випадку отримаємо 3 рівняння замість 5 для узагальненого методу.

1. Проаналізуємо топологію схеми.

Позначимо вузли схеми. Схема містить три вузли **A**, **B**, **C** і п'ять гілок. Вузол **C** умовно розділений на два вузли **C'** і **C''**, але електрично це один вузол.



2. Позначимо внутрішні контури для контурних струмів (колові лінії) так, щоб ці контури включали всі елементи схеми. Тут виділено три контури: “I” – E1, R1, R2; “II” – R2, R3, R4; “III” – R4, R5, E2.

3. Позначимо умовні напрямки контурних струмів (колові стрілки)  $I_I$ ,  $I_{II}$ ,  $I_{III}$ .

4. Будемо використовувати напрямки контурних струмів як напрямки обходу контурів для розрахунків спадання напруги  $U_n$  на елементах і визначення знаків ЕРС.

5. Позначимо умовні напрямки струмів  $I_n$  у гілках схеми (стрілки).

6. Позначимо струми гілок  $I_n$  і падіння напруг  $U_n = I_n \cdot R_n$  за допомогою контурних струмів. Будемо при цьому враховувати взаємні напрямки струмів.

$$\begin{aligned}
 I_1 &= I_I; & U_1 &= I_I \cdot R_1; \\
 I_2 &= I_I - I_{II}; & U_2 &= (I_I - I_{II}) \cdot R_2; \\
 I_3 &= I_{II}; & U_3 &= I_{II} \cdot R_3; \\
 I_4 &= I_{II} - I_{III}; & U_4 &= (I_{II} - I_{III}) \cdot R_4; \\
 I_5 &= I_{III}; & U_5 &= I_{III} \cdot R_5.
 \end{aligned}$$

7. Для контурних струмів автоматично виконуються рівняння Кірхгофа для струмів у вузлах схеми. Сума струмів, що втікають у вузол, дорівнює сумі струмів, що витікають з вузла (ліворуч – струми, що втікають, праворуч – що витікають):

$$\begin{aligned} \text{Вузол А: } I_1 &= I_2 + I_3; \quad ; \quad I_1 = (I_1 - I_{II}) + I_{II} = I_I; \\ \text{Вузол В: } I_3 &= I_4 + I_5; \quad ; \quad I_{II} = (I_{II} - I_{III}) + I_{III} = I_{II}. \end{aligned}$$

8. Складемо рівняння для падінь напруг  $U_n$  на резисторах  $R_n$  і ЕРС  $E_1, E_2$ . Сума падінь напруг на елементах схеми дорівнює сумі ЕРС вздовж замкненого контуру. Падіння напруги  $U_n = I_n \cdot R_n$  будемо брати зі знаком "+", якщо напрямок струму збігається з напрямком обходу, і зі знаком "-", якщо не збігається. Аналогічно зробимо зі знаком ЕРС – "+", якщо напрямок ЕРС збігається з напрямком обходу, і "-", якщо не збігається.

$$\begin{aligned} \text{Контур "I": } E_1 &= U_1 + U_2; & E_1 &= I_I \cdot R_1 + (I_I - I_{II}) \cdot R_2; \\ \text{Контур "II": } 0 &= -U_2 + U_3 + U_4; & 0 &= -(I_I - I_{II}) \cdot R_2 + I_{II} \cdot R_3 + (I_{II} - I_{III}) \cdot R_4; \\ \text{Контур "III": } -E_2 &= -U_4 + U_5; & -E_2 &= -(I_{II} - I_{III}) \cdot R_4 + I_{III} \cdot R_5. \end{aligned}$$

9. Перегрупуємо члени рівнянь:

$$\begin{aligned} I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2 &= E_1; \\ -I_I \cdot R_2 + I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) - I_{III} \cdot R_4 &= 0; \\ -I_{II} \cdot R_4 + I_{III} \cdot (R_4 + R_5) &= -E_2. \end{aligned}$$

і обернемо знаки 2-го й 3-го рівнянь:

$$\begin{aligned} I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2 &= E_1; \\ I_I \cdot R_2 - I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) + I_{III} \cdot R_4 &= 0; \\ I_{II} \cdot R_4 - I_{III} \cdot (R_4 + R_5) &= E_2. \end{aligned}$$

У цьому місці було б зручно підставити конкретні чисельні значення  $R_n$  і  $E_n$ . При цьому варто привести всі опори й ЕРС до однакового масштабу. Наприклад, якщо частину значень наведено у  $\Omega$ , а частину в  $K\Omega$ , треба усе навести у  $\Omega$ .

10. Розв'яжемо цю систему щодо невідомих контурних струмів  $I_N$ .

10.1. Перетворимо систему рівнянь до стандартного вигляду:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot A_{11} + X_2 \cdot A_{12} + X_3 \cdot A_{13} &= B_1; \\ X_1 \cdot A_{21} + X_2 \cdot A_{22} + X_3 \cdot A_{23} &= B_2; \\ X_1 \cdot A_{31} + X_2 \cdot A_{32} + X_3 \cdot A_{33} &= B_3. \end{aligned}$$

Тут використані такі позначення:

$$\begin{aligned} X_1 &= I_I; & X_2 &= I_{II}; & X_3 &= I_{III}; & B_1 &= E_1; \\ A_{11} &= (R_1 + R_2); & A_{12} &= -R_2; & A_{13} &= 0; & B_2 &= 0; \\ A_{21} &= R_2; & A_{22} &= -(R_2 + R_3 + R_4); & A_{23} &= R_4; & B_3 &= E_2; \\ A_{31} &= 0; & A_{32} &= R_4; & A_{33} &= -(R_4 + R_5); & & \end{aligned}$$

10.2. Одержали матричне рівняння:

$$\begin{vmatrix} (R_1 + R_2) & -R_2 & 0 \\ R_2 & -(R_2 + R_3 + R_4) & R_4 \\ 0 & R_4 & -(R_4 + R_5) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} I_I \\ I_{II} \\ I_{III} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} E_1 \\ 0 \\ E_2 \end{vmatrix}$$

10.3. Для цієї матриці доцільно використовувати наступні методи:

- Рішення матричного рівняння за правилом Крамера.
- Рішення шляхом зниження порядку рівняння.

Приклади рішень цими методами наведено у наступних розділах.

10.4. У такий спосіб ми знайдемо невідомі значення  $X_1, X_2, X_3$ , які відповідають контурним струмам  $I_I, I_{II}, I_{III}$ , які шукаються.

11. Знайдені значення контурних струмів  $I_I, I_{II}, I_{III}$  використаємо для розрахунку струмів і напруг у гілках схеми:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_I; & U_1 &= I_I \cdot R_1; \\ I_2 &= I_I - I_{II}; & U_2 &= (I_I - I_{II}) \cdot R_1; \\ I_3 &= I_{II}; & U_3 &= I_{II} \cdot R_3; \\ I_4 &= I_{II} - I_{III}; & U_4 &= (I_{II} - I_{III}) \cdot R_4; \\ I_5 &= I_{III}; & U_5 &= I_{III} \cdot R_5. \end{aligned}$$

Таким чином, ми розв'язали задачу.

---

### 2.2.1. Рішення матричного рівняння за правилом Крамера

Рішення рівняння  $|A| \cdot X = |B|$  шукається у вигляді  $X_n = D_n/D$ ; де  $n=1, 2, 3, 4, 5$ .

$D$  – визначник матриці  $|A|$ ;

$D_n$  – визначник матриці, що отримана заміною стовпця  $|A_n|$  матриці  $|A|$  на стовець  $|B|$ .

