

УДК 532.511

Сердюченко А.М., Дорфман Є.В.

## Дії над рядами Фур'є в нелінійних моделях поверхневих хвиль на воді

*Розглянуто дії над рядами Фур'є для періодичних функцій у межах адитивних, мультиплікативних, експоненціальних операцій та систем функціональних рівнянь, які виникають при дослідженні нелінійних поверхневих хвиль на глибокій воді. Отримано відповідні алгоритми для розрахунків коефіцієнтів рядів Фур'є при застосуванні до них вказаних операцій, а також наведено поліпшений метод визначення Фур'є-коефіцієнтів, побудований на застосуванні сплайн-апроксимації для заданої функції.*

*Applications of the additive, multiplicative and exponential operations for the Fourier series of periodical functions related to the investigations of nonlinear water surface waves are considered. Corresponding algorithms for the Fourier-coefficients in the framework of these operations are derived and enhanced algorithm for the calculation of the Fourier coefficients based on the spline-approximation of the functions are presented too.*

**Формулювання проблеми.** Ряди Фур'є належать до одного з найбільш ефективних методів представлення періодичних функцій [1, 2] з широким застосуванням їх у прикладних дослідженнях. Особливо продуктивними ряди та інтеграли Фур'є виявляються при розв'язку хвильових задач, зокрема в лінійній гідродинаміці морських хвиль [3] та гідродинаміці суден [4]. Гармонічні функції належать до множини загальних розв'язків рівняння Лапласа [3, 4], і тому в межах лінійного наближення з їх допомогою можна отримати інші періодичні, нестационарні чи нерегулярні хвильові рухи для краївих задач поширення, дифракції та випромінення хвиль в рідині та інших середовищах [5].

При розгляді нелінійних краївих задач принцип суперпозиції розв'язків втрачає свою справедливість, але й у цьому більш загальному наближенні ряди (та інтеграли) Фур'є продовжують залишатися в арсеналі математичних методів дослідника, проте з відповідними узагальненнями. Зокрема, для так званого слабко нелінійного наближення, коли нелінійні ефекти в задачі є достатньо малими, слід враховувати нелінійні взаємодії між окремими гармонічними хвильами у розв'язках, що призводить до часової еволюції їх амплітуд. На цьому шляху з'явилися, зокрема, нелінійні еволюційні рівняння Шредінгера для хвильових рухів з вузькими спектрами [6] та еволюційні рівняння Захарова при довільних за ширину спектрах нерегулярних хвильових полів [7].

Для сильно нелінійних хвиль на воді, які зазнають деформування профілю, перевертання та руйнації гребенів при великій крутості, а відповідні функції стають багатозначними, проблема із застосуваннями до її досліджень Фур'є-аналізу містить ще більше питань принципового та технічного характеру, проте є грунтовні підстави стверджувати, що до певної міри ця техніка також може виявитися корисною. Зокрема, техніка рядів Фур'є довела свою працездатність у класичних роботах при дослідженні стаціонарних періодичних хвиль Стокса скінченної амплітуди [8].

Одне з перших питань, що виникає в межах нелінійних наближень, стосується дії над рядами Фур'є в рамках нелінійних операцій, зокрема, операції множення, визначення цілих степенів, експоненціювання та інш. для шуканих функцій, представлених рядами Фур'є. Важливо розробити такі алгоритми, які б утворювали замкнену алгебру вказаних операцій з коефіцієнтами рядів Фур'є та були ефективними при проведенні чисельних розрахунків у практичних застосуваннях. Крім того, таке класичне питання, як визначення коефіцієнтів рядів через відповідні інтеграли від заданої функції [1], теж не втрачає актуальності, якщо брати до уваги обчислювальну ефективність та точність даних розрахунків [2, 9].

Таким чином, метою публікації є отримання алгоритмів розрахунку коефіцієнтів рядів Фур'є при застосуванні до них низки операцій адитивного, мультиплікативного та експоненціального характеру, у тому числі в контексті розв'язку систем функціональних рівнянь, що стосуються нелінійних хвиль на воді, та з'ясування питання ефективної чисельної оцінки інтегралів при визначенні коефіцієнтів рядів Фур'є.

