

## 2.4. ТОПОЛОГІЇ МЕРЕЖНИХ ГРАФІКІВ «ДУГИ-РОБОТИ» ТА «ВЕРШИНИ-РОБОТИ»

*Різні форми представлення мережних графіків, їх недоліки й переваги. Алгоритми взаємного перетворення графіків «дуги-роботи» та «вершини-роботи».*

Загальною основною всіх систем мережного планування та управління є використання моделей спеціального вигляду – мережних моделей. Об'єктами моделювання є комплекси робіт.

**Робота** – основний елемент комплексу. Вона являє собою або трудовий процес, в якому беруть участь люди, машини, механізми, перевезення зерна, проектування споруд, розв'язок задач і т. ін. Робота – це процес, що відбувається у часі. Мінімальна інформація про роботу – її назва чи номер, код і т. д. У залежності від задач, які вирішуються із застосуванням мережної моделі, робота може мати і ряд інших характеристик.

Однією з основних ознак комплексу є наявність відношень порядку між роботами. У більшості випадків ці відношення складаються з того, що деякі роботи не можуть бути початі перш ніж завершаться інші роботи.

Якщо робота  $\beta$  не може бути почата до того, як закінчена робота  $\alpha$ , то робота  $\alpha$  називається **передуючою** роботі  $\beta$ , а робота  $\beta$  – **наступною** за роботою  $\alpha$ .

Поряд з роботами в системах розглядаються елементи, які називаються **подіями**. Поняття «подія» означає певний стан в процесі виконання комплексу робіт. Кожну подію можна охарактеризувати як певну зміну складу виконаних або доступних для виконання робіт (фронту робіт), а саме:

а) поява умов, які дозволяють почати одну роботу або декілька робіт; ці роботи по відношенню до події називаються *безпосередньо передуючими* (вихідними), а подія по відношенню до робіт – *початковою*;

б) закінчення однієї або декількох робіт; ці роботи по відношенню до події називаються *безпосередньо попередніми* (вхідними), а подія по відношенню до робіт – *завершальною*.

Подія, на відміну від роботи, не є процесом і не має тривалості. Проміжна або завершальна подія відбувається в момент закінчення всіх безпосередньо передуючих до неї робіт: вихідна подія відбувається

в момент, коли з'являються умови для виконання усіх безпосередньо наступних робіт.

Реально існуючі відношення передування між роботами, подіями комплексу відображаються за допомогою *орієнтованого графу*.

*Мережа комплексу* – орієнтований граф, який відображає відношення передування та безпосереднього передування між роботами комплексу.

Вершина  $i$  передує вершині  $j$ , якщо в графі існує шлях, початком якого є вершина  $i$ , а кінцем – вершина  $j$  (шлях з вершини  $i$  у вершину  $j$ ). Якщо існує шлях з вершини  $i$  у вершину  $j$ , який складається з однієї дуги, то  $i$  безпосередньо передує  $j$ .

Дуга  $(i, j)$  передує дузі  $(k, l)$ , якщо вершина  $j$  передує вершині  $k$  або співпадає з нею; в останньому випадку дуга  $(i, j)$  безпосередньо передує  $j$ .

Дуга  $(i, j)$  передує вершині  $k$ , якщо вершина  $j$  передує вершині  $k$  або співпадає з нею; в останньому випадку дуга  $(i, j)$  безпосередньо передує вершині  $k$ . Вершина  $j$  передує дузі  $(k, l)$ , якщо вершина  $j$  передує вершині  $k$  або співпадає з нею; в останньому випадку вершина  $j$  безпосередньо передує дузі  $(k, l)$ .

Розрізняють два основних типи мереж:

- мережі, в яких роботам комплексу зіставлені вершини орієнтованого графа, а дуги фіксують умови передування між роботами (мережа типу «роботи-вершини» рис. 2.9)
- мережі, в яких роботам зіставлені дуги графа, а вершини відповідають визначеним подіям (мережа типу «роботи-дуги» рис. 2.10).

