2.5. ЗНАХОДЖЕННЯ НАЙКОРОТШИХ ШЛЯХІВ МІЖ ВЕРШИНАМИ ТА ЦЕНТРОМ ОРГРАФА

Постановка задачі про знаходження найкоротших шляхів в орієнтованих графах та її інтерпретації. Алгоритм Дейкстри. Знаходження найкоротших шляхів між парами вершин. Центр та ексцентриситет орграфа.

Припустимо, що ми маємо зважений орграф, який містить час польоту за маршрутами, які зв'язують певні міста, і ми хочемо побудувати таблицю, де наводиться мінімальний час перельоту з одного міста в інше. В цьому випадку ми стикаємося із загальною задачею *знаходження найкоротших шляхів.* Тобто, розглядаємо зважений орграф **G**=(**V**, **E**). Загальна задача знаходження найкоротших шляхів полягає у знаходженні для кожної впорядкованої пари вершин *(v, w)* будь-якого шляху від вершини *v* до вершини *w*, довжина якого мінімальна серед усіх можливих шляхів от *v* до *w*.

2.5.1. Задача знаходження найкоротшого шляху (алгоритм Дейкстри)

Можна розв'язати цю задачу, послідовно застосовуючи *алгоритм Дейкстри* для кожної вершини, яка оголошується як джерело. Ваги дуг будемо інтерпретувати як довжину шляху між вершинами. При такій інтерпретації задача могла виглядати, зокрема, так: знайти мінімальні маршрути з одного місця в будь-яке інше за існуючими координатами. На рисунку 2.13 наведено приклад такого графа. Приймаємо за початкову вершину 1.

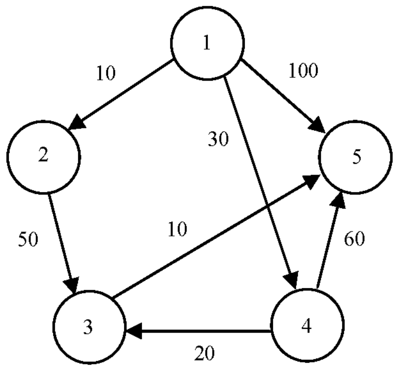

Рис. 2.13. Приклад зваженого орграфа

Введемо до розгляду:

S – множина вершин, s_{ij} – довжина шляху із вершини *i* до вершини *j*. У матричній формі цей граф представлено у табл. 2.8.

Таблиця 2.8

Матриця орграфа, зображеного на рис. 2.13

s =	1	2	3	4	5
1	0	10	∞	30	100
2	∞	0	50	∞	∞
3	∞	∞	0	20	10
4	∞	∞	∞	0	60
5	∞	∞	∞	∞	0

Будемо обходити всі вершини за певними правилами. Спочатку $S=\{1\}$, наприкінці $S=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

На відміну від прийнятого раніше правила призначати значення s_{ij} 0 при відсутності шляху із вершини i до вершини j будемо задавати $s_{ij}=\infty$, а значення діагональних елементів буде $s_{ii}=0$, що більше відповідає постановці задачі. Якщо вершини правильно пронумеровані (алгоритм нумерації тут не розглядається), то нижче головної діагоналі всі елементи матриці приймають значення ∞.

Уведемо також до розгляду величину $D[i]$ – поточне значення найкоротшого шляху від вершини 1 до вершини i.

Алгоритм продемонструємо в таблиці 2.9.

Таблиця 2.9

Обчислення для орграфу, представленого на рис. 2.10, за алгоритмом Дейкстри

Ітерація	S	υ	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]	
Початок	{1}	–	10	∞	30	100	це S_{1j}, j=1..5
1	{1, 2}	2	10	60	30	100	
2	{1, 2, 4}	4	10	50	30	90	
3	{1, 2, 4, 3}	3	10	50	30	60	
4	{1, 2, 4, 3, 5}	5	10	50	30	60	

Алгоритм Дейкстри базується на принципі: якщо щось «добре» локально, то воно буде «добре» і глобально. Цей принцип тут використовується двічі. Перший раз – коли ми обираємо до розгляду наступну вершину для аналізу шляхів, що проходять через цю вершину – обираємо ту вершину, шлях до якої від попередньої вершини найкоротший. Другий раз ми користуємося цим принципом, коли приймаємо рішення відносно $D[i]$. Якщо шлях через наступну вершину коротший, тобто $D[i]_{n+1}<D[i]_n$, де n – номер ітерації, то замінюємо старе значення $D[i]$ на нове.