Розглянемо ряди Фур'є в такому записі:

$$\zeta(\theta) = \sum_n \left( a_n^c \cos n\theta + a_n^s \sin n\theta \right) = \sum_n \left( a_n^c C_n + a_n^s S_n \right) = \Sigma_a (a_n^{c,s}; \theta); \quad (1)$$

$n = 0, 1, 2, \dots, N; N \gg 1,$

та  $\Sigma_b (b_n^{c,s}; \theta)$ ,  $\Sigma_c (c_n^{c,s}; \theta)$  і їм подібні, де  $\theta$  – фазова координата ( $\theta \in [-\pi; +\pi]$ ) і  $a_n^{c,s}$ ,  $b_n^{c,s}$  та ін. –  $\cos$ ,  $\sin$  – коефіцієнти відповідних рядів Фур'є.

За допомогою рядів Фур'є (1) безпосередньо можна описувати нелінійні стаціонарні періодичні хвилі на поверхні води, зокрема, класичні хвилі Стокса із симетричними гребенями [8, 10], чи, при певних припущеннях, періодичні вітрові хвилі із асиметричними гребенями [11], рис. 1. Крім того, дана техніка є складовою методів багатьох масштабів при дослідженні нелінійних хвиль на воді з часово-просторовими модуляціями параметрів (амплітуд та фаз) [12].

Що стосується питання збіжності рядів Фур'є, то у межах даної роботи вони вважаються збіжними на інтервалі визначення за виключенням, можливо, ізольованих точок, в яких функції, що відповідають фізичним характеристикам хвиль, можуть набувати багатозначності, мати кутові точки чи певні розриви.

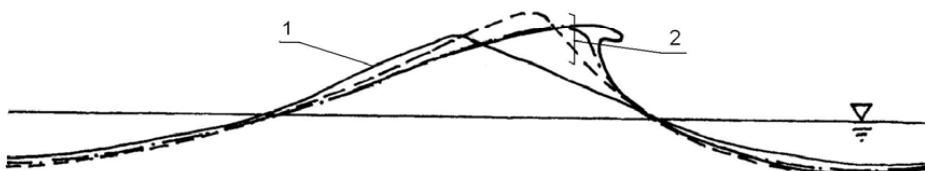


Рис. 1. Загальний вигляд періодичних хвиль; 1 – хвилі Стокса, 2 – вітрова хвиля

1. **Поліпшений розрахунок коефіцієнтів рядів Фур'є.** Основну розрахункову частину гармонічного аналізу функції, заданої на дискретній множині вузлових точок (далі сіткової функції) становить обчислення коефіцієнтів ряду Фур'є за відповідними квадратурними формулами [12]. У той же час чисрова оцінка будь-якої квадратурної формули базується на використанні певної інтерполяції для сіткової функції, і залежно від виду інтерполяції можна отримати ту чи іншу точність обчислень. Сучасні дослідження показали [2, 9, 13], що оптимальною за трудомісткістю та ефективністю в обчислennях є апроксимація сіткової функції за допомогою кубічних сплайнів. Тобто для заданої функції  $\zeta(\theta)$  маємо:

$$\zeta(\theta) = \varphi_i(\theta) = a_i + b_i(\theta - \theta_i) + c_i(\theta - \theta_i)^2 + d_i(\theta - \theta_i)^3,$$

де  $\theta \in [\theta_i, \theta_{i+1}]$ ,  $i = 0, 1, \dots, J-2$  і коефіцієнти сплайну  $a_i, b_i, c_i, d_i$  визначаються за допомогою методу прогонки [9];  $J$  – кількість вузлових точок.

Відповідно Фур'є-коефіцієнти обчислюються наступним чином:

$$a_n^{c,s} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \zeta(\theta) (\cos, \sin) n \theta d\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{i=0}^{J-2} \Phi_i^{c,s}(n, \theta)|_{\theta_i}^{\theta_{i+1}}, \quad (2)$$