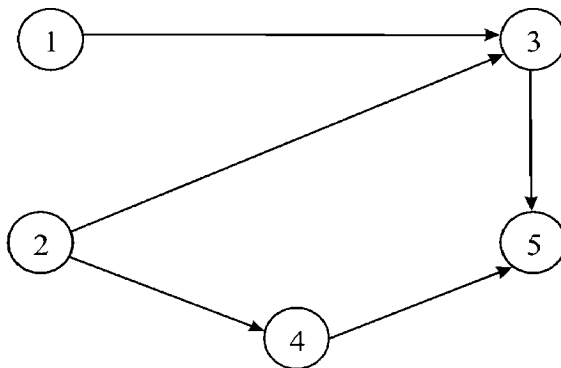
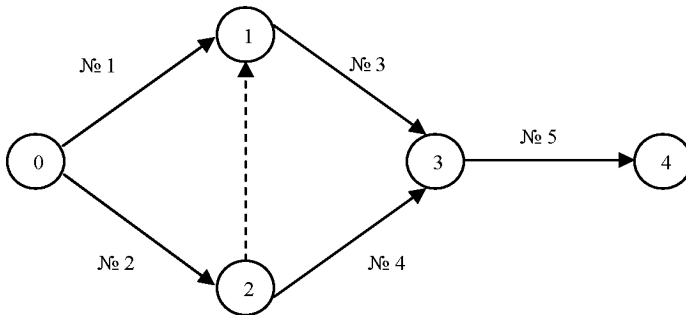


Рис. 2.9. Мережна модель типу «Роботи-вершини»

**Примітка.** Цифри в колах – номери робіт. Стрілки визначають відношення передування.



**Рис. 2.10.** Мережна модель типу «Роботи-дуги»

Для побудови мережі комплексу необхідно кожній роботі зіставити елемент мережі так, щоб різним роботам відповідали різні елементи і щоб зберігалися відношення передування, тобто відношення передування між елементами мережі, які відповідають роботам, мало місце тоді і тільки тоді, коли воно існує для відповідних робіт.

Під час будування мережі типу «роботи-вершини» встановлюється взаємно однозначне співвідношення між роботами комплексу та вершинами мережі, причому роботи та відповідні вершини отримують однакові коди. Якщо робота  $\alpha$  безпосередньо передує роботі  $\beta$ , в мережу вводиться дуга  $(\alpha, \beta)$ . Сукупність отриманих таким чином вершин та дуг і є мережа комплексу; вершини такої мережі дають назви відповідних робіт, а дуги називають зв'язками.

**Приклад**

Інформація про комплекс міститься в таблиці 2.5.

*Таблиця 2.5*

**Дані про роботи та їх порядок виконання**

Код роботи	Найменування роботи	Код безпосередньо попередніх робіт
1	Збір вузлів виробу	–
2	Виготовлення деталей виробу та пристроїв випробувального стенду	–
3	Збір дослідного зразка виробу	1, 2
4	Устаткування випробувального стенду	2
5	Випробування дослідного зразка виробу на стенді	3, 4

Відповідний мережний графік типу «роботи-вершини» представлений на рис. 2.9.

Під час будівництва мережі типу «роботи-дуги» кожній роботі комплексу повинна відповідати дуга мережі, а вершини використовуються для сполучення цих дуг, яке відображає відношення передування (безпосереднього передування) між роботами. Якщо робота  $\alpha$  безпосередньо передує роботі  $\beta$ , то в мережі це, як правило, відображається за допомогою вершини, для якої дуга, яка відповідає роботі  $\alpha$ , є вхідною, а дуга, яка відповідає роботі  $\beta$  – вихідною.

Для правильного відображення відношень порядку в комплексі під час будівництва мережі типу «роботи-дуги», необхідно використовувати додаткові дуги, які не відповідають ніяким роботам комплексу. Додатковим дугам зазвичай присвоюють спеціальну ознаку; в мережному графіку комплексу їх зображують за допомогою штрихової лінії. Так, за допомогою додаткових дуг відношення порядку (зв'язки) між роботами розглянутого у табл. 2.6 прикладу можуть бути зображені так, як показано на рис. 2.10.

Моделі, орієнтовані на події, використовуються порівняно рідко. Вони не містять чіткого визначення робіт. Зв'язки між подіями комплексу не обов'язково розглядаються як роботи, що виконуються. А моделі, що орієнтовані на роботи, отримали найбільше розповсюдження.

Нижче наводиться один із алгоритмів перетворення мережних графів типу «дуги-роботи» до графів типу «вершини-роботи».

Розглянемо граф типу «дуги-роботи», що заданий у таблиці 2.6.

Таблиця 2.6

**Приклад завдання графу типу «дуги-роботи»**

Передуюча вершина	1	1	1	2	2	2	3	3	4	5	6
Наступна вершина	2	3	4	5	4	3	5	6	7	7	7
Позначення роботи	A	C	B	D	E	F	G	H	J	I	K
Термін виконання	5	8	4	2	9	0	3	5	6	3	7

Візуально граф, що представлений у табл. 2.6, зображено на рис. 2.11, де у дужках після коду роботи наведено термін її виконання.

В подальшому ми не будемо використовувати характеристику роботи «термін виконання». Наведена інформація про терміни тут нам потрібна тільки для того, щоб помітити на графі роботу **F** (дуга (2→3)) як фіктивну.