1. Обчислення визначника матриці  $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$D = A_{11} \cdot A_{22} \cdot A_{33} - A_{11} \cdot A_{23} \cdot A_{32} + A_{12} \cdot A_{23} \cdot A_{31} - A_{12} \cdot A_{21} \cdot A_{33} + A_{13} \cdot A_{21} \cdot A_{32} - A_{13} \cdot A_{22} \cdot A_{31}.$$

2. Обчислення визначника допоміжної матриці  $|A_1|$ :

$$|A_1| = \begin{vmatrix} B_1 & A_{12} & A_{13} \\ B_2 & A_{22} & A_{23} \\ B_3 & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = B_1 \cdot A_{22} \cdot A_{33} - B_1 \cdot A_{23} \cdot A_{32} + A_{12} \cdot A_{23} \cdot B_3 - A_{12} \cdot B_2 \cdot A_{33} + A_{13} \cdot B_2 \cdot A_{32} - A_{13} \cdot A_{22} \cdot B_3.$$

3. Обчислення визначника допоміжної матриці  $|A_2|$ :

$$|A_2| = \begin{vmatrix} A_{11} & B_1 & A_{13} \\ A_{21} & B_2 & A_{23} \\ A_{31} & B_3 & A_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = A_{11} \cdot B_1 \cdot A_{33} - A_{11} \cdot A_{23} \cdot B_3 + B_1 \cdot A_{23} \cdot A_{31} - B_1 \cdot A_{21} \cdot A_{33} + A_{13} \cdot A_{21} \cdot B_3 - A_{13} \cdot B_2 \cdot A_{31}.$$

4. Обчислення визначника допоміжної матриці  $|A_3|$ :

$$|A_3| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & B_1 \\ A_{21} & A_{22} & B_2 \\ A_{31} & A_{32} & B_3 \end{vmatrix}$$

$$D_3 = A_{11} \cdot A_{22} \cdot B_3 - A_{11} \cdot B_2 \cdot A_{32} + A_{12} \cdot B_2 \cdot A_{31} - A_{12} \cdot A_{21} \cdot B_3 + B_1 \cdot A_{21} \cdot A_{32} - B_1 \cdot A_{22} \cdot A_{31}.$$

5. Обчислення  $X_1 = D_1/D$ ;  $X_2 = D_2/D$ ;  $X_3 = D_3/D$ .

---

## 2.2.2. Рішення шляхом зниження порядку рівняння

Маємо наступну систему рівнянь:

$$\begin{cases} I_I \cdot (R_1 + R_2) - I_{II} \cdot R_2 = E_1; \\ I_I \cdot R_2 - I_{II} \cdot (R_2 + R_3 + R_4) + I_{III} \cdot R_4 = 0; \\ I_{II} \cdot R_4 - I_{III} \cdot (R_4 + R_5) = E_2. \end{cases}$$

З такими, наприклад, початковими умовами:

Елемент	E1	R1	R2	R3	R4	R5	E2
Опір $R_n$ , К $\Omega$		2	1	1	1	1	
Струм $I_n$ , мА							
Напруга $U_n$ , V	7						-4

1. Підставимо чисельні значення до системи рівнянь:

$$\begin{cases} I_I \cdot (2+1) - I_{II} \cdot 1 = 7; \\ I_I \cdot 1 - I_{II} \cdot (1+1+1) + I_{III} \cdot 1 = 0; \\ I_{II} \cdot 1 - I_{III} \cdot (1+1) = -4; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot I_I - I_{II} = 7; \\ I_I - 3 \cdot I_{II} + I_{III} = 0; \\ I_{II} - 2 \cdot I_{III} = -4. \end{cases}$$

2. Одне з невідомих  $X_n$  визначається за іншими невідомими, шляхом рішення певного рівняння відносно  $X_n$ . Наприклад, розв'яжемо останнє рівняння відносно  $I_{II}$ :

$$I_{II} - 2 \cdot I_{III} = -4; \quad I_{II} = 2 \cdot I_{III} - 4.$$

3. Отримане рішення підставляється до інших рівнянь замість  $X_n$ , що дає систему з меншим числом рівнянь і меншим числом невідомих. У нашому прикладі:

$$\begin{cases} 3 \cdot I_I - (2 \cdot I_{III} - 4) = 7; \\ I_I - 3 \cdot (2 \cdot I_{III} - 4) + I_{III} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot I_I - 2 \cdot I_{III} + 4 = 7; \\ I_I - 6 \cdot I_{III} + 12 + I_{III} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3 \cdot I_I - 2 \cdot I_{III} = 3; \\ I_I - 5 \cdot I_{III} = -12. \end{cases}$$

4. Продовжуємо знижувати порядок системи рівнянь, доки отриману систему не вдасться вирішити. У нашому прикладі розв'яжемо перше рівняння відносно  $I_I$ :

$$3 \cdot I_I - 2 \cdot I_{III} = 3; \quad I_I = 2/3 \cdot I_{III} + 1.$$

5. Отримане рішення підставляється до рівняння, яке залишилось. У нашому прикладі отримаємо рівняння з одним невідомим:

$$I_I - 5 \cdot I_{III} = -12; \quad (2/3 \cdot I_{III} + 1) - 5 \cdot I_{III} = -12.$$

Розв'язуючи це рівняння, отримаємо:

$$2 \cdot I_{III} + 3 - 15 \cdot I_{III} = -36; \quad 39 = 13 \cdot I_{III}; \quad I_{III} = 3.$$

Тобто  $I_{III} = 3$ .

6. Далі знайдемо:

$$\begin{aligned} I_I &= 2/3 \cdot I_{III} + 1 = 2/3 \cdot 3 + 1 = 3; \\ I_{II} &= 2 \cdot I_{III} - 4 = 2 \cdot 3 - 4 = 2. \end{aligned}$$

7. Таким чином, знайшли невідомі контурні струми  $I_I = 3$ ,  $I_{II} = 2$ ,  $I_{III} = 3$ .

## 2.3. Метод вузлових потенціалів

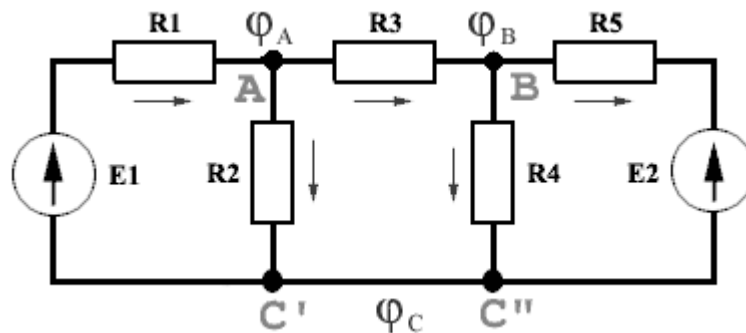
Для зменшення кількості невідомих у рівняннях струмів (5 невідомих) шукається рішення для невідомих потенціалів у вузлах (3 вузли). Крім того, потенціал є відносною величиною, тому потенціал одного з вузлів покладається рівним нулю. Таким чином, треба знайти тільки 2 невідомих потенціали, а потім розрахувати ті величини, яких шукають, за розрахованими потенціалами вузлів.

1. Позначимо вузли схеми. Схема містить три вузли А, В, С і п'ять гілок. Вузол С умовно розділений на два вузли С' і С'', але електрично це один вузол.

2. Позначимо умовні напрямки струмів  $I_n$  у гілках схеми.

3. Позначимо потенціали у вузлах схеми  $\varphi_A$  для вузла А,  $\varphi_B$  вузла В і  $\varphi_C$  вузла С.