де функції  $\Phi_i^{c,s}(n, \theta)$  визначаються за формулами:

$$\begin{aligned} \Phi_i^{c,s}(n, \theta) = & (\sin, -\cos) n \theta \left\{ a_i \frac{1}{\alpha} + b_i \frac{\theta - \theta_i}{\alpha} + c_i \left[ \frac{(\theta - \theta_i)^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha^3} \right] + d_i \left[ \frac{(\theta - \theta_i)^3}{\alpha} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{6(\theta - \theta_i)}{\alpha^3} \right] \right\} + (\cos, \sin) n \theta \left\{ b_i \frac{1}{\alpha^2} + c_i \frac{2(\theta - \theta_i)}{\alpha^2} + d_i \left[ \frac{3(\theta - \theta_i)^2}{\alpha^2} - \frac{6}{\alpha^4} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\alpha = n\pi$  і для граничного випадку  $n=0$  маємо:

$$\begin{aligned} \Phi_i^c(0, \theta) &= a_i(\theta - \theta_i) + \frac{1}{2} b_i(\theta - \theta_i)^2 + \frac{1}{3} c_i(\theta - \theta_i)^3 + \frac{1}{4} d_i(\theta - \theta_i)^4, \\ \Phi_i^s(0, \theta) &\equiv 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Алгоритм (2)–(4) фактично базується на ідеї мінімізації сумарного квадрата другої похідної функції на інтервалі апроксимації [13]. Але, з іншого боку, якщо сіткова функція отримана в результаті експериментальних досліджень чи комп'ютерних розрахунків, то вона може містити, зокрема, високочастотний “шум”, обумовлений похибками вимірювань чи нестійкістю обчислювальної схеми. Цей “домішок” буде погіршувати точність розрахунку Фур'є-коефіцієнтів для гармонік високого порядку, і тому для зменшення даного ефекту розроблено й більш гнучкі схеми апроксимації сплайнами [9, 13]. Одна з таких схем полягає у лінійній інтерполяції між вже вказаною мінімізацією сумарного квадрата другої похідної  $\sum_i (\zeta''(\theta_i))^2$  та мінімізацією сумарної середньої квадратичної похибки для самої функції  $\sum_i (\zeta(\theta_i) - \varphi_i)^2$  [13]. Тоді комбінований мінімізуючий функціонал матиме вигляд:

$$\mathfrak{J}(p; a_j \dots d_j) = p \sum_i (\zeta(\theta_i) - \varphi_i)^2 + (1-p) \sum_i (\zeta''(\theta_i))^2, \quad (5)$$

де параметр  $p \in [0; 1]$  є вільним параметром лінійної інтерполяції, який слід підбирати при тестових розрахунках таким чином, щоб досягти як прийнятної точності інтерполяції, так і звести до мінімуму можливий високочастотний “шум” у вищих гармоніках.

Застосування сплайн-апроксимацій у гармонічному аналізі (у тому чи іншому варіанті) дає змогу суттєво покращити точність розрахунку коефіцієнтів рядів Фур'є та значно збільшити кількість членів рядів без відповідного збільшення кількості вузлових точок визначення сіткової функції. На рис. 2 як приклад наведено розрахунки для профілю хвилі Стокса при застосуванні сплайн-апроксимацій, і, як видно, навіть при п'яти гармоніках ряд Фур'є дає достатньо добри результасти.

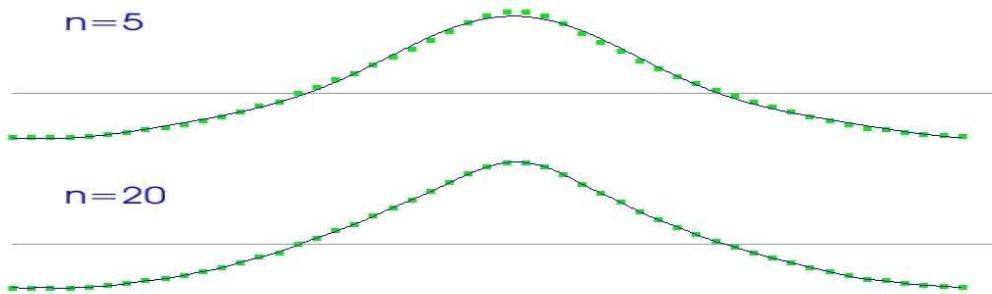
**2. Адитивні операції.** До адитивних операцій, як відомо [1], відносять додавання, диференціювання та інтегрування, і для рядів Фур'є маємо:

$$\begin{aligned} \alpha \Sigma_a(a_n^{c,s}; \theta) \pm \beta \Sigma_b(b_n^{c,s}; \theta) &= \Sigma_c(c_n^{c,s}; \theta), \quad \alpha, \beta = const; \\ \frac{d}{d\theta} \Sigma_a(a_n^{c,s}; \theta) + \int \Sigma_b(b_n^{c,s}; \theta) d\theta &= \Sigma_d(d_n^{c,s}; \theta), \end{aligned} \quad (6)$$

для яких відповідні коефіцієнти результуючих рядів у правій частині визначаються очевидними формулами:

$$c_n^{c,s} = \alpha a_n^{c,s} \pm \beta b_n^{c,s}, \quad d_n^{c,s} = \pm n a_n^{s,c} \mp n^{-1} b_n^{s,c}.$$

Як видно, операція диференціювання погіршує збіжність рядів Фур'є.