Для нашого прикладу спочатку виписуємо всі значення S_{1j} – довжини шляхів від вершини «1» до усіх інших. Як бачимо, найкоротшим шляхом від вершини «1» є шлях до вершини «2», тому на першому кроці вибираємо вершину «2».

Крок 1

$D[2]_2=D[2]_1=10$ (і далі 10);

$D[3]=min\{\infty, 10+50\}=60$, тому змінюємо значення $D[3]$;

$D[4]$ і $D[5]$ – не змінюються, тому що немає дуг із вершини *«2»* до них.

Із *«2»* вже доступна вершина *«3»*, але новий шлях із вершини *«1»* до неї більший, ніж шлях від вершини *«1»* до вершини *«4»*, тому включаємо до розгляду саме вершину *«4»*.

Крок 2

D[2] і *D[4]* – не змінюються;

D[3]=min{60, 30+20}=50;

D[5]=min{100, 30+60}=90.

Тепер залишилися неперевіреними шляхи, що ведуть через вершини *«3»* і *«5»*. Оскільки *D[3]<D[5]*, то включаємо до розгляду вершину *«3»*.

Крок 3

Зміниться *D[5]=30+20+10=60.*

Залишилася остання вершина *«5»*. В наведеному прикладі з неї не виходить жодної дуги, тому всі мінімальні шляхи не зміняться.

Крок 4

Без змін.

Ми знайшли усі мінімальні шляхи від вершини *«1»* до усіх інших. А якщо нам треба найкоротший? Тоді треба застосувати на кожному кроці *P[i]* зменшення вершини, яка безпосередньо передує цій вершині у найкоротшому шляху.

Для орграфу з рис. 2.10 масив ***P*** має наступні значення:

P[2]=1; P[3]=4; P[4]=1; P[5]=3.

Для визначення найкоротшого шляху, наприклад, від вершини *«1»* до вершини *«5»*, необхідно відслідкувати у зворотному порядку передуючі вершини, починаючи з вершини *«5»*. На підставі значень масиву ***P*** визначаємо, що вершині *«5»* передує вершина *«3»*, вершині *«3»* – вершина *«4»*, а вершині *«4»* – вершина *«1»*. Таким чином, найкоротший шлях з вершини *«1»* у вершину *«5»* складає наступна послідовність вершин: *«1»*, *«4»*, *«3»*, *«5»*, при цьому довжина шляху дорівнює 30+20+10=60.

2.5.2 Знаходження найкоротших шляхів між парами вершин (алгоритм Флойда)

Потрібний результат можна отримати, застосовуючи алгоритм Дейкстри до кожної вершини як початкової, якщо з неї виходить хоча б одна дуга. Але існує ще прямий спосіб знаходження найкоротших шляхів – *алгоритм Флойда*. Нехай вершини графу послідовно пронумеровані від *1* до n. Алгоритм Флойда використовує матрицю A розміром $n\times n$, в якій обчислюються довжини найкоротших шляхів. *C[i, j]* – матриця вартостей дуг. Для цього введемо матрицю *A[i, j]*, $1\leq i, j\leq n$.

Спочатку

A[i, j]=C[i, j], при цьому $a_{ii}=c_{ij}$, якщо шлях існує,

а якщо шлях $i \longrightarrow j$ не існує, то $a_{ij}=\infty$.

Над матрицею А виконується n ітерацій. Після кожної ітерації $A[i, j]$ містить значення найменшої довжини з шляхів (v_i, v_j), що не проходить через вершини з номером, більшим за k (вершини пронумеровані $1...n$). На k-й ітерації для обчислення матриці A застосовується формула:

$A_k[i, j]=min\{A_{k-1}[i, j], A_{k-1}[i, k]+A_{k-1}[k, j]\}$.

Нижній індекс k означає значення матриці A після k-ї ітерації. Графічна інтерпретація цієї формули представлена на рис. 2.14.

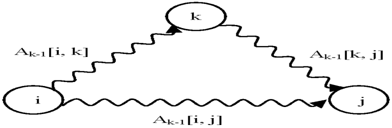

Рис. 2.14. Включення вершини k до шляху з вершини i до вершини j

Для обчислення $A_k[i, j]$ проводиться порівняння величини $A_{k-1}[i, j]$ з величиною $A_{k-1}[i, k]+A_{k-1}[k, j]$. Якщо шлях через вершину k менше ніж $A_{k-1}[i, j]$, то величина $A_k[i, j]$ змінюється.