Для зручності покладемо потенціал у нижньому за схемою вузлі  $\varphi_C = 0$ :



4. Позначимо струми кожної з гілок схеми за допомогою потенціалів і ЕРС цих гілок. При цьому будемо дотримуватися прийнятих напрямків струмів і падінь напруг (струм тече від вузла з більшим потенціалом):

$$\begin{aligned} \text{Гілка } E1 \ R1 & : I1 = (E1 - \varphi_A) / R1; \\ \text{Гілка } R2 & : I2 = \varphi_A / R2; \\ \text{Гілка } R3 & : I3 = (\varphi_A - \varphi_B) / R3; \\ \text{Гілка } R4 & : I4 = \varphi_B / R4; \\ \text{Гілка } E2 \ R5 & : I5 = (\varphi_B - E2) / R5. \end{aligned}$$

5. Складемо рівняння Кірхгофа для струмів у вузлах схеми. Сума струмів, що втікають у вузол, дорівнює сумі струмів, що витікають з вузла (ліворуч – що втікають струми, праворуч – що витікають):

$$\begin{aligned} \text{Вузол А:} & \quad I1 = I2 + I3; \\ \text{Вузол В:} & \quad I3 = I4 + I5. \end{aligned}$$

6. Уявимо вирази для значення струмів як функції-потенціали:

$$\begin{aligned} \text{Вузол А:} & \quad (E1 - \varphi_A) / R1 = \varphi_A / R2 + (\varphi_A - \varphi_B) / R3 \\ \text{Вузол В:} & \quad (\varphi_A - \varphi_B) / R3 = \varphi_B / R4 + (\varphi_B - E2) / R5. \end{aligned}$$

7. Позбудемося  $R_n$  у знаменниках виразів домножаючи перше рівняння на  $R1 \cdot R2 \cdot R3$ , а друге на  $R3 \cdot R4 \cdot R5$ . Розкриваючи дужки, одержимо:

$$\begin{aligned} \text{А:} & \quad E1 \cdot R2 \cdot R3 - \varphi_A \cdot R2 \cdot R3 = \varphi_A \cdot R1 \cdot R3 + \varphi_A \cdot R1 \cdot R2 - \varphi_B \cdot R1 \cdot R2; \\ \text{В:} & \quad \varphi_A \cdot R4 \cdot R5 - \varphi_B \cdot R4 \cdot R5 = \varphi_B \cdot R3 \cdot R5 + \varphi_B \cdot R3 \cdot R4 - E2 \cdot R3 \cdot R4. \end{aligned}$$

У цьому місці було б зручно підставити конкретні чисельні значення  $R_n$  і  $E_n$ . При цьому варто привести всі опори й ЕРС до однакового масштабу. Наприклад, якщо частина опорів позначена у  $\Omega$ , а частина у  $K\Omega$ , треба усе позначити у  $\Omega$ .

8. Перегрупуємо члени рівнянь:

$$\begin{aligned} A: & \quad \varphi_A \cdot (R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2) - \varphi_B \cdot R_1 \cdot R_2 = E_1 \cdot R_2 \cdot R_3; \\ B: & \quad \varphi_A \cdot R_4 \cdot R_5 - \varphi_B \cdot (R_4 \cdot R_5 + R_3 \cdot R_5 + R_3 \cdot R_4) = -E_2 \cdot R_3 \cdot R_4; \end{aligned}$$

*Примітка:* Порівняйте, наскільки ліпше запис цієї системи рівнянь через провідність  $G=1/R$ .

9. Одержимо стандартну систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot A_{11} + X_2 \cdot A_{12} &= B_1; \\ X_1 \cdot A_{21} + X_2 \cdot A_{22} &= B_2, \end{aligned}$$

де використані позначення:

$$\begin{aligned} X_1 &= \varphi_A; & X_2 &= \varphi_B; \\ A_{11} &= R_2 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_3 + R_1 \cdot R_2; & A_{12} &= -R_1 \cdot R_2; & B_1 &= E_1 \cdot R_2 \cdot R_3; \\ A_{21} &= R_4 \cdot R_5; & A_{22} &= R_4 \cdot R_5 + R_3 \cdot R_5 + R_3 \cdot R_4; & B_2 &= -E_2 \cdot R_3 \cdot R_4; \end{aligned}$$

10. Отриману систему можна вирішувати за допомогою матриць.

У конкретному випадку двох рівнянь її простіше вирішувати методом підстановки:

10.1. З останнього рівняння, розв'язуючи його відносно  $X_2$ , одержимо:

$$X_2 = (B_2 - X_1 \cdot A_{21}) / A_{22}.$$

10.2. Підставляючи вираження для  $X_2$  у перше рівняння, одержимо:

$$X_1 \cdot A_{11} + (B_2 - X_1 \cdot A_{21}) / A_{22} \cdot A_{12} = B_1.$$

10.3. Розв'язуючи його відносно  $X_1$ , одержимо:

$$X_1 = (B_1 - B_2 \cdot A_{12} / A_{22}) / (A_{11} - A_{12} \cdot A_{21} / A_{22}).$$

10.4. Підставимо отримане значення  $X_1$  у вираз  $X_2 = (B_2 - X_1 \cdot A_{21}) / A_{22}$ .

У такий спосіб ми знайшли невідомі значення  $X_1$  і  $X_2$ , які відповідають потенціалам  $\varphi_A$  та  $\varphi_B$ , яких шукають.

11. Підставимо отримані значення потенціалів  $\varphi_A$  та  $\varphi_B$  у рівняння для струмів  $I_n$  (п.п. 4) і розрахуємо значення струмів у гілках схеми.

12. За допомогою закону Ома розрахуємо падіння напруг  $U_n$  на резисторах  $R_n$ :  $U_n = I_n \cdot R_n$ .

У такий спосіб ми вирішили поставлене завдання, обчисливши  $I$  і  $U$ .

---

### 2.3.1. Пошук потенціалів з використанням провідності $G$

Рішення рівнянь у методі вузлових потенціалів виглядає значно ліпше, якщо замість опорів  $R$  використати провідності  $G=1/R$ .

Нижче наведені лише модифіковані кроки алгоритму обчислень відносно відповідних пунктів попереднього розділу:

4. Струми в гілках схеми:

$$\begin{aligned} \text{Гілка } E_1 \ R_1: & \quad I_1 = (E_1 - \varphi_A) \cdot G_1; \\ \text{Гілка } R_2: & \quad I_2 = \varphi_A \cdot G_2; \\ \text{Гілка } R_3: & \quad I_3 = (\varphi_A - \varphi_B) \cdot G_3; \\ \text{Гілка } R_4: & \quad I_4 = \varphi_B \cdot G_4; \\ \text{Гілка } E_2 \ R_5: & \quad I_5 = (\varphi_B - E_2) \cdot G_5. \end{aligned}$$

6. Значення струмів виражені через потенціали:

$$\begin{aligned} \text{Вузол А:} & \quad (E_1 - \varphi_A) \cdot G_1 = \varphi_A \cdot G_2 + (\varphi_A - \varphi_B) \cdot G_3 \\ \text{Вузол В:} & \quad (\varphi_A - \varphi_B) \cdot G_3 = \varphi_B \cdot G_4 + (\varphi_B - E_2) \cdot G_5. \end{aligned}$$

7. Розкриваючи дужки, одержимо:

$$\begin{aligned} \text{А:} & \quad E_1 \cdot G_1 - \varphi_A \cdot G_1 = \varphi_A \cdot G_2 + \varphi_A \cdot G_3 - \varphi_B \cdot G_3 \\ \text{В:} & \quad \varphi_A \cdot G_3 - \varphi_B \cdot G_3 = \varphi_B \cdot G_4 + \varphi_B \cdot G_5 - E_2 \cdot G_5. \end{aligned}$$

8. Перегрупувуючи члени, одержимо:

$$\begin{aligned} \text{А:} & \quad \varphi_A \cdot (G_1 + G_2 + G_3) - \varphi_B \cdot G_3 = E_1 \cdot G_1 \\ \text{В:} & \quad \varphi_A \cdot G_3 - \varphi_B \cdot (G_3 + G_4 + G_5) = -E_2 \cdot G_5. \end{aligned}$$

Порівняйте, наскільки цей запис ліпше, ніж запис з опорами у попередньому розділі.