**Рис 2.** Розрахунок профілю хвилі Стокса (□ □ □ □) при  $N=5$  та  $N=20$

Застосування адитивних операцій (6) також породжує ряди Фур'є, і в цій частині відповідна алгебра є замкненою, але з погляду практичного застосування вона обмежується тільки лінійними задачами. При розгляді нелінійних задач потрібно додатково оперувати низкою нелінійних операцій, зокрема, мультиплікативних операцій над рядами Фур'є.

**3. Мультиплікативні операції.** Розглянемо наступні мультиплікативні операції – добутки та цілі додатні степені рядів Фур'є. Добуток двох рядів:

$$\Sigma_a(a_n^{c,s};\theta) \times \Sigma_b(b_n^{c,s};\theta) = \Sigma_p(p_n^{c,s};\theta) \quad (7)$$

породжує ряд Фур'є, коефіцієнти якого визначаються формулами:

$$\begin{aligned} p_n^{c,s} &= \frac{1}{2} (\hat{\Sigma}_n^{c,s} + \tilde{\Sigma}_n^{c,s}), & \hat{\Sigma}_n^{c,s} &= \sum_{i=0}^n (a_i^c b_{n-i}^{c,s} \mp a_i^s b_{n-i}^{s,c}), \\ \tilde{\Sigma}_n^{c,s} &= \pm \sum_{i=0}^{N-n} [(a_i^c b_{n+i}^{c,s} \pm a_i^s b_{n+i}^{s,c}) + v_n^{c,s} (a_{i+n}^c b_i^{c,s} \pm a_{i+n}^s b_i^{s,c})], \end{aligned} \quad (8)$$

де множник  $v_n^{c,s} = 0$  при  $n=0$  і  $v_n^{c,s} = \pm 1$  при  $n>0$ .

На основі операції (7) і залежностей (8) можна отримати алгоритм визначення  $j$ -го цілого додатного степеня ряду Фур'є:

$$(\Sigma_a(a_n^{c,s};\theta))^j = \Sigma_{ja}(a_{jn}^{c,s};\theta), \quad j > 1, \quad (9)$$

який також породжує ряд Фур'є з коефіцієнтами  $a_{jn}^{c,s}$ , що визначаються наступними рекурентними формулами:

$$\begin{aligned} a_{jn}^{c,s} &= \frac{1}{2} (\hat{\Sigma}_{jn}^{c,s} + \tilde{\Sigma}_{jn}^{c,s}), & \hat{\Sigma}_{jn}^{c,s} &= \sum_{i=0}^n (a_i^c a_{j-1,n-i}^{c,s} \mp a_i^s a_{j-1,n-i}^{s,c}), \\ \tilde{\Sigma}_{jn}^{c,s} &= \sum_{i=0}^{N-n} [(a_i^c a_{j-1,n+i}^{c,s} \pm a_i^s a_{j-1,n+i}^{s,c}) + v_n^{c,s} (a_{i+n}^c a_{j-1,i}^{c,s} \pm a_{i+n}^s a_{j-1,i}^{s,c})], \end{aligned} \quad (10)$$

де множник  $v_n^{c,s}$  має вказаний вище зміст.

Залежності (6)–(10) потребують одне пояснення. При операціях добутку та визначення степенів довжина результуючих рядів Фур'є за індексом  $n$  буде зростати і тому при потребі залишатися в заданих межах  $n \leq N$  слід або обмежувати результуючі ряди при  $n=N$ , або іншим чином, оперувати розширеними первинними рядами з нульовими коефіцієнтами при  $kN \geq n > N$ ,  $k > 1$ . Досвід практичних розрахунків показав, що для нелінійних хвиль на воді оптимальними з погляду точності вхідних даних (рівня “шуму”), результатів та обсягу розрахунків є граничні значення  $N \approx 20–25$ .