Приклад

На рис. 2.15 зображено зважений орграф, а на рис. 2.16 – значення матриці після трьох ітерацій.

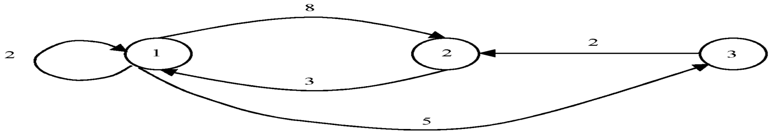

Рис. 2.15. Зважений орграф для прикладу

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	∞
3	∞	2	0

A_0[i, j]

	1	*2*	*3*
1	*0*	*8*	*5*
2	*3*	*0*	*8*
3	*∞*	*2*	*0*

A_1[i, j]

	1	2	3
1	0	8	5
2	3	0	8
3	5	2	0

A_2[i, j]

	1	2	3
1	0	7	5
2	3	0	8
3	5	2	0

A_3[i, j]

Рис. 2.16. Послідовність значень матриці **A**

Рівності $A_k[i, k]=A_{k-1}[i, k]$ та $A_k[k, j]=A_{k-1}[k, j]$ позначають, що на k-ій ітерації елементи матриці ***A*** в k-му рядку та k-му стовбці не змінюються. Введемо додатково матрицю P, в якій елемент $P[i, j]$, містить вершину k, яку отримують під час знаходження найменшого значення $A[i, j]$. Якщо $P[i, j]=0$, то найкоротший шлях складається з однієї дуги $i \rightarrow j$.

2.5.3. Знаходження центру орграфа

Після знаходження матриці найкоротших шляхів між парами вершин легко знаходиться *центр* орграфа. Цю задачу також можна розв'язати за допомогою алгоритму Флойда. Центр (центральна вершина) визначається через ексцентриситет (максимальне відхилення).

Ексцентриситет υ відносно вершини ω визначається як

$$max\{min\{<\upsilon \rightarrow \omega>\}\}, \text{ де: } \upsilon \in V;\ \omega \in V;\ \upsilon \neq \omega,$$

або

$$\max_{v=V}\{\text{мінімальна довжина шляху від } \upsilon \text{ вершини до } \omega\}$$

Центром орграфа G називається вершина з мінімальним ексцен-три-ситетом або центром орграфа є вершина, для якої максимальна відстань (довжина шляху) до інших вершин мінімальна, тобто $min(max(min\{L_{ij}\}))$.

Розглянемо зважений орграф, зображений на рис. 2.17. В цьому графі вершини мають наступні ексцентриситети (табл. 2.10).

Алгоритм:

1. Застосуємо процедуру **Floyd** до матриці ***C*** для обчислення матриці ***A***, яка містить усі найкоротші шляхи орграфу ***G***.
2. Знаходимо максимальне значення в кожному стовпці i матриці ***A***. Це значення дорівнює ексцентриситету вершини i.
3. Знаходимо вершину з мінімальним ексцентриситетом. Вона і буде центром графу ***G***.

Таблиця 2.10

Вершини із зазначеними ексцентриситетами графу рис. 2.15

Вершина	Ексцентриситет
a	∞
b	6
c	8
d	5
e	7

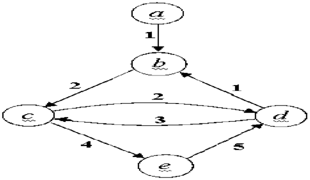

Рис. 2.17. Зважений орграф

Розглянемо ще один приклад. Матриця найкоротших шляхів для графу з рис. 2.17 представлена в табл. 2.11. Максимальне значення для кожного стовпця наведено в останньому рядку матриці.

Таблиця 2.11

Матриця найкоротших шляхів графа, представленого на рис. 2.17

	a	**b**	**c**	**d**	**e**
a	0	1	3	5	7
b	∞	0	2	4	6
c	∞	3	0	2	4
d	∞	6	8	5	0
e	∞	6	8	5	0
max	∞	6	8	5	7

Оскільки мінімальний екцентриситет має вершина *«d»*, то вона і є центром орграфа.