9. Та ж сама система двох рівнянь з двома невідомими:

$$\begin{aligned} X_1 \cdot A_{11} + X_2 \cdot A_{12} &= B_1; \\ X_1 \cdot A_{21} + X_2 \cdot A_{22} &= B_2. \end{aligned}$$

Тут:  $X_1 = \varphi_A$ ;  $X_2 = \varphi_B$  – позначення ті ж, але для А і В використовуються більш прості вирази:

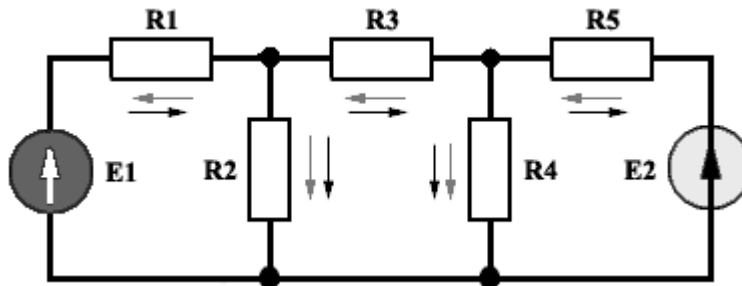
$$\begin{aligned} A_{11} &= G_1 + G_2 + G_3; & A_{12} &= -G_3; & B_1 &= E_1 \cdot G_1; \\ A_{21} &= G_3; & A_{22} &= -(G_3 + G_4 + G_5); & B_2 &= -E_2 \cdot G_5. \end{aligned}$$

## 2.4. Метод суперпозицій

Метод суперпозицій інакше називається методом накладень. Цей алгоритм зовні найбільш простий, але й найбільш громіздкий. Метод активно використовує методи перетворення і наступного спрощення схем: перетворення послідовного й паралельного з'єднання, перетворення трикутника до зірки та інше. Не завжди ці перетворення вдається довести до кінця.

Основна ідея цього методу в тому, що розглядається стільки схем, скільки у ній є джерел ЕРС. Шукаються окремі рішення для кожної із схем, а потім рішення для кожного елемента схеми складаються (накладаються).

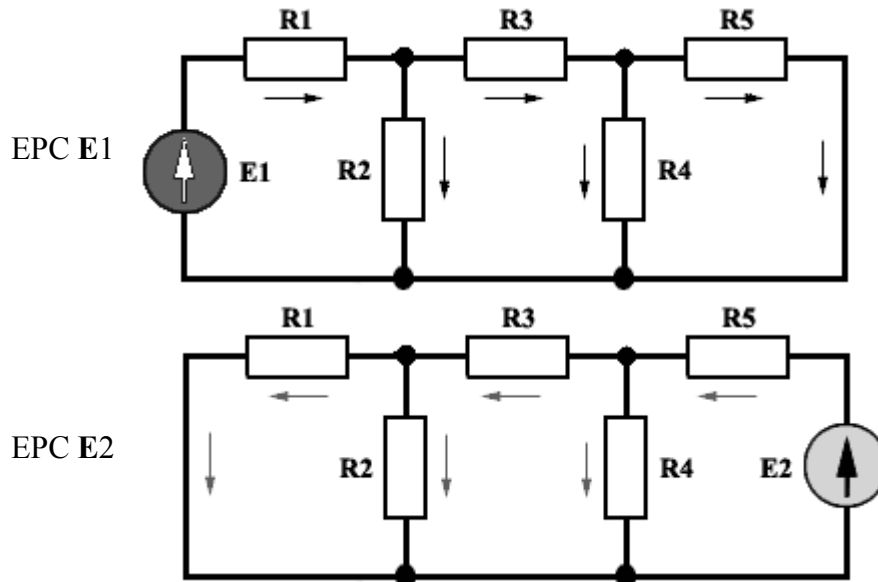
1. Позначимо на схемі джерела ЕРС (тут  $E_1$  позначений чорним,  $E_2$  – сірим).



Стрілками позначені відповідні напрямки струмів і падінь напруг.

2. Розіб'ємо схему на дві (за кількістю ЕРС).

Перерисуємо схему для ЕРС  $E_1$  і ЕРС  $E_2$ , вилючивши зі схеми усі інші ЕРС і замінюючи їх на перемички.



3. Розрахуємо струми  $I_n'$  і напруги  $U_n'$  на елементах  $R_n$  для схеми з ЕРС  $E_1$  і  $I_n''$ ,  $U_n''$  для ЕРС  $E_2$ .

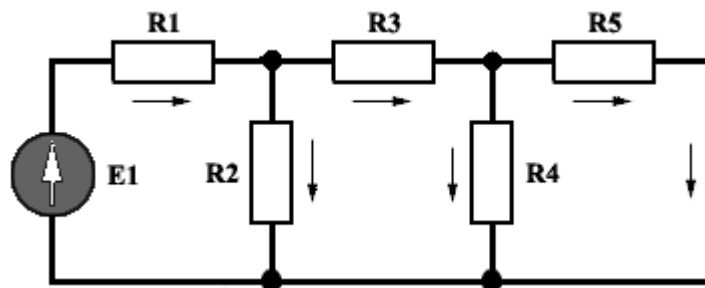
### Розрахунок струмів і напруг у схемі з одним джерелом ЕРС

У цьому випадку легше всього обчислити сумарний опір схеми  $R_\Sigma$  і за ним обчислити загальний струм  $I_\Sigma = I_1$  і спадання напруги  $U_1$ .

Знаючи спадання напруги  $U_1$ , можна обчислити напругу  $U_2$  і струм  $I_2$ .

І так далі: рухаючись від початку до кінця схеми, обчислити послідовно усі струми й напруги.

#### 3.1. Розрахунок схеми з ЕРС $E_1$



3.1.1. Розрахунок сумарного опору схеми:

$$1/R_{\Sigma 45} = 1/R_4 + 1/R_5 \text{ – паралельне з'єднання;}$$

$$R_{\Sigma 345} = R_3 + R_{\Sigma 45} \text{ – послідовне з'єднання;}$$

$$1/R_{\Sigma 2345} = 1/R_2 + 1/R_{\Sigma 345} \text{ – паралельне з'єднання;}$$

$$R_\Sigma = R_{\Sigma 12345} = R_1 + R_{\Sigma 2345} \text{ – послідовне з'єднання;}$$

3.1.2. Розрахунок струмів і напруг:

$$I_1 = E_1/R_\Sigma \text{ - закон Ома; } U_1 = I_1 \cdot R_1 \text{ - закон Ома;}$$

$$U_2 = E_1 - U_1 \text{ - сума падіння напруги й ЕРС; } I_2 = U_2/R_2 \text{ - закон Ома;}$$

$$I_3 = I_1 - I_2 \text{ – сума струмів; } U_3 = I_3 \cdot R_3 \text{ - закон Ома;}$$

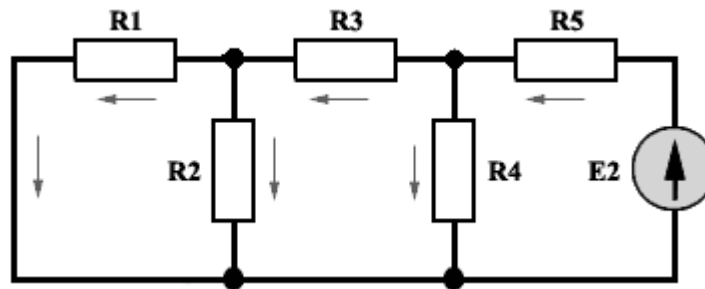
$$U_4 = U_2 - U_3 \text{ – сума падіння напруги; } I_4 = U_4/R_4 \text{ - закон Ома;}$$

$$I_5 = I_3 - I_4 \text{ – сума струмів; } U_5 = I_5 \cdot R_5 \text{ - закон Ома;}$$

3.1.3. Позначимо знайдені значення струмів і напруг одним штрихом:  $I_n'$  і  $U_n'$ .



