УДК 517.9, 519.7, 330.4

Данілов В.Я., Жирова А.О.

СКЛАДНІ ТИПИ НЕВИЗНАЧЕНОСТЕЙ У МОДЕЛЯХ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

Розв'язана задача знаходження видів апостеріорних оцінок та їх похибок для динамічних моделей економічних систем за одночасної наявності невизначеностей у початкових умовах, спостереженнях і рівнянні динаміки.

Ключові слова: *апостеріорні оцінки, динамічні моделі економічних систем, рівняння динаміки.*

Решена задача нахождения видов апостериорных оценок и их погрешностей для динамических моделей экономических систем при одновременном наличии неопределенности в начальных условиях, наблюдениях и уравнении динамики.

Ключевые слова: *апостериорные оценки, динамические модели іконо-мических систем, уравнения динамики.*

The task of finding the types of a posteriori estimations and their errors is decided for the dynamic models of the economic systems at the simultaneous presence of indeterminacies in initial conditions, observations and equations of dynamics.

Key words: *aposteriori estimanations, the dynamic models of economic systems, equations of dynamics.*

Актуальність. Багато задач економічної динаміки зводяться до дослідження систем звичайних диференціальних рівнянь, наприклад, динамічна модель Кейнса [1]. У динамічних економічних системах, як правило, одночасно присутні невизначеності кількох типів, оскільки спостерігається лише частина з економічних показників рівняння динаміки, початкові умови відомі лише наближено, а балансові рівняння та спостереження збурені.

Постановка задачі. Нехай динамічна економічна система описується системою диференційних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f_1(t), \qquad x(t_0) = x_0, \ t \in [t_0, T], \tag{1}$$

де $A(t) = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1,n}$ – матриця, $f_1(t) \in R^n$, вважаємо також, що $f_1(t) \in L_2[t_0, T]$.

Під розв`язком (1) будемо розуміти

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} A(s)x(s)ds + \int_{t_0}^{t} f_1(s)ds,$$

де $t \in [t_0, T]$.

Рівняння (1) неоднорідне. Для простоти вважаємо $f_1(t)$ неперервною на $[t_0, T]$, тоді природно записати розв`язок (1) через фундаментальну матрицю відповідної однорідної системи:

$$x(t) = \Phi(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t, s) f_1(s)ds,$$

де фундаментальна матриця $\Phi(t, s)$ відшукується, як розв'язок задачі Коші

$$\frac{d\Phi(t,s)}{dt} = A(t)\Phi(t,s), \ \Phi(s,s) = E.$$

Нехай на $[t_0, t_1]$ спостерігається $y(t) \in R^m$,

$$y(t) = H(t)x(t) + f_2(t), \qquad (2)$$

$$H(t) = (h_{ij}(t))_{i=\overline{1,m},\, j=\overline{1,n}},$$

де $h_{ij}(t)$ – неперервні хоча б на інтервалі спостереження $[t_0, t_1]$, $f_2(t) \in L_2[t_0, t_1]$.

Позначимо

$$G \in R^n \times L_2[t_0, t_1] \times L_2[t_0, t_1] \qquad (3)$$

область невизначеності, яку будемо вважати обмеженою, випуклою та замкнутою.

Ставимо задачу побудови апостеріорного оцінювання функціоналу:

$$l(x) = \int_{t_0}^{t_1} (l(t), x(t))dt + (a\ (t), x(t_1))$$

від розв'язку (1) за спостереженнями (2) в умовах невизначеностей початкових умов, правих частин балансового рівняння та правих частин спостережень, які задаються областю невизначеності:

$$G = \{(x_0, f_1, f_2)\} \in R^n \times L_2[t_0, t_1] \times L_2[t_0, t_1],$$

де G – обмежена, замкнута, випукла множина.

Розв'язок. Метод, який використовується у даній роботі, представляє підхід, що юазується на результатах [2]. При гарантованому оцінюванні в умовах невизначеності використовуються два типи оцінок: апріорні та апостеріорні.

Апостеріорне оцінювання враховує всі наявні історичні дані тому, як правило, дає кращі оцінки. Проте слід зауважити, що для стохастичної постановки задачі апостеріорне оцінювання не використовується, через принципові труднощі, які не дають можливості розумно визначити, що таке апостеріорна множина. Тому у заній роботі розглядаємо нестохастичну постановку.

Апостеріорне оцінювання. Розглядається рівняння динаміки (1) при наявних спостереженнях (2) та області невизначеності

$$G = \{(x_0, f_1, f_2)\} \in R^n \times L_2 \times L_2$$

Означення. Множину

$$G_y = \{(x_0, f_1) : (x_0, f_1, f_2) \in G\}$$

називатимемо апостеріорною.