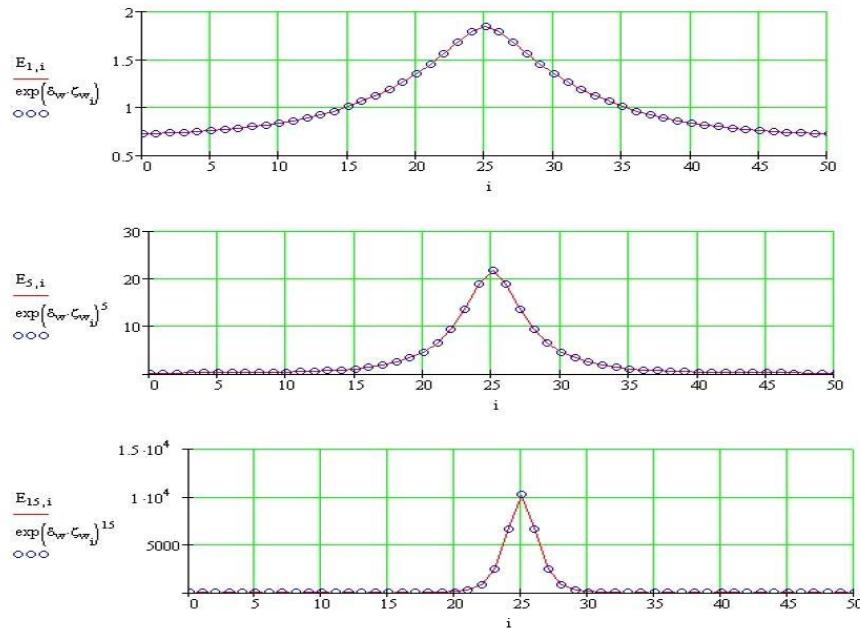
**4. Операції експоненціювання.** Для нелінійних хвиль на воді визначення гідродинамічних характеристик, наприклад, поля швидкостей часток рідини на хвильовій поверхні, пов'язане із застосуванням операції експоненціювання до рядів Фур'є. Тому перейдемо далі до їх розгляду і визначимо спочатку:

$$\exp(\delta \cdot \Sigma_a(a_n^{c,s}; \theta)) = 1 + \Sigma_e(e_n^{c,s}; \theta), \quad \delta = \text{const}, \quad (11)$$

де для результуючого ряду Фур'є  $\Sigma_e(e_n^{c,s}; \theta)$  коефіцієнти  $e_n^{c,s}$  визначаються формулою:

$$e_n^{c,s} = \sum_{k=1}^K \frac{\delta^k}{k!} a_{kn}^{c,s}, \quad (12)$$

в якій коефіцієнти  $a_{kn}^{c,s}$  розраховуються за формулами (10), а величина  $K > 1$  визначається умовою збіжністю ряду Тейлора для експоненти, застосованого при отриманні формул (11) та (12). Збіжність, у свою чергу, залежить від величини множника  $\delta$ , який для хвиль на воді має зміст крутості хвильового схилу  $i$ , наприклад, для хвиль Стокса не перевищує значення 0,45. Розрахунки показали, що прийнятні результати можна отримати при  $K = 5$  (рис. 3).



**Рис. 3.** Степені експоненти при  $m=1, 5, 15$  для хвилі Стокса з крутістю  $1/7$   
(◊ ◊ ◊ ◊ – числові розрахунки за формулами (10)–(14),  $i$  – номер вузової точки)

З допомогою формул (9)–(12) можна отримати залежності для цілих степенів експоненти (8):

$$[\exp(\delta \Sigma_a(a_n^{c,s}; \theta))]^m = \exp(m \delta \Sigma_a(a_n^{c,s}; \theta)) = 1 + \Sigma_{mc}(c_{mn}^{c,s}; \theta), \quad m > 1, \quad (13)$$

де коефіцієнти результуючого ряду Фур'є  $c_{mn}^{c,s}$  визначаються формулами

$$c_{mn}^{c,s} = \sum_{r=1}^m C_m^r e_{rn}^{c,s}, \quad e_{1n}^{c,s} \equiv e_n^{c,s}; \quad C_m^r = \frac{m!}{r!(m-r)!}, \quad (14)$$

в яких коефіцієнти  $e_{rn}^{c,s}$  розраховуються за рекурентними формулами (10) через коефіцієнти  $e_n^{c,s}$  (формула (12)).