### 3.2. Розрахунок схеми з ЕРС E2



3.2.1. Розрахунок сумарного опору схеми:

$$1/R_{\Sigma 12} = 1/R_1 + 1/R_2 \text{ – паралельне з'єднання};$$

$$R_{\Sigma 123} = R_3 + R_{\Sigma 12} \text{ – послідовне з'єднання};$$

$$1/R_{\Sigma 1234} = 1/R_4 + 1/R_{\Sigma 123} \text{ – паралельне з'єднання};$$

$$R_{\Sigma} = R_{\Sigma 12345} = R_5 + R_{\Sigma 1234} \text{ – послідовне з'єднання}.$$

3.2.2. Розрахунок струмів і напруг:

$$I_5 = E_2 / R_{\Sigma}; \quad U_5 = I_5 \cdot R_5;$$

$$U_4 = E_2 - U_5; \quad I_4 = U_4 / R_4;$$

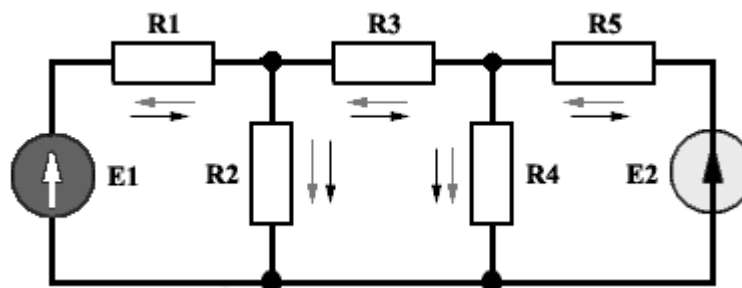
$$I_3 = I_5 - I_4; \quad U_3 = I_3 \cdot R_3;$$

$$U_2 = U_4 - U_3; \quad I_2 = U_2 / R_2;$$

$$I_1 = I_3 - I_2; \quad U_1 = I_1 \cdot R_1.$$

3.2.3. Позначимо знайдені значення струмів і напруг подвійним штрихом:  $I''$  і  $U''$ .

4. Таким чином, ми розрахували струми і напруги для двох допоміжних схем. Тепер складемо отримані рішення, враховуючи відносні напрямки струмів у допоміжних схемах і в головній схемі.



Одержимо:

$$I_1 = I_1' - I_1''; \quad U_1 = U_1' - U_1'';$$

$$I_2 = I_2' + I_2''; \quad U_2 = U_2' + U_2'';$$

$$I_3 = I_3' - I_3''; \quad U_3 = U_3' - U_3'';$$

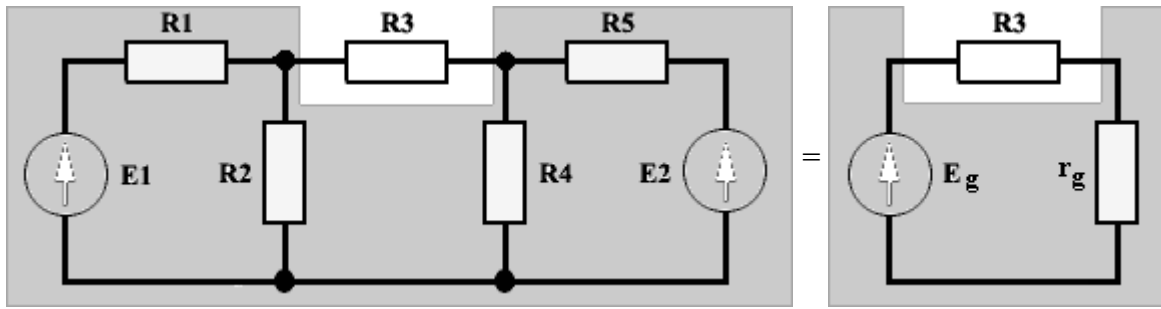
$$I_4 = I_4' + I_4''; \quad U_4 = U_4' + U_4'';$$

$$I_5 = I_5' - I_5''; \quad U_5 = U_5' - U_5''.$$

У такий спосіб ми вирішили поставлене завдання, обчисливши  $I$  і  $U$ .

## 2.5. Метод еквівалентного генератора

Основна ідея цього методу полягає в заміні частини схеми еквівалентним генератором з ЕРС  $E_g$  і внутрішнім опором  $r_g$ .



Тут частина схеми, зовнішньої відносно резистора  $R_3$ , замінюється на еквівалентний генератор з ЕРС  $E_g$  і внутрішнім опором  $r_g$ .

Знаючи  $E_g$  і  $r_g$ , легко розрахувати струм  $I_3 = E_g / (R_3 + r_g)$  і напругу  $U_3 = I_3 \cdot R_3 = E_g \cdot R_3 / (R_3 + r_g)$  на елементі  $R_3$ .

Особливістю цього методу є те, що він не завжди приводить до більш простого рішення, ніж рішення, отриманого іншими методами. Успіх застосування цього методу визначається тим, наскільки складним є завдання визначення параметрів еквівалентного генератора –  $E_g$  і  $r_g$ .

Параметри  $E_g$  і  $r_g$  можуть бути досить легко визначені за результатами вимірів напруги холостого ходу  $U_{xx} = E_g$  і струму короткого замкнення  $I_{кз} = E_g / r_g$ . Тому цей метод широко застосовується на практиці, коли є можливість провести виміри  $U_{xx}$  і  $I_{кз}$ .

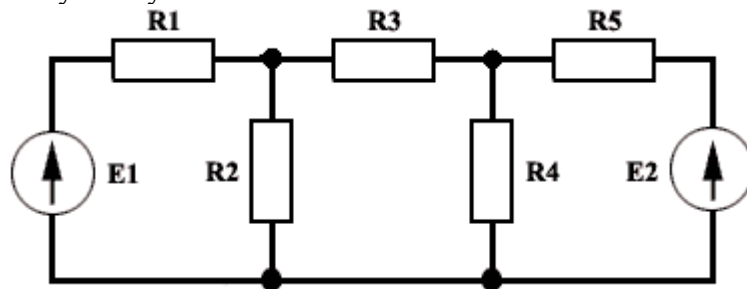
У випадках, коли немає можливості провести прямі виміри  $U_{xx}$  і  $I_{кз}$ , успіх застосування методу еквівалентного генератора залежить від того, наскільки вдало обрано елемент (ділянку) схеми, щодо якого виконується розрахунок.

При обиранні елемента (ділянки) схеми варто враховувати наступне:

- Розрахунок  $E_g$  значно спрощується у випадку, якщо схема, будучи розірваною на цій ділянці, розпадається на непов'язані контури зі своїми власними (непов'язаними) ЕРС.
- Розрахунок  $r_g$  значно спрощується у випадку, якщо схема, що залишилася після розриву схеми на цій ділянці, зводиться до послідовно-паралельного з'єднання елементів схеми.