Для перетворення мережних графів типу «дуги-роботи» до графів типу «вершини-роботи» треба виконати таку послідовність дій.

1. Уведемо дві фіктивні роботи «**Begin**» і «**End**», назви яких говорять самі за себе.

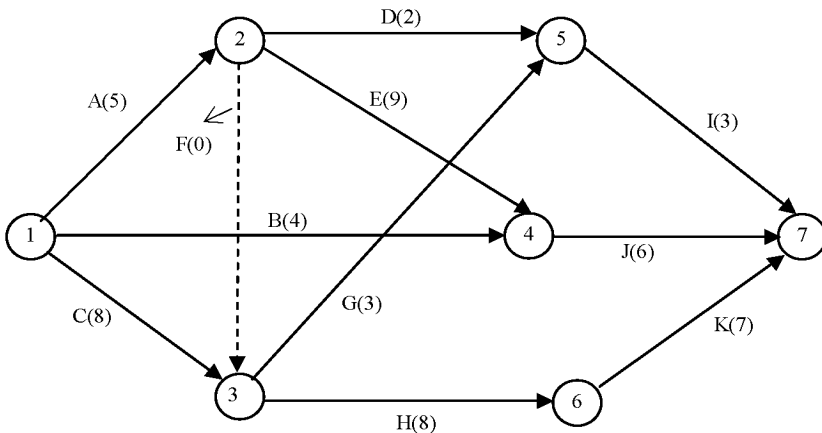


Рис. 2.11. Орграф, представлений у табл. 2.6

2. Нанесемо на рисунок графа вершину «Begin» та вершини 1-го фронту. Номер фронту дорівнює максимальному числу кроків (кількість пройдених вершин, включаючи початкову, до даної роботи). З'єднуємо вершину роботи «Begin» з вершинами 1-го фронту. Для нашого прикладу це показано на рис. 2.11.

3. Рекурсивно, до вичерпання усіх робіт графа типу «дуги-роботи», виконуємо операції, що подібні операціям п. 2, наносячи на рисунок вершини робіт 2-го, 3-го і т. д. фронтів, і з'єднуємо вершини робіт між собою у відповідності до заданої топології. При цьому, фіктивні роботи, що були в графі типу «дуги-роботи», не наносяться, залишаються тільки залежності чергування робіт, які відображаються відповідними дугами. У нашому прикладі серед вершин другого фронту зникає фіктивна робота F, але фіксація залежностей між роботами  $A \rightarrow G$ ,  $A \rightarrow H$  тепер зафіксовано безпосереднє. При цьому можливі випадки коли по одному шляху одна й та ж вершина може належати різним фронтам. До таких у нашому прикладу відноситься вершина J. Для нашого прикладу, як бачимо на рис. 2.11, усі вершини вичерпані на 3-му фронті.

4. Наносимо вершину «End» і дуги від фінішних робіт, тобто від робіт, які відповідають на початковому графі ребрам, що заходять до кінцевої вершини (рис. 2.12).

Цей граф теж можна задати і в табличній формі, як, наприклад, у табл. 2.7.

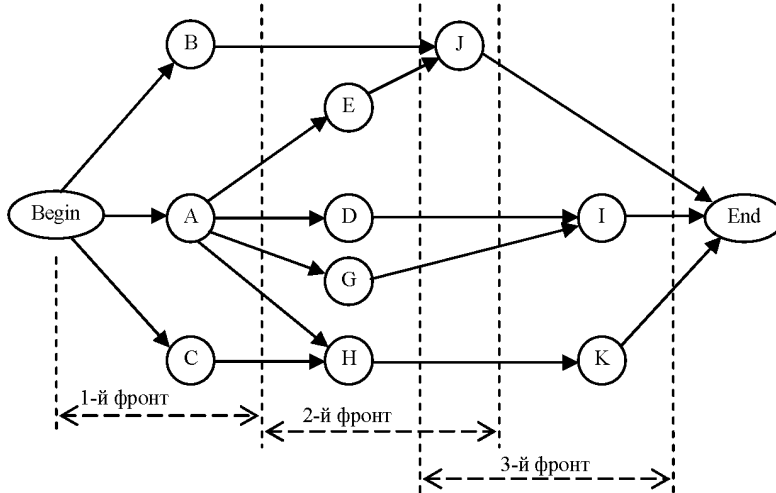


Рис. 2.12. Граф з рис. 2.8, перетворений до типу «вершини-роботи»

Таблиця 2.7

Представлення графа, що на рис. 2.9

Передуюча вершина	Begin	Begin	Begin	A	A	A	A	B	C	C	D	E	G	H	J	I	K
Наступна вершина	A	B	C	D	E	G	H	J	G	H	I	J	I	K	End	End	End