Якщо розглянути два розв'язки рівня (1) x_1, x_2 з різними початковими умовами $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$, то вони характеризується парами $x_0^{(i)}$, $f_1^{(i)}$, $i = \overline{1,2}$

$$\hat{f}_1^{(1)} = (x_0^{(1)}, f_1^{(1)}) \in G_y, \ \hat{f}_1^{(2)} = (x_0^{(2)}, f_1^{(2)}) \in G_y.$$

Будувати оцінки функціоналу $l(x)$ від розв'язку (1) будемо з таких міркувань:

a) знайдемо для довільних двох розв'язків x_1, x_2 рівняння (1)

$\underset{\hat{f}_1^{(2)} \in G_y}{S\text{up}} \left| l(x_1) - l(x_2) \right|$, тобто уявно фіксуємо один із розв'язків, наприклад x_1, а по іншому відшукаємо *Sup* на області G_y;

b) в якості апостеріорної оцінки $\hat{l}(x)$, будемо брати таку, що

$$\inf_{\hat{f}_1^{(1)} \in G_y} \sup_{\hat{f}_1^{(2)} \in G_y} \left| l(x_1) - l(x_2) \right| = \sup_{\hat{f}_1^{(2)} \in G_y} \left| \hat{l}(x) - l(x_2) \right| . \tag{4}$$

Означення. Оцінку $\hat{l}(x)$ знайдену з умови (4) назвемо апостеріорною мінімаксною оцінкою лінійного функціоналу від розв'язку задачі (1)-(3).

Означення. Величину

$$\sigma_a = \sup_{\hat{f}_1^{(2)} \in G_y} \left| \hat{l}(x) - l(x_2) \right|$$

називатимемо похибкою апостеріорної оцінки $\hat{l}(x)$.

В означенні похибки ми підкреслюємо, що похибка залежить від вектора *a*.

Цим вектором ми враховуємо кінцеві умови.

Твердження 1. Апостеріорна мінімаксна оцінка динамічної економічної системи, яка описується балансовим рівнянням (1) за спостереженнями (2) і невизначеностями (3),

$$\hat{l}(x) = \frac{1}{2} \left| \sup_{G_y} l(x) + \inf_{G_y} l(x) \right| , \tag{5}$$

а похибка оцінювання

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \left| \sup_{G_y} l(x) - \inf_{G_y} l(x) \right| . \tag{6}$$

Доведення цього твердження безпосередньо витікає з результатів [2].

Розглянемо додатково задачу в спряженому просторі.

Введемо рівняння

$$\begin{cases} -\dfrac{dz}{dt} = A^T(t)z(t) - H^T(t)u(t) + l(t) \\ z(t_1) = a \end{cases} \tag{7}$$

Нехай $z(t)$ – розв'язок (7).

Введемо позначення:

$$z(f) = (z(t_0), x_0) + \int_{t_0}^{t_1} (z(t), f_1(t))dt - \int_{t_0}^{t_1} (u(t), f_2(t))dt ,$$

$$\overline{R}(u,z) = \sup_{G_y} z(f), \ \underline{R}(u,z) = \inf_{G_y} z(f) .$$

Позначимо множину тих *u*, на яких досягається $\inf_{G_y} [\overline{R}(u,z) - \underline{R}(u,z)]$ через *U*.

Твердження 2. Якщо множина *U* не пуста, то лінійна мінімаксна оцінка $\hat{l}(x)$ існує,

$$\hat{l}(x) = \int_{t_0}^{t_1} (\hat{u}(t), y(t))dt + \hat{c} ,$$

похибка оцінювання $\sigma_a = \frac{1}{2} \left| \overline{R}(\hat{u}, \hat{z}) - \underline{R}(\hat{u}, \hat{z}) \right|$,

де $\hat{u} \in U$, $\hat{z}(t)$ – розв'язок (7) при $u = \hat{u}$.

ВИСНОВКИ

Розглянуто динамічну економічну систему, що описується системою звичайних диференціальних рівнянь з невизначеностями, які враховують одночасно невизначеності початкових умов, невизначеності рівняння динаміки, яка є наслідком збурень економічної системи та невизначеності спостережень. Вказано вид апостеріорних оцінок та їх похибок розглянутої динамічної моделі економічної системи.

ЛІТЕРАТУРА

1. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем: учебник для студентов вузов, обучающихся по специальности 061800 «Математические методы в экономике» / В.А. Колемаев. – М.: ЮНИТИ-ДИАНА, 2005. – 295 с. ISBN 5-238-00969-0.
2. Бублик Б.Н., Данілов В.Я., Наконечный А.Г. Некоторые задачи наблюдения и управления в линейных системах. – К.: УМК ВО, 1988. – 191 с.

Рецензенти: д.т.н., проф. Бідюк П.І.,
д.т.н., проф. Фісун М.Т.

Стаття надійшла до редколегії 23.12.08