Метод активно використовує методи перетворення і спрощення схем: перетворення послідовного і паралельного з'єднання, перетворення трикутника до зірки та інше. Не завжди ці перетворення вдається довести до кінця.

Розглянемо, як приклад, нашу схему:

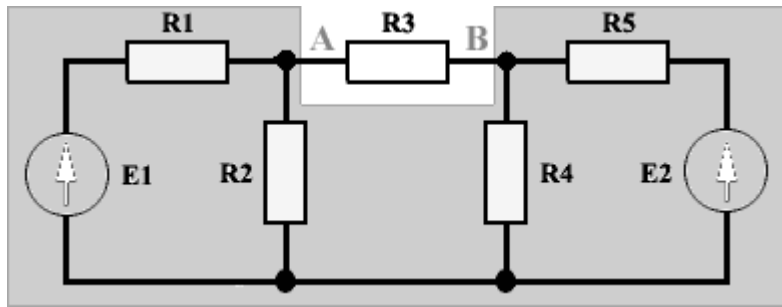


Застосування методу еквівалентного генератора буде вдалим при застосуванні до елементів:  $R_1$ ,  $R_3$ ,  $R_5$ . При цьому схема розпадеться на контури, в кожному з яких залишається тільки по одній ЕРС і послідовно-паралельно з'єднані опори.

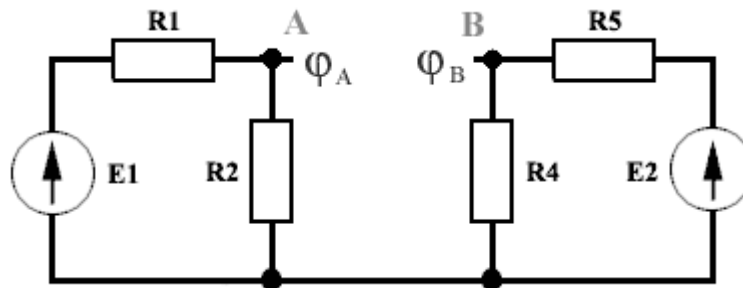
Застосування методу до елементів  $R_2$  і  $R_4$  буде не дуже вдалим, тому що схема не розпадається на непов'язані контури.

Як приклад, розглянемо рішення задачі щодо елемента  $R_3$ , для якого застосування методу еквівалентного генератора буде найбільш вдалим.

1. Позначимо точки під'єднання елемента  $R_3$ , відносно якого шукається рішення задачі, – точки  $A$  і  $B$  на схемі.



2. Вилучимо зі схеми елемент, щодо якого шукається рішення.



Наша схема розпалася на два контури: контур  $E_1, R_1, R_2$  і контур  $R_4, R_5, E_2$ . Необхідно обчислити ЕРС  $E_g$  і еквівалентний внутрішній опір  $r_g$  цієї схеми щодо точок  $A$  і  $B$ .

### 3. Розрахунок еквівалентної ЕРС

Прийmemo за умовний напрямок струму у зовнішній частині схеми напрямок від  $A$  до  $B$ . Тоді еквівалентна ЕРС схеми відповідає різниці потенціалів між точками  $A$  і  $B$ :  $E_g = \phi_A - \phi_B$ . Розрахунок потенціалів  $\phi_A, \phi_B$  зручно виконувати щодо загального (нижнього за схемою) провідника.

#### 3.1. Розрахунок потенціалу $\phi_A$

Лівий за схемою контур складається з послідовно з'єднаних елементів  $E_1, R_1, R_2$ . Потенціал  $\phi_A$  відповідає спаданню напруги на резисторі  $R_2$ :  $\phi_A = U_2' = I_2' \cdot R_2$ .

**Зауваження!** Розглянута схема відрізняється від вихідної, тому струми і напруги на елементах зміненої схеми відрізняються від струмів і напруг вихідної схеми. Щоб запобігти плутанини, будемо позначати струми і напруги в схемі еквівалентного генератора додатковим штрихом.

Струм у послідовному контурі однаковий  $I_1' = I_2'$  і визначається ЕРС та сумарним опором ланцюга:  $I_2' = E_1 / (R_1 + R_2)$ .

Таким чином,  $\phi_A = E_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2)$ .

#### 3.2. Розрахунок потенціалу $\phi_B$

Аналогічним чином  $\phi_B = E_2 \cdot R_4 / (R_4 + R_5)$ .

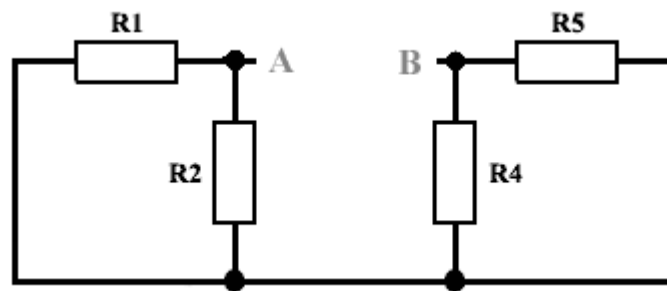
#### 3.3. Знаючи потенціали точок $A$ і $B$ , визначемо ЕРС еквівалентного генератора:

$$E_g = \phi_A - \phi_B = E_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) - E_2 \cdot R_4 / (R_4 + R_5).$$

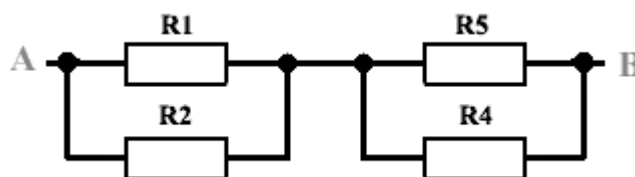
**Увага!** Під час обчислення різниці потенціалів слід стежити за знаками ЕРС і напрямками струмів у схемі.

#### 4. Розрахунок внутрішнього опору еквівалентного генератора

4.1. Для розрахунку внутрішнього опору схеми щодо точок **A** і **B** необхідно замінити усі ЕРС схеми на перемички (на опори, якщо конкретна ЕРС має внутрішній опір). Після цього наша схема перетвориться до наступного вигляду:



Цю схему зручніше перерисувати в такому вигляді:



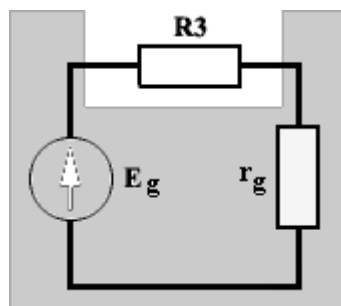
4.2. Внутрішній опір схеми визначається опором послідовно з'єднаних ланцюжків **R12** і **R45**, кожна з яких складається з паралельних резисторів **R1**, **R2** і **R4**, **R5**.

$$\begin{aligned} 1/R_{12} &= 1/R_1 + 1/R_2 \text{ – паралельне з'єднання; } & R_{12} &= R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2); \\ 1/R_{45} &= 1/R_4 + 1/R_5 \text{ – паралельне з'єднання; } & R_{45} &= R_4 \cdot R_5 / (R_4 + R_5); \\ r_g &= R_{12} + R_{45} \text{ – послідовне з'єднання; } & r_g &= R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) + R_4 \cdot R_5 / (R_4 + R_5). \end{aligned}$$

5. У такий спосіб ми розраховували ЕРС і внутрішній опір еквівалентного генератора:

$$\begin{aligned} E_g &= E_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) - E_2 \cdot R_4 / (R_4 + R_5); \\ r_g &= R_1 \cdot R_2 / (R_1 + R_2) + R_4 \cdot R_5 / (R_4 + R_5). \end{aligned}$$