**5. Системи рівнянь.** Перейдемо тепер до розгляду систем рівнянь, які виникають при дослідженні нелінійних хвиль на воді, і, зокрема, розглянемо наступну систему двох функціональних рівнянь:

$$\begin{aligned} \sum_m \left( \phi_m^c C_m + \phi_m^s S_m \right) \exp \left( \delta \Sigma_a (a_n^{c,s}; \theta) \right)^m &= \Sigma_\psi (\psi_n^{c,s}; \theta), \\ \sum_m m \left( \phi_m^c C_m + \phi_m^s S_m \right) \exp \left( \delta \Sigma_a (a_n^{c,s}; \theta) \right)^m &= \Sigma_w (w_n^{c,s}; \theta), \end{aligned} \quad (15)$$

де  $m = 1 \dots N$ . Система рівнянь (15) виникає при розрахунках гідродинамічних характеристик нелінійних хвиль на хвильової поверхні та при визначенні однієї змінної на хвильової поверхні, наприклад,  $w(\theta)$  через іншу поверхневу змінну, наприклад,  $\psi(\theta)$  у рамках гамільтонової механіки хвиль на воді [14].

Якщо далі, для зручності, використати векторну форму запису коефіцієнтів рядів Фур'є у вигляді  $\vec{\phi}^{c,s} = \{\phi_m^{c,s}\}^T$ ,  $\vec{\psi}^{c,s} = \{\psi_m^{c,s}\}^T$ ,  $\vec{w}^{c,s} = \{w_m^{c,s}\}^T$  та  $\vec{a}^{c,s} = \{a_n^{c,s}\}^T$  і застосувати отримані вище алгоритми для операцій над рядами (13), (14), то остаточно система рівнянь для Фур'є-коефіцієнтів запишеться так:

$$\begin{bmatrix} (I + \hat{E}^c(\vec{a}^{c,s})) & \hat{E}^s(\vec{a}^{c,s}) \\ \tilde{E}^c(\vec{a}^{c,s}) & (I + \tilde{E}^s(\vec{a}^{c,s})) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{\phi}^c \\ \vec{\phi}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{\psi}^c \\ \vec{\psi}^s \end{Bmatrix}, \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} (I + \hat{E}^c(\vec{a}^{c,s})) & \hat{E}^s(\vec{a}^{c,s}) \\ \tilde{E}^c(\vec{a}^{c,s}) & (I + \tilde{E}^s(\vec{a}^{c,s})) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_N \vec{\phi}^c \\ D_N \vec{\phi}^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{w}^c \\ \vec{w}^s \end{Bmatrix}, \quad (17)$$

де  $I$  – одинична матриця,  $D_N = \text{diag}\{1, 2, \dots, N\}$  – діагональна матриця, утворена з натуральних чисел, а елементи клітинних матриць  $\hat{E}^{c,s} = \|\hat{E}_{nj}^{c,s}\|$ ,  $\tilde{E}^{c,s} = \|\tilde{E}_{nj}^{c,s}\|$ ,  $n, j = 1, 2, \dots, N$  визначаються залежностями:

$$n = 1, \dots, N/2$$

$$\hat{E}_{nj}^{c,s} = \begin{cases} (c_{j,n-j}^{c,s} + c_{j,n+j}^{c,s}), & j = 1, \dots, n; \\ (\pm c_{j,j-n}^{c,s} + c_{j,n+j}^{c,s}), & j = n+1, \dots, N-n; \\ c_{j,j-n}^{c,s}, & j = N-n+1, \dots, N; \end{cases} \quad (18)$$

$$\tilde{E}_{nj}^{c,s} = \begin{cases} (\mp c_{j,n-j}^{s,c} - c_{j,n+j}^{s,c}), & j = 1, \dots, n; \\ (c_{j,j-n}^{s,c} \pm c_{j,n+j}^{s,c}), & j = n+1, \dots, N-n; \\ c_{j,j-n}^{s,c}, & j = N-n+1, \dots, N; \end{cases} \quad (19)$$

$$n = N/2 + 1, \dots, N$$

$$\hat{E}_{nj}^{c,s} = \begin{cases} (c_{j,n-j}^{c,s} + c_{j,n+j}^{c,s}), & j = 1, \dots, N-n; \\ c_{j,|n-j|}^{c,s}, & j = N-n+1, \dots, N; \end{cases} \quad (20)$$

$$\tilde{E}_{nj}^{c,s} = \begin{cases} (c_{j,n-j}^{s,c} - c_{j,n+j}^{s,c}), & j = 1, \dots, N-n; \\ c_{j,|n-j|}^{s,c}, & j = N-n+1, \dots, N, \end{cases} \quad (21)$$