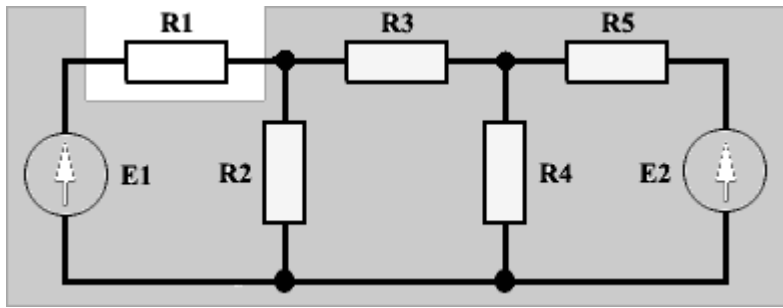
6. Знаючи параметри еквівалентного генератора, можемо розрахувати струм і напругу на зовнішньому резисторі **R3** для еквівалентної схеми:



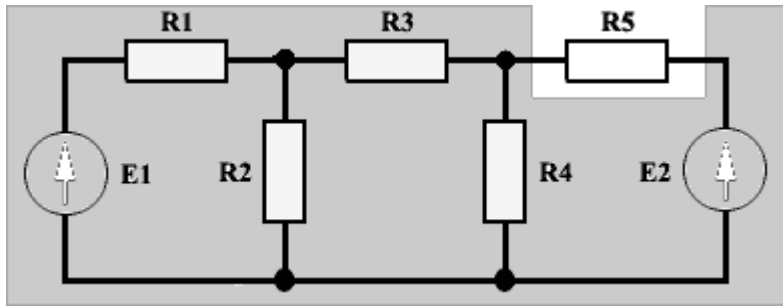
$$I_3 = E_g / (R_3 + r_g);$$

$$U_3 = I_3 \cdot R_3 = E_g \cdot R_3 / (R_3 + r_g).$$

7. Для розрахунку струму й напруги на елементах **R1** і **R5** можна також скористатися методом еквівалентного генератора.



Еквівалентний генератор  
для **R1**



Еквівалентний генератор  
для **R5**

Відповідні розрахунки не складніші розрахунків для елемента **R3** у п.п. 1-6.

8. Для розрахунків струму й напруги на елементах **R2** і **R4** використати метод еквівалентного генератора не дуже зручно – потрібно розраховувати ланцюг із двома джерелами ЕРС. Тому тут зручніше використати закони Кірхгофа у явному вигляді.

Наприклад:

1. Розрахувати струми й напруги на елементах **R1**, **R3**, **R5** з урахуванням напрямків струмів і ЕРС.
2. Позначити напрямки відомих струмів **I1**, **I3**, **I5**.
3. За сумою вхідних і вихідних струмів у вузлах схеми визначити значення й напрямки струмів **I2**, **I4**.

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0;$$

$$I_3 + I_4 + I_5 = 0.$$

4. Розрахувати падіння напруг на елементах **R2** і **R4**:

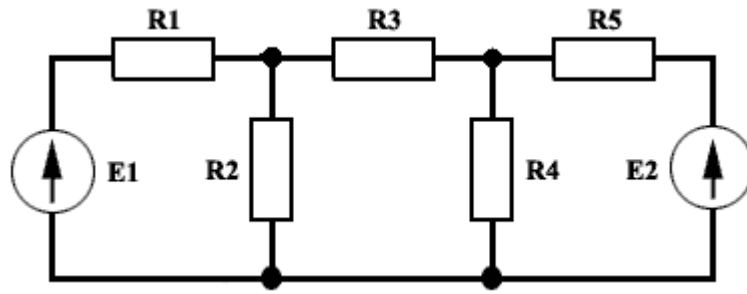
$$U_2 = I_2 \cdot R_2 = 0;$$

$$U_4 = I_4 \cdot R_4 = 0.$$

## 2.6. Метод перетворень

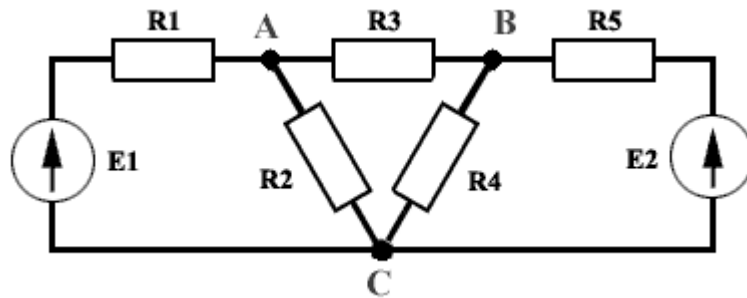
Метод перетворень будується на послідовних спрощеннях схеми: перетворення послідовного і паралельного з'єднання, перетворення трикутника до зірки та інше. Не завжди ці перетворення вдається виконати. Тому метод не можна розглядати як універсальний. Але саме цей метод найчастіше використовується на практиці як найбільш простий. Тільки у випадку, коли не вдається одержати просте рішення цим методом, переходять до інших, більш складних методів. Приклад розрахунку методом еквівалентних перетворень для одного джерела ЕРС наведено у розрахунках методом суперпозицій.

Розглянемо тут більш складний випадок двох джерел ЕРС.



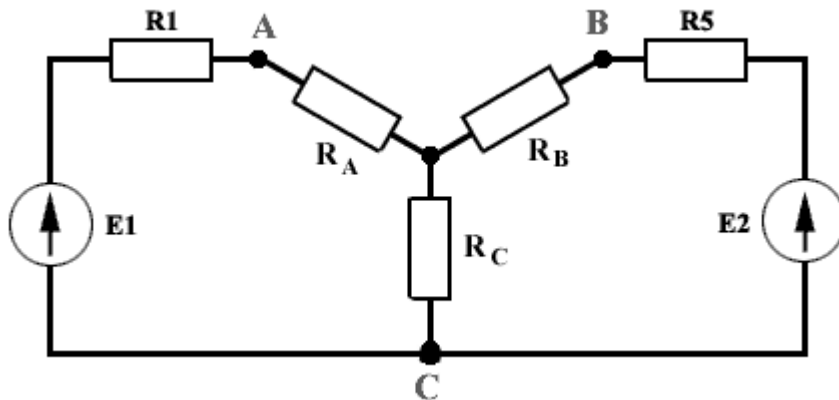
Цю схему не можна спростити, збираючи послідовно або паралельно з'єднані елементи. Але її можна спростити, використовуючи перетворення “зірка – трикутник”.

1. Перерисуємо схему так, щоб трикутник опорів можна було побачити:



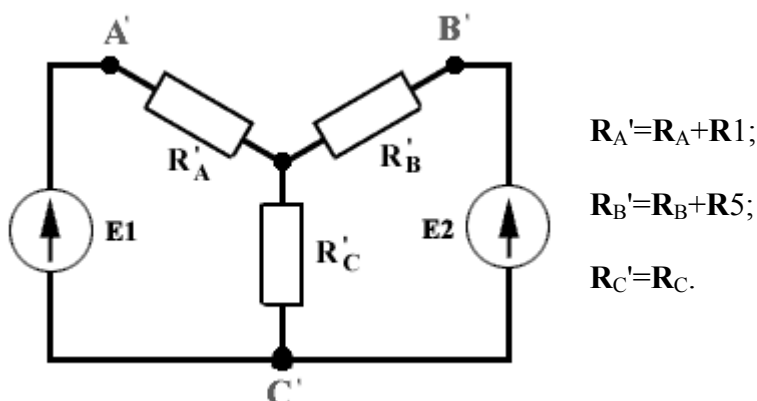
Тут трикутник опорів утворено резисторами  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_4$ .

2. Перетворимо трикутник опорів у зірку:

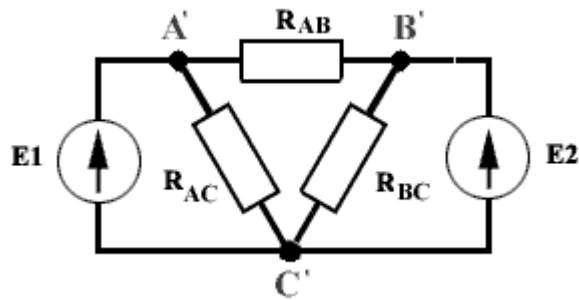


Для розрахунків опорів  $R_A$ ,  $R_B$ ,  $R_C$  використаємо формули перетворень “трикутник – зірка” наступного розділу, підставляючи  $R_{AB}=R_3$ ;  $R_{BC}=R_2$ ;  $R_{AC}=R_4$ .

3. Перетворимо послідовно з'єднані резистори до еквівалентних значень:

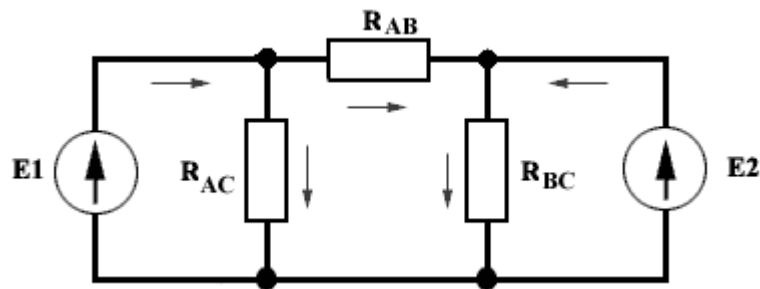


4. Перетворимо зірку опорів у трикутник:



Для розрахунків опорів  $R_{AB}$ ,  $R_{BC}$ ,  $R_{AC}$  використаємо формули перетворень “зірка – трикутник” наступного розділу.

5. Цю схему зручніше аналізувати в такому вигляді:



Тут стрілками позначені умовні напрямки струмів.

У цій схемі:

$$I_{AC} = E1/R_{AC};$$

$$I_{BC} = E2/R_{BC}.$$

Струм на середньому опорі  $R_{AB}$  визначимо за падінням напруги  $U_{AB} = E1 - E2$ :

$$I_{AB} = U_{AB}/R_{AB} = (E1 - E2)/R_{AB}.$$

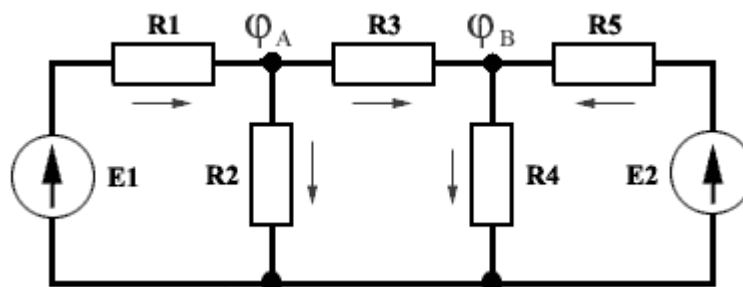
Струми джерел  $E1$  і  $E2$  визначимо за законом Кірхгофа відносно струмів у вузлах, поєднаних з ЕРС:

$$I_{E1} = I_{AC} + I_{AB};$$

$$I_{E2} = I_{BC} - I_{AB}.$$

У такий спосіб ми визначили струми джерел ЕРС  $I_{E1}$  и  $I_{E2}$ .

6. Тепер повернемося до початкової схеми:



Тут стрілками позначені умовні напрямки струмів. Розрахуємо струми на елементах схеми, виходячи зі струмів джерел ЕРС:

6.1. Розрахуємо струми й падіння напруг на резисторах **R1** і **R5**:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{E1}; & U_1 &= I_1/R_1 = I_{E1}/R_1; \\ I_4 &= I_{E2}; & U_4 &= I_5/R_5 = I_{E2}/R_5. \end{aligned}$$

6.2. Розрахуємо потенціали  $\varphi_A$  та  $\varphi_B$  :

$$\begin{aligned} \varphi_A &= E_1 - U_1; \\ \varphi_B &= E_2 - U_5. \end{aligned}$$

6.3. Розрахуємо падіння напруги й струму елемента **R3**:

$$U_3 = \varphi_A - \varphi_B; \quad I_3 = U_3/R_3 = (\varphi_A - \varphi_B)/R_3.$$

6.4. Розрахуємо падіння напруги і струму елементів **R2** і **R4**:

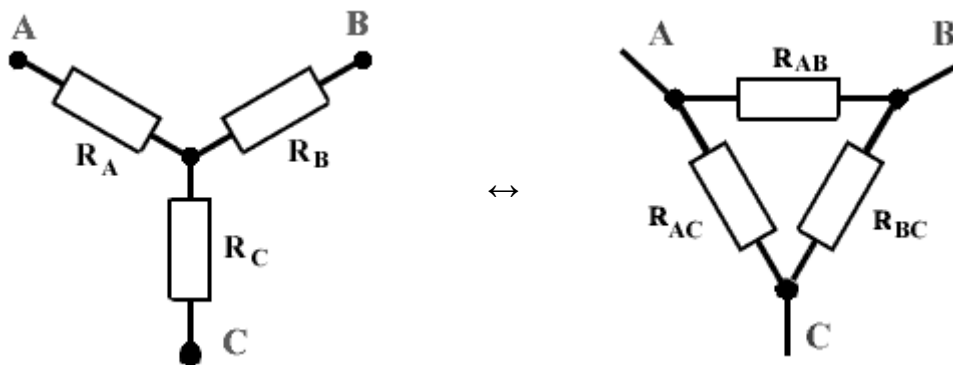
$$\begin{aligned} U_2 &= \varphi_A; & I_2 &= U_2/R_2 = \varphi_A/R_2; \\ U_4 &= \varphi_B; & I_4 &= U_4/R_4 = \varphi_B/R_4. \end{aligned}$$

У такий спосіб ми розрахували струми й напруги на всіх елементах схеми.

**Зауваження!** Напрямки струмів у схемі, що використовувались під час розрахунків, відрізняються від умовних напрямків струмів завдання. Після виконання розрахунків треба привести знаки струмів і напруг у відповідність до напрямків струмів завдання.

## 2.6.1. Перетворення з'єднання “зірка – трикутник” і “трикутник – зірка”

Наведені нижче схеми “зірки” і “трикутника” мають еквівалентні характеристики за струмами  $I_A$ ,  $I_B$ ,  $I_C$  і напругами  $U_{AB}$ ,  $U_{AC}$ ,  $U_{BC}$  щодо вузлів **A**, **B**, **C**, якщо значення опорів однієї схеми пов'язані наведеними нижче співвідношеннями зі значеннями опорів іншої схеми.



$$R_A = R_{AB} \cdot R_{AC} / (R_{AB} + R_{AC} + R_{BC});$$

$$R_B = R_{AB} \cdot R_{BC} / (R_{AB} + R_{AC} + R_{BC});$$

$$R_C = R_{AC} \cdot R_{BC} / (R_{AB} + R_{AC} + R_{BC});$$

↔

$$R_{AB} = R_A + R_B + R_A \cdot R_B / R_C;$$

$$R_{AC} = R_A + R_C + R_A \cdot R_C / R_B;$$

$$R_{BC} = R_B + R_C + R_B \cdot R_C / R_A.$$