де коефіцієнти  $c_{j,m}^{s,c}$  розраховуються за формулами (14).

Для визначення векторів Фур'є-коефіцієнтів  $\vec{w}^{c,s}$  через  $\vec{\psi}^{c,s}$  потрібно в рівняннях (16), (17) позбутися векторів Фур'є-коефіцієнтів  $\vec{\phi}^{c,s}$ . Якщо застосувати метод оберненої матриці [9], то будемо мати залежності для  $\vec{\phi}^{c,s}$ :

$$\vec{\phi}^c = A_1 \vec{\psi}^c - A_2 \vec{\psi}^s, \quad \vec{\phi}^s = B_1 \vec{\psi}^c - B_2 \vec{\psi}^s, \quad (22)$$

де позначено матриці  $A_1 = \left( G^c - G^c \hat{E}^s H^{-1} \tilde{E}^c G^c \right)$ ,  $A_2 = G^c \hat{E}^s H^{-1}$ ,  $B_1 = H^{-1}$ ,  $B_2 = H^{-1} \tilde{E}^c G^c$  і

також  $H = \left( \tilde{G}^s - \tilde{E}^c G^c \hat{E}^s \right)$ ,  $G^c = (I + \hat{E}^c)$ ,  $G^s = (I + \tilde{E}^s)$ . Підстановка залежностей (22) у систему рівнянь (17) дає остаточно співвідношення:

$$\begin{bmatrix} \vec{w}^c \\ \vec{w}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ R_{21} & R_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{\phi}^c \\ \vec{\phi}^s \end{bmatrix}, \quad (23)$$

де клітинні матриці  $R_{jk}$  мають вигляд:

$$\begin{aligned} R_{11} &= (G^c D_N A_1 + \hat{E}^s D_N B_1), \quad R_{12} = (G^c D_N A_2 + \hat{E}^s D_N B_2), \\ R_{21} &= (\tilde{E}^c D_N A_1 + G^s D_N B_1), \quad R_{22} = (\tilde{E}^c D_N A_2 + G^s D_N B_2). \end{aligned} \quad (24)$$

Якщо вектори коефіцієнтів  $\vec{w}^{c,s}$  відповідають вертикальній проекції швидкості на хвильовій поверхні, а вектори  $\vec{\psi}^{c,s}$  та  $\vec{\phi}^{c,s}$  – поверхневому значенню потенціалу швидкості в рідині  $\psi(\theta)$  та хвильовій поверхні  $\zeta(\theta)$  відповідно, то залежності (16) – (24) дають змогу вилучити з рівнянь Гамільтона для нелінійних поверхневих хвиль на воді [14] неканонічну зміну  $w(\theta)$ , залишивши в рівняннях тільки пару канонічних змінних  $\zeta(\theta)$  і  $\psi(\theta)$ . Проте, як видно з отриманих залежностей, відповідний алгоритм не є тривіальним і містить достатньо великий обсяг рекурентних та матричних операцій.

На рис. 4 наведено приклад розрахунку коефіцієнтів  $w_i^s$ ,  $\psi_i^s$  та їх порівняння з даними асимптотичного розв’язку для хвилі Стокса при  $N=6$  [10]. Як видно, розбіжності між результатами за різними методами досить незначні.

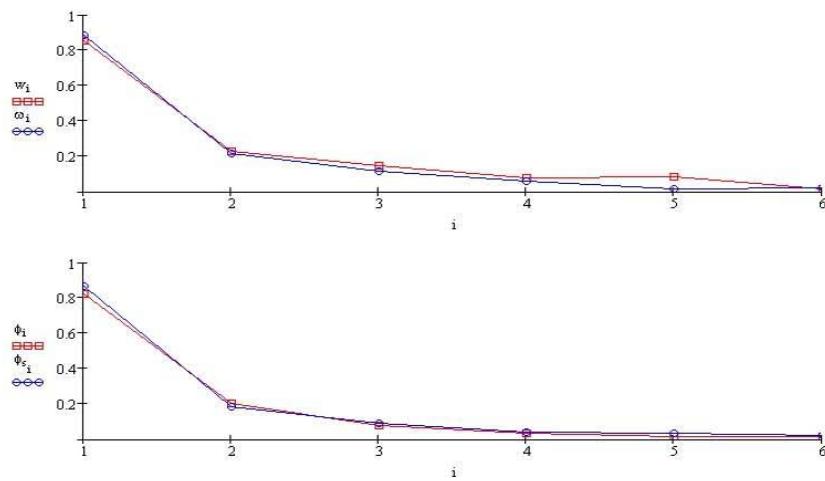


Рис. 4. Коефіцієнти рядів Фур’є для функцій  $w(\theta)$  і  $\psi(\theta)$  (□ – розрахунки за наведеними формулами, ○ – розрахунки за асимптотичними формулами [10])

### Висновки

1. Застосування сплайн-апроксимацій у техніці гармонічного аналізу значно поліпшує точність розрахунків коефіцієнтів рядів Фур’є та зменшує вплив на результати високочастотного “шуму” в сітковій функції.

2. Алгебра адитивних, мультиплікативних та експоненціальних операцій над рядами Фур’є може бути отримана у замкненому вигляді, а відповідні алгоритми для Фур’є-коефіцієнтів можна застосовувати при дослідженні поверхневих періодичних хвиль великої крутості із сильними нелінійними ефектами.

3. Даної техніка також буде корисною і при застосуванні гамільтонівського формализму для поверхневих хвиль на воді, у якому, зокрема, виникає проблема вилучення неканонічної змінної з рівнянь Гамільтона.

### Література

1. Романовский П.И. Ряды Фурье. Теория поля. Аналитические и специальные функции. – М.: Наука, 1973. – 336 с.
2. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 272 с.

3. *Давидан И.Н., Лопатухин Л.И., Рожков В.А.* Ветровое волнение как вероятностный гидродинамический процесс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1978. – 286 с.
4. *Хаскин М.Д.* Гидродинамическая теория качки корабля. – М.: Наука, 1973. – 327 с.
5. *Селезов И.Т.* Волновые процессы в гидродинамических и упругих средах // Прикл. гідромеханіка. – 2000. – Т. 2(74), № 4. – С. 99-118.
6. *Зейтунян Р.Х.* Нелинейные длинные волны на поверхности воды и солитоны // Успехи физ. наук. – 1995. – Т. 165. – № 12. – С. 1403-1456.
7. *Захаров В.Е., Кузнецов Е.А.* Гамильтоновский формализм для нелинейных волн // Успехи физ. наук. – 1997. – Т. 167. – № 11. – С. 1137-1168.
8. *Стокер Дж. Дж.* Волны на воде: Пер. с англ. – М.: ИЛ, 1959. – 617 с.
9. *Форсайт Дж., Малькольм М. Мулер К.* Машинные методы математических вычислений. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
10. *Сердюченко А.Н., Румянцева И.Б.* Гидродинамические характеристики волн Стокса, близких к предельным // Судостроение: Республ. межвед. научн.-техн. сб. – Киев-Одесса: Вища школа, 1987. – Вып. 36. – С. 19-23.
11. *Сердюченко А.Н., Паплаускас А.Р.* К расчету профиля и давлений в ветровых волнах конечной амплитуды // Гидродин. корабля: Сб. научн. тр. – Николаев: НКИ, 1992. – С. 88-96.
12. *Найфе А.Х.* Методы возмущений: Пер. с англ. – М.: Мир, 1976. – 455 с.
13. *Silverman B.W.* Some aspects of the spline smoothing approach to non-parametric regression curve fitting // J. Royal Statist. Society. London – Vol. B 47. – 1985. – P. 1-52.
14. *Сердюченко А. М.* До рівнянь Гамільтона для нелінійних поверхневих хвиль на глибокій воді // Збірник наукових праць. – Миколаїв: НУК, 2005. – № 5 (404). С. – 